

DOI: 10.46943/XI.CONEDU.2025.GT13.022

## **GEOMETRIA DINÂMICA NO ENSINO: EXPLORANDO A RETA DE EULER E A CIRCUNFERÊNCIA DOS NOVE PONTOS NO GEOGEBRA**

Antonio Marcos da Silva Souto<sup>1</sup>

### **RESUMO**

A investigação aborda a utilização do GeoGebra como ferramenta didática para o ensino de conceitos geométricos complexos, como a circunferência dos nove pontos e a reta de Euler, destacando a relevância da tecnologia na educação matemática. Inicialmente, discute-se a resistência histórica à incorporação de Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) na prática pedagógica e a necessidade de capacitação docente para superar essa barreira. Com o GeoGebra, são propostas atividades práticas que permitem aos estudantes interagirem diretamente com elementos geométricos, como medianas, bissetrizes e alturas de um triângulo, incentivando a formulação de conjecturas e a descoberta de propriedades através da manipulação digital. Essas atividades visam transformar o aprendizado de matemática, muitas vezes percebido como mecânico e desafiador, em uma experiência interativa e atraente. Além disso, o texto reflete sobre os desafios contemporâneos da distração digital e a importância de equilibrar o uso de tecnologias com objetivos educacionais precisos. A contextualização histórica da evolução das ferramentas de cálculo e a progressiva adoção de TICs na educação eviden-

---

1 Mestre em Matemática pela UFPB, Licenciado em Ciências com habilitação em Matemática. Professor EBTT do IFPE/Campus Afogados da Ingazeira, antonio.souto@afogados.ifpe.edu.br.

ciam uma compreensão ampla de como a tecnologia pode redefinir a sala de aula. Defende-se que a interação com softwares como o GeoGebra é crucial para preparar os alunos para um mundo digitalizado, promovendo uma abordagem dinâmica e reflexiva da matemática, essencial para o desenvolvimento de competências no século XXI. A obra sugere que essa metodologia pode revitalizar o interesse pela geometria, proporcionando uma plataforma para experimentação e construção ativa do conhecimento geométrico.

**Palavras-chave:** GeoGebra, Educação Matemática, Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs), A reta de Euler e a Circunferência dos nove pontos, Geometria Dinâmica.

## INTRODUÇÃO

O ano de 2012 marcou a educação da rede estadual de ensino de Pernambuco pela inclusão nos materiais didáticos oferecidos aos estudantes, pelo poder público, de computadores portáteis, equipamento que vem revolucionando as relações dessa geração com a informação. Naquele ano, realizamos um levantamento histórico sobre o uso de recursos tecnológicos no processo de ensino-aprendizagem como parte das atividades do curso de mestrado em Matemática. Neste período, algumas outras redes de educação também aderiram a essa tendência pedagógica, como o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco - IFPE e várias redes municipais, em vários programas de inclusão digital promovidos pelo Ministério da Educação (MEC) e Secretarias municipais.

Fatos muito mais relevantes surgiram nos últimos 13 anos que nos motivaram a dar continuidade à pesquisa, incluindo novas tecnologias que surgem diariamente com velocidade assombrosa como os *smartphones* e *tablets*, que aumentaram sua capacidade de processamento e suas inúmeras funcionalidades, reduzindo seus custos, tornaram-se mais populares e acessíveis também a grupos sociais historicamente em situação de menor acesso a estes recursos. Outro grande evento surgiu no âmbito legislativo, com a reforma do Ensino Médio e sua indicação para o uso dos recursos digitais nos itinerários formativos, novas disciplinas e temas transversais, inclusive com capítulos inteiros sobre pensamento computacional e introdução à programação em livros didáticos de matemática dos anos iniciais, como nos alerta Souto *et al* (2023). Entretanto, nada se compara ao choque de realidades promovido pela maior pandemia da nossa geração, que nos exigiu um uso desses recursos nunca experimentado na nossa história. Professores de todo o planeta iniciaram uma verdadeira maratona em busca do conhecimento das mais variadas formas de comunicação virtual com uso de recursos tecnológicos em um espaço temporal mínimo. Mas, o surgimento de plataformas que utili-

zam recurso de Inteligência artificial generativa em aparelhos móveis, de fácil manipulação, que cria conteúdos, resolve questões e até produz textos, entre inúmeras outras funcionalidades, apresenta-se como o grande “vilão” atual, a ponto de, juntamente com as utilizações recreativas no horário escolar, motivarem a promulgação da lei 15.100/2025, que proíbe alunos de usarem telefone celular e outros aparelhos eletrônicos portáteis em escolas públicas e particulares, inclusive no recreio e no intervalo entre as aulas. A exposição das fragilidades da formação tecnológica trouxe à tona indagações que permanecem sem respostas plenas até hoje:

- Isso realmente funciona?
- Como utilizar essas ferramentas se na formação docente os recursos computacionais não foram contemplados?
- O aluno não vai se distrair com esse equipamento nas aulas?

Essas são velhas perguntas que sempre permearam o processo de Ensino-Aprendizagem e a inclusão de novos recursos didático-pedagógicos, que obviamente não temos pretensão de responder neste pequeno texto, mas procurar através do resgate histórico e sua evolução, caminhos que nos levem a compreensão da utilização de algum desses recursos para o ensino de pequenos tópicos da Matemática como elementos da geometria.

Com o advento do computador e suas tecnologias, vimos surgir ferramentas virtuais poderosas para o estudo da Matemática e da Geometria. Entre essas se destacam os softwares de Geometria Dinâmica. Na disciplina do mestrado, Recursos Computacionais no Ensino da Matemática, vimos que as ferramentas de geometria dinâmica permitem a construção de objetos geométricos de acordo com propriedades ou relações estabelecidas. Estes podem então ser manipulados dinamicamente, de tal maneira que as propriedades e relações sejam preservadas. Esse modo particular de construção geométrica apresenta características especiais, que podem ter consequências importantes para a aprendizagem, conforme Valente

(1993). Utilizaremos neste trabalho, o *software* livre Geogebra e sua plataforma online para sugerir uma sequência didática para a construção de alguns dos elementos mais fascinantes da geometria, os pontos notáveis do triângulo, a reta de Euler e a circunferência dos nove pontos.

## METODOLOGIA

Esta pesquisa caracteriza-se como um estudo qualitativo, do tipo proposta metodológica, cujo objetivo principal é a elaboração e fundamentação de uma sequência didática. A investigação foi conduzida por meio de técnicas de pesquisa bibliográfica e análise histórica, que subsidiaram a técnica central de modelagem da atividade didática.

Inicialmente, foi realizado um resgate histórico e bibliográfico com foco no papel e a evolução das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) na educação, desde os ábacos (HOGBEN, 1958) até os softwares de geometria dinâmica (COSTA-PINTO, 2003).

Esta etapa foi crucial para contextualizar a proposta e conectar o uso da tecnologia contemporânea com uma tradição milenar de busca por instrumentos que facilitem a visualização e o cálculo matemático. A partir desse referencial, procedeu-se à modelagem sistemática da sequência de atividades com o Geogebra.

A proposta metodológica consiste em uma sequência didática investigativa, estruturada em três etapas principais, que utiliza o *software* Geogebra para explorar de forma integrada os pontos notáveis, a Reta de Euler e a Circunferência dos Nove Pontos. A atividade é centrada na descoberta, onde o professor atua como mediador.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Se observarmos a história da humanidade, veremos que o homem sempre buscou criar instrumentos que visualizassem os conhecimentos matemáticos e facilitassem os cálculos. Esta evolução tecnológica, que

se desenvolve desde o início da civilização, teve seu marco inicial possivelmente na contagem. Hogben (1958) sugere que a necessidade de registrar suas posses, principalmente rebanhos, fez com que o homem primitivo buscasse meios de contá-los. Supõe-se que a ideia de número estava vinculada à comparação entre quantidades, nesse caso, se poderia comparar a quantidade de animais com a quantidade de pedras, por exemplo, fazendo a associação uma a uma. Com o passar do tempo, após a utilização dos cálculos (pedras) surgiram aparelhos que auxiliaram as contagens mais extensas. Novamente, Hogben (1958) sugere que o aparelho de contar, ou ábaco<sup>2</sup>, é uma descoberta antiquíssima. Sempre o vemos, onde quer que se tenha implantado uma cultura megalítica. Os mexicanos e peruanos conheciam-no quando os espanhóis chegaram à América. Muitos milênios antes de Cristo, já o empregavam os chineses e egípcios. Os romanos adotaram-no dos etruscos. Desde bem remota antiguidade até o início da era cristã, esta armação fixa foi o único instrumento de calcular do qual dispunha a humanidade.

Depois de muitos séculos, após o despertar da civilização ocidental com o Renascimento, surgem novos equipamentos tecnológicos que, apesar de parecer-nos de pouca expressão, revolucionaram o mundo da ciência, principalmente das Exatas. A primeira calculadora capaz de realizar as operações básicas de soma e subtração foi inventada em 1642 pelo filósofo, físico e matemático francês Blaise Pascal (1623-1662). Com o surgimento de outras parafernálias similares, o homem passou a utilizar cada vez mais esses equipamentos. Todavia, em meados do século XX um grande salto é dado em direção ao avanço dos equipamentos tecnológicos, de acordo com Costa-Pinto (2003), a II Guerra Mundial verá o nascimento de um novo e extraordinário avanço da tecnologia, que irá alterar a relação do homem com a tecnologia e o conhecimento. São os primeiros *mainframes* ou os primeiros computadores a serem criados, totalmente voltados para as atividades bélicas, dadas as condições da

---

2 Instrumento de cálculo que utiliza contas deslizantes para representar números e realizar operações aritméticas

época, período de conflito militar. Daí em diante é que realmente se vê uma evolução exponencial. Os primeiros computadores eram gigantescos, o primeiro computador eletrônico, conhecido como ENIAC (*Electronic Numerical Integrator and Calculator*) possuía aproximadamente 18 mil válvulas, pesava 30 toneladas e chegava a consumir 150 KW. Todavia, Levy (1999) lembra que os computadores ainda eram grandes máquinas de calcular, frágeis, isoladas em salas refrigeradas, que cientistas em uniformes brancos alimentavam com cartões magnéticos perfurados e de tempos em tempos cuspiam listagens ilegíveis.

Diante deste cenário era inimaginável que naquela década pensassem que um dia teríamos um computador pessoal (chamado de PC) tão acessível. Tal virada ocorreu, de acordo com o mesmo autor, na década dos anos 1970 quando o setor produtivo industrial passou a utilizá-lo com maior intensidade e começou a ser disponibilizado para uso pessoal. Em consequência, seu custo foi diminuindo, tornando-se popular. Recorremos novamente a Levy (1999), que afirma que os processadores disponíveis se tornam, a cada ano, menores, mais potentes, mais confiáveis e mais baratas e a partir da década de 1980, assistimos a um processo ainda mais intenso de miniaturização dos computadores. Hoje temos aparelhos que são várias vezes mais velozes e eficientes, porém, com dimensões infinitamente menores, podendo caber na palma da mão, como os *tablets* e *smartphones* atuais.

Todo esse avanço tecnológico faz com que a Escola dos dias atuais questione a sua participação nesta verdadeira revolução e o uso desta tecnologia iminente na construção do conhecimento. Recorremos ao autor Carvalho (2004), o qual nos informa que estamos apresentando um caminho para encontrar material pertinente para a construção de uma nova proposta pedagógica. São novos espaços de conhecimento. As tecnologias de informação e comunicação (TICs)<sup>3</sup>, entre elas o computador e a

3 TIC ou NTIC é a abreviação de Novas Tecnologias de Informação e Comunicação, que são os recursos tecnológicos utilizados hoje, como o computador, os projetores de imagem, recursos audiovisuais, internet, games, entre outros.

Internet, podem apontar caminhos. Voltando ao que Costa-Pinto (2003) nos diz, vemos a necessidade do ser humano de aprimorar conhecimentos e técnicas pedagógicas e os grandes avanços da tecnologia têm levado o professor a sentir, cada vez mais, a necessidade de utilizar o computador em seu cotidiano.

Nesse pensamento, Perrenoud (2000) endossa, abrangendo a escola como um todo, o mesmo declara que a escola não pode ignorar o que se passa no mundo. Ora, as novas tecnologias da informação e da comunicação transformam espetacularmente não só nossas maneiras de comunicar, mas também de trabalhar, de decidir, de pensar. Podemos ver que o auxílio da informática no atual sistema educacional pode ser encarado como uma grande inovação no processo de aprendizagem desde que seus recursos sirvam para desenvolver uma melhor compreensão e obtenção de conhecimento.

Esta abertura para os meios tecnológicos de educação surge inclusive nos materiais didáticos conforme diz Delizoicov (2002). particularmente nos anos iniciais deste século, percebia-se a produção de materiais didáticos que, de uma forma ou de outra, contemplavam o conhecimento das tecnologias. Trata-se de um conjunto minoritário de livros didáticos e principalmente paradidáticos, além da oferta de materiais digitais em páginas na rede WEB e CDROM's, que eram utilizados, embora por uma minoria de professores.

Tal evolução era percebida já nas maiores escolas das principais cidades do país. Toda esta equipagem verificada em tais escolas eram frutos do Programa Nacional de Informática na Educação, o PROINFO<sup>4</sup>, inicialmente, era voltado para o atendimento da rede pública de Ensino Fundamental e Médio de todas as unidades federativas que atendiam a mais de 150 alunos. Na cidade de Serra Talhada, cidade polo do interior de Pernambuco que dista 408 km da capital, por exemplo, a maioria das

---

4 O Programa Nacional de Tecnologia Educacional (ProInfo) foi um programa educacional criado pela Portaria nº 522, de 9 de abril de 1997, pelo Ministério da Educação, para promover o uso pedagógico da informática na rede pública de ensino fundamental e médio.

escolas já eram contempladas com o programa acima citado. Escolas da rede Estadual de Ensino de grande porte, com mais de 1000 alunos, já possuíam um laboratório com computadores em suas instalações físicas registradas há mais de 20 anos. Demais escolas de médio porte também já foram contempladas posteriormente. Outra ferramenta importante que surgiu neste programa foi a equipagem das instituições de ensino com projetores multimídia e laboratórios móveis<sup>5</sup>.

Retornando ao programa Aluno conectado<sup>6</sup>, citado na introdução desta obra, que além de oferecer aqueles equipamentos no horário escolar, permitia ao estudante levá-lo para suas residências como estratégia da continuidade do processo ensino-aprendizagem em casa. Todavia, era comum encontrar, entre os alunos, a insatisfação de deixar a vida escolar sem a utilização efetiva destes recursos tecnológicos em sua jornada acadêmica. Era comum encontrar laboratórios fechados e em alguns casos até encaixotados a espera de alguém para montá-los e instalar os recursos necessários e professores que não utilizam, em algum momento pedagógico. Infelizmente, atualmente ainda nos deparamos com esta realidade em algumas escolas, principalmente em áreas remotas e de difícil acesso, como zona rural.

Com o início da disponibilidade e fornecimento dos meios tecnológicos como material de suporte aos professores, cabia uma indagação: estes estão preparados? A falta de conhecimento sobre o modo de usar o computador em suas práticas pedagógicas provocou o questionamento em relação à metodologia de ensino nas escolas e à prática dos professores em sala de aula. Como consequência, isso pode ter causado a desaprovação do uso do computador na sala de aula? Pareceu-nos que esta aversão à utilização destes recursos era comum a quase todos os profissionais de

---

5 Laboratório composto de 40 notebooks, netbooks ou tablets em um armário móvel que era levado de sala em sala quando o professor incluía em sua programação didático-pedagógica a utilização destes equipamentos.

6 Programa da rede estadual de educação de Pernambuco que entregou mini notebooks com funções de tablets a estudantes do 2º e 3º ano do Ensino Médio como material didático permanente.

várias áreas que vivenciaram um início profissional sem a utilização dessas tecnologias. Todavia, todos eles sentiram a necessidade da reciclagem e da capacitação. Como esta tecnologia demorou um pouco a chegar às escolas de Ensino Fundamental e Médio, os educadores não se capacitaram na mesma velocidade das outras profissões.

Arruda (2004) declara que o professor se vê diante de um sentimento de perplexidade perante o novo, representado pelos recentes avanços tecnológicos, mesmo porque a escola, até então jamais havia deixado de ter o mesmo aspecto que lhe era próprio desde o século XIX: carteiras enfileiradas, um quadro, a mesa do professor, seu papel hierárquico na sala de aula, entre outras características. Já Valente (1993) já nos alertava no final do século passado que a criança vive em um mundo que se prepara para o século 21 e frequenta uma escola do século 18 (isso tanto a nível de instalações físicas como de abordagem pedagógica).

Outro elemento constrangedor na prática docente é a insegurança; ou será cômodo para um professor saber que parte de seus alunos conhece muito mais do funcionamento de um computador do que ele? Admitir que grande parte do conhecimento adquirido ao longo da vida acadêmica passa por momentos de incertezas, podendo, às vezes, ser descartado, é um tanto quanto cruel para o educador atual. Todavia, Shor e Freire (1986, p. 34) declaram que Antes de mais nada, reconhecemos que é normal sentir medo, é uma manifestação de que estamos vivos. Não tenho que esconder meus temores. Mas, o que não posso permitir é que meu medo seja injustificado, e que me imobilize. Quanto a isso, Morin (2003) alertava os profissionais da educação, chamando a atenção de que é preciso aprender a enfrentar a incerteza, já que vivemos em uma época de mudanças em que os valores são ambivalentes, em que tudo é ligado. É por isso que a educação do futuro deve se voltar para as incertezas ligadas ao conhecimento.

Em contrapartida, há de se ressaltar que o corpo discente atual é bastante diferente daquele do início da vida profissional da maioria dos professores. As gerações que estavam acostumadas com os brinque-

dos convencionais que perduravam há séculos foram cedendo espaço ao videogame, aos jogos eletrônicos e às redes sociais. Desde o início do século que esse cenário já era realidade, como já enfatizava Moita (2007), nas últimas décadas, crianças, em todo mundo, fascinam-se com games e passam mais horas frente a telas de computador do que a maioria dos seus pais, avós e professores gostariam. Esse fascinante brinquedo tecnológico, que nas décadas de 1980 e 1990 era acessível com limitações à classe de maior poder aquisitivo, devido ao alto custo do produto. Hoje, porém, vivemos uma verdadeira revolução no campo dos games. Por um lado, o custo de um aparelho tornou-se cada vez mais acessível, por outro, o próprio computador e a Internet tornaram-se ambientes adequados para a diversão da nova geração, com grande ampliação percebida com a popularização dos smartphones e inúmeros jogos criados e adaptados para esta plataforma, com possibilidade de interações com pessoas de qualquer parte do planeta. Novamente Carvalho (2004) traz um questionamento a respeito do computador, como utilizá-lo? Para os alunos, ele não era mais desconhecido, utilizavam-no para melhorar a apresentação de trabalhos, divertiam-se em jogos, comunicavam-se por e-mails e até pesquisavam na Internet. Atualmente, o smartphone assumiu essa função juntamente com aplicativos muito atraentes, munidos com IA, com acesso rápido e simples.

Surgem, então, outros questionamentos dos educadores: como competir com esse farto banquete que esta explosão de entretenimento proporciona? Como tornar sua disciplina atrativa a ponto de levar o aluno a dedicar parte do seu tempo a ela? Como fazer um jovem passar alguns minutos lendo um livro? Estes questionamentos são quase unanimidade entre os docentes. Se não parte do aluno o desejo para explorar as fontes de conhecimentos convencionais, cabe aos educadores motivá-los para tal, usando as ferramentas que trazem prazer, atraindo-os. É importante que haja simpatia ou atração pelo conhecimento. Novamente Morin (2003) contribui, afirmando que

A afetividade pode asfixiar o conhecimento, mas pode também fortalecê-lo. Há estreita relação entre inteligência e afetividade: a faculdade de raciocinar pode ser diminuída, ou mesmo destruída, pelo déficit de emoção; o enfraquecimento da capacidade de reagir emocionalmente pode mesmo estar na raiz de comportamentos irracionais.

E que outra disciplina provoca ao aluno mais repúdio, medo e aversão que a matemática? O período de uma aula de matemática é, para a maioria dos alunos, as piores horas de suas vidas. A matemática, como ciência, sempre teve uma relação muito especial com as novas tecnologias, desde as calculadoras, os computadores, aos sistemas multimídia e à internet. No entanto, os professores (como, de resto, os próprios matemáticos) têm demorado a perceber como tirar partido destas tecnologias como ferramenta de trabalho. O grande desafio que elas põem hoje em dia à disciplina de matemática é saber se ela conseguirá dar um contributo significativo para a emergência de um novo papel da escola ou se continuará a ser a parte mais odiosa do percurso escolar da grande maioria dos alunos.

Um dos aspectos positivos das novas tecnologias é a possibilidade da interação proporcionada ao jovem. A busca pelo conhecimento, mediada pela diversão de jogos, games, viagens virtuais e simuladores, pode ser facilitada pela possibilidade de comunicar-se e até comandar as ações do computador. Ainda Segundo Levy (1999), O termo interatividade em geral ressalta a participação ativa do beneficiário de uma transação de informação. De fato, seria trivial mostrar que um receptor de informações, a menos que esteja morto, nunca é passivo. Possivelmente esta autonomia facilita o despertar da curiosidade no jovem, permitindo que ele aja em busca dos conhecimentos fartamente oferecidos pelo ambiente tecnológico. Shor e Freire (1986) nos auxiliam informando que a curiosidade também é uma das exigências na construção do conhecimento, e o computador é um aliado. Eles declaram que não tinham dúvida nenhuma do enorme potencial de estímulos e desafios à curiosidade que a tecnologia põe à serviço das crianças e dos adolescentes das classes sociais chamadas favorecidos. Não foi por outra razão que, enquanto Freire foi secretário

de educação da cidade de São Paulo, fez chegar à rede das escolas municipais o computador.

Diante do exposto, seria uma forma de atrair o aluno a implantação da informática como uma disciplina curricular, como ferramenta das outras disciplinas ou como um tema transversal? A esse respeito, Perrenoud (2000) nos auxilia informando que na escola de Ensino Fundamental, a Informática geralmente não é proposta como uma disciplina a ser ensinada por si mesma, a exemplo da geografia ou da matemática, um conjunto de saberes e habilidades constituídos aos quais se atribuiria uma parte da carga horária. Isso porque as competências esperadas dos professores dessa etapa não são da ordem de uma didática da informática. O problema não se coloca de modo muito diferente para os professores de Ensino Médio, salvo para aqueles que estão explicitamente encarregados de ensinar informática como disciplina. Conviria também indagar-se sobre que cultura de informática se quer dar no Ensino Fundamental e Médio. Os defensores das novas tecnologias, às vezes, têm uma visão muito curta e ingênua da transferência didática. Há menos de trinta anos, alguns propunham, com a maior seriedade, o ensino desde a escola Fundamental de uma linguagem elementar de programação, como a Basic.

Apesar dos questionamentos, novamente Perrenoud (2000), continua mostrando sua visão sobre o assunto, dizendo que formar para as novas tecnologias é formar o julgamento, o senso crítico, o pensamento hipotético e dedutivo, as faculdades de observação e de pesquisa, a imaginação, a capacidade de memorizar e classificar a leitura e análise de textos e de imagens, a representação de redes, de procedimentos e de estratégias de comunicação. Portanto, para gerar tais habilidades é de extrema importância que este veículo seja utilizado como ferramenta facilitadora na construção do conhecimento nas disciplinas curriculares convencionais, sobretudo na física e na matemática, já que elas são a base para a própria existência, crescimento e consolidação dos equipamentos tecnológicos.

Levy (1999), afirma que a informática reúne técnicas que permitem digitalizar a informação (entrada), armazená-la (memória), tratá-la auto-

maticamente, transportá-la e colocá-la à disposição de um usuário final, humano ou mecânico (saída). O autor prossegue simplificando ao afirmar que um computador é uma montagem particular de unidades de processamento, de transmissão de memória e de interface. Esta ferramenta também é lembrada por Valente (1993), quando ratificava o uso do computador como uma ferramenta poderosa na construção do conhecimento declarando que o computador pode enriquecer ambientes de aprendizagem onde o aluno, interagindo com os objetos desse ambiente, tem chance de construir o seu conhecimento.

Seguindo esta ótica, percebe-se que a informática utilizada como interface na construção do conhecimento multidisciplinar, principalmente na área das disciplinas chamadas exatas, apresenta possibilidades de criar ambientes virtuais onde o discente pode simular fenômenos, construir e analisar gráficos, modelar experimentos virtuais e utilizar as leis, regras e fórmulas na prática.

Segundo Teodoro (2003), os computadores são hoje em dia uma ferramenta ubíqua em toda a atividade científica e, por isso, o seu uso deve ser encarado como essencial no processo de aprendizagem da ciência. Em física, os computadores são utilizados para medir, para analisar dados, para construir e explorar modelos matemáticos, para visualizar valores de grandezas, para simular, para comunicar, para pesquisar informação, para ler os mais variados tipos de documentação. Quando o estudante se depara diante de tal cenário: um computador que ele pode usar na aula que mais detesta, vendo que todas aquelas “chatices” de matemática podem ser úteis e até agradáveis e que pode executar comandos que vão construir novos experimentos, percebe-se então, a possibilidade de estarmos preparando um aluno que passa a construir o conhecimento a partir do bom relacionamento que o mesmo possui com a máquina. Quanto ao exposto, o computador deve ser usado como uma máquina para ser ensinada. Nesse caso, é o aluno quem deve passar as informações para o computador. Entende-se, com isso, que o jovem, já vem com um certo conteúdo em sua bagagem.

De acordo com Valente (1993), a construção do conhecimento acontece pelo fato de o aluno ter que buscar novas informações para complementar ou alterar o que ele já possui. Além disso, o aluno está criando suas próprias soluções, está pensando e aprendendo sobre como buscar e usar novas informações (aprendendo a aprender). Esta declaração corrobora com o pensamento de Freire (1987), contrário a educação bancária<sup>7</sup>. Segundo o próprio, quanto mais se problematizam os alunos, como seres no mundo e com o mundo, tanto mais se sentirão desafiados. Tão mais desafiados, quanto mais obrigados a responder ao desafio, compreendem o desafio na própria ação de captá-lo. Mas, precisamente porque captam o desafio como um problema em suas conexões com outros, num plano de totalidade e não como algo petrificado, a compreensão resultante tende a tornar-se crescentemente crítica, por isto, cada vez mais desalienada. Faz-se necessário então, proporcionar ao estudante tal ambiente onde ele possa desenvolver sua criatividade, introduzindo o lúdico, o prazer em seus estudos.

No ensino dos pontos notáveis do triângulo<sup>8</sup>, é comum encontramos nos livros didáticos e na prática docente de parte dos professores, uma apresentação mecânica desses pontos. É certo que, enriquecido com uma grande quantidade de ilustrações, para àqueles estudantes que já despertaram o desejo pela descoberta na matemática, a teoria da construção desses pontos, as cevianas, as curiosidades e suas utilizações são absorvidas, contudo, o aluno não constrói seus próprios conhecimentos. Mesmo quando os educadores recorrem à construção geométrica com régua e compasso, não dá para trabalhar “dinamicamente” com essas construções pois, torna-se inviável a reprodução de inúmeras situações diferentes com essas ferramentas.

Com o advento do computador e suas tecnologias, vimos surgir ferramentas virtuais poderosas para o estudo da Matemática e da Geometria.

---

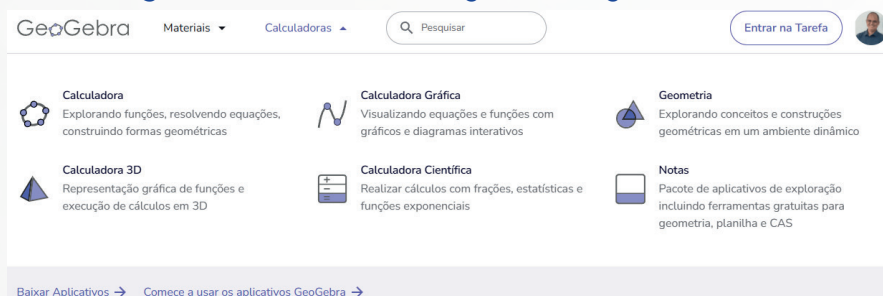
7 Termo utilizado pelo Educador Paulo Freire para retratar a educação tradicional que salientava o depósito do conhecimento pelo professor (único detentor do conhecimento) no aluno (banco de depósito de conhecimento).

8 Pontos de intersecção de cevianas (segmentos de reta notáveis do triângulo). Os mais utilizados são o Baricentro, o Incentro, o Circuncentro e o Ortocentro.

Entre essas se destacam os softwares de Geometria Dinâmica. Na disciplina do mestrado Recursos Computacionais no Ensino da Matemática vimos que as ferramentas de geometria dinâmica permitem a construção de objetos geométricos de acordo com propriedades ou relações estabelecidas. Estes podem então ser manipulados dinamicamente, de tal maneira que as propriedades e relações sejam preservadas. Esse modo particular de construção geométrica apresenta características especiais, que podem ter consequências importantes para a aprendizagem, vide PROFMAT (2012, p. 67).

Hoje, estamos diante de muitos Softwares de Geometria Dinâmica. No nosso trabalho, escolhemos um dos muitos programas gratuitos, ou *softwares* livres, pela facilidade de aquisição por parte das instituições de ensino, professores e alunos. O Geogebra<sup>9</sup>, cuja plataforma está ilustrada na figura 1, segundo sua página virtual, é um software de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema.

**Figura 1:** Plataforma do Geogebra – Imagem do autor.



## SEQUÊNCIA DIDÁTICA NO GEOGEBRA

Na sua dissertação, Souto (2013) apresenta um resgate histórico sobre o triângulo e suas inúmeras funcionalidades desde bem antes dos *Elementos de Euclides* até o século XVII da era cristã, quando surge o teo-

9 Plataforma disponível no endereço [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org).

rema de Ceva<sup>10</sup> em 1678, reinaugurando a busca por novas descobertas destes fascinantes entes geométricos, até encontrar a reta de Euler e a circunferência dos nove pontos. Nesta mesma obra, o autor alerta para o estudo desses elementos na Educação Básica como motivador:

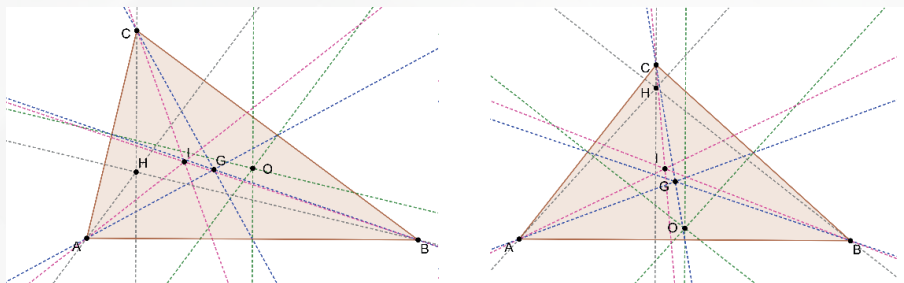
O estudo das cevianas e dos pontos notáveis pela intersecção delas definidas, são apresentados aos estudantes ainda na educação básica de forma mecânica e em muitos casos como mera curiosidade, fazendo com que o educando não sinta a menor atração nem simpatia por esse assunto. Em seus momentos raríssimos de prática pedagógica, alguns educadores recorrem à construção geométrica com régua e compasso para ilustrar esses belíssimos elementos que trazem para alguns discípulos alguma alegria quando veem a exatidão dessa construção.

A construção das cevianas e seus pontos de intersecção com régua e compasso atrai os geómetras há séculos, mas observar o seu comportamento de forma dinâmica, ou seja, movimentar os pontos do triângulo e conservar todas as suas propriedades, apresenta fascínio e ludicidade. A figura 2 ilustra dois triângulos ABC com as bissetrizes e o Incentro (ponto I), as alturas e o ortocentro (ponto H), as mediatrizes e o Circuncentro (ponto O) e as medianas e o Baricentro (ponto G) com a mudança de posição do vértice C. Observa-se que o dinamismo desta ferramenta facilita a observação de propriedades e características de cada elemento, como a conjectura dos pontos H, G e O estarem sempre alinhados, como propõe as duas imagens.

Esta conjectura se confirmou nos estudos de Euler e a descoberta da reta que recebeu seu nome, imaginamos que o uso de ferramentas como esta, naqueles tempos, seria revolucionário, já que as construções eram totalmente manuais.

10 Proposto pelo matemático italiano Giovanni Ceva (1647-1734), conforme Contador (2006), na página 32, este teorema afirma que as cevianas (segmentos de reta que ligam os vértices de um triângulo a um ponto do lado oposto a ele, que tem o seu nome em homenagem ao próprio Giovanni Ceva) geradas pelos vértices de um triângulo A, B, C e pelos pontos dos lados opostos D, E, F, respectivamente, são concorrentes se  $BD \cdot CE \cdot AF = FB \cdot DC \cdot EA$ .

**Figura 2** - Construção de um triângulo ABC, suas cevianas e seus pontos notáveis em duas possibilidades com o vértice C movimentado e suas características preservadas. As bissetrizes estão em rosa, bissetrizes em azul, medianas em verde e alturas do triângulo em cinza – Imagem do autor.



A sugestão de uma sequência didática investigativa, utilizando o GeoGebra para explorar de forma integrada os pontos notáveis, a Reta de Euler e a Circunferência dos Nove Pontos, centrada na descoberta, onde o professor atua como mediador, é o que apresentaremos a seguir.

### 1ª ETAPA: CONSTRUÇÃO DOS PONTOS NOTÁVEIS E PRIMEIRAS CONJECTURAS.

No ambiente geometria<sup>11</sup> da plataforma Geogebra, os alunos são orientados a construir um triângulo ABC e seus pontos notáveis com as seguintes instruções:

- Baricentro (G): Os alunos são incentivados a construir o ponto médio dos lados não apenas com a ferramenta nativa, mas reproduzindo a construção com régua e compasso virtual (duas circunferências de raio AB com centros em A e B, por exemplo), explorando conceitos de congruência e propriedades de triângulos equiláteros. Em seguida, traçam as medianas e identificam o Baricentro.
- Incentro (I): Propõe-se a construção das bissetrizes. Pode-se explorar o conceito de lugar geométrico, criando um controle deslizante para o raio de uma circunferência com centro em um vértice. As

11 Disponível no endereço eletrônico: [www.geogebra.org/geometry](http://www.geogebra.org/geometry)

perpendiculares aos lados por pontos de interseção desta circunferência definirão um ponto cujo rastro, ao animar o controle, formará a bissetriz.

- Circuncentro (O): Apresenta-se o conceito de mediatriz, aproveitando os pontos médios de cada lado, já encontrados, incluindo o conceito de perpendicularidade com a utilização dos pontos de interseção de circunferências com centros em cada vértice e raio maior que o comprimento do lado, que definem sua construção.
- Ortocentro (H): Seguindo a mesma lógica de construção investigativa, os alunos traçarão as alturas para encontrar o Ortocentro.

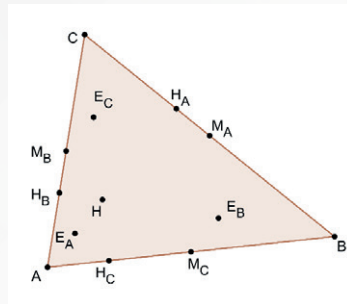
## 2ª ETAPA: CONSTRUÇÃO DA RETA DE EULER E SUAS PROPRIEDADES

Com os quatro pontos notáveis construídos (O, G, H, I), o professor lança o desafio: “Será que existe algum alinhamento entre esses pontos?”. Os alunos, manipulando os vértices do triângulo, são conduzidos a descobrir que O, G e H são sempre colineares – a Reta de Euler. Novos questionamentos surgem: Em que tipo de triângulo o Incentro também pertence a esta reta? (Resposta: triângulos isósceles). Qual a relação entre os segmentos HG e GO? (Conjectura da razão 2:1). Atividades de medição e construção de circunferências auxiliares são usadas para validar as conjecturas.

## 3ª ETAPA: CONSTRUÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA DOS NOVE PONTOS A CONSTRUÇÃO DOS PONTOS:

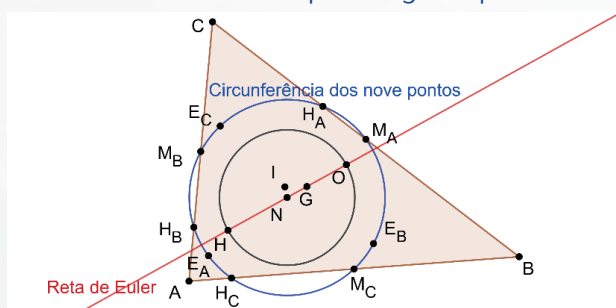
- Pontos médios de cada lado: Os alunos já encontraram em atividades anteriores os três pontos médios dos lados ( $M_A$ ,  $M_B$ ,  $M_C$ ).
- Pés das alturas: São os pontos de interseção das alturas com cada lado ( $H_A$ ,  $H_B$ ,  $H_C$ ) já encontrados na construção do ortocentro.
- Pontos de Euler: Estes são novos pontos propostos por Euler que são os pontos médios entre o Ortocentro e cada vértice ( $E_A$ ,  $E_B$ ,  $E_C$ ).

**Figura 3:** Triângulo ABC com o Ortocentro (H) e os três pontos médios de cada lado, três pés de altura e três pontos de Euler.



A figura 3 ilustra a construção destes nove pontos e sugere a existência de uma circunferência que contém os nove pontos. A partir daí, o mediador propõe a construção de uma circunferência com os pontos dados, porém sem a determinação de seu centro. A plataforma conta com uma ferramenta que determina uma circunferência dados três de seus pontos, todavia, o bloqueio desse recurso possibilita surgirem outras estratégias como a construção de um circuncentro de um triângulo definido por quaisquer três dos nove pontos. Uma curiosidade surgirá ao encontrar este ponto central N, sua localização na reta de Euler e o mais interessante, é o ponto médio entre o ortocentro e o circuncentro, que pode ser facilmente verificado com a construção de uma circunferência de centro em N e raio NO ou NH, que passa pelos dois pontos notáveis. Todas as demonstrações destas construções podem ser encontradas na dissertação de Souto (2013). A figura 4 ilustra a finalização dessa construção maravilhosa.

**Figura 4:** Triângulo ABC com seus pontos notáveis, a Reta de Euler e a Circunferência dos nove pontos. A circunferência em preto é gerda para conferir que  $HN=NO$ .



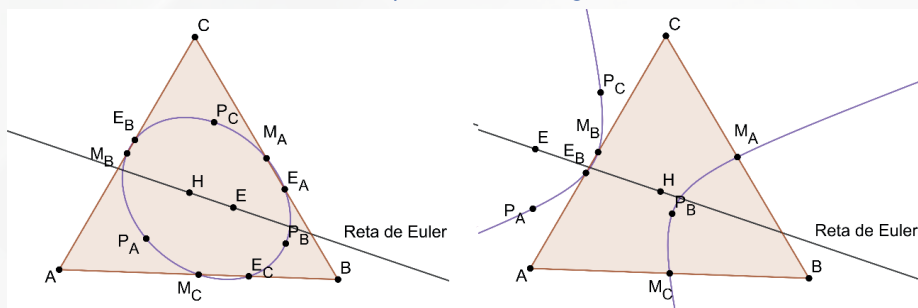
Percebe-se que a geometria dinâmica pode apresentar caminhos para tornar o estudo da geometria mais atraente e lúdico, como sugere Villiers (2005). Em um experimento em uma plataforma de geometria dinâmica, começou a construir outras cevianas que pertencem à reta de Euler, ou seja, criou um ponto móvel (pode assumir qualquer posição) na reta de Euler, três pontos médio entre ele e os vértices do triângulo e os três pontos dos lados que pertencem à reta definida por este ponto e cada vértice. O autor descreve como descobriu a Cônica dos nove pontos.

Ao arrastar e manipular dinamicamente o triângulo com o Sketchpad<sup>12</sup> por um tempo, de repente pareceu visualmente sugerir que os pés das cevianas D, E e F, e os pontos médios J, K e L estão todos em uma elipse. Isso foi imediatamente confirmado quando usei uma ferramenta do Sketchpad para desenhar uma elipse através de quaisquer cinco desses pontos, e a elipse passou pelo sexto ponto restante. Para minha grande surpresa e deleite, percebi em seguida, com mais manipulação, que esta elipse sempre passava pelos pontos médios dos lados do triângulo ABC (e se transformava em uma hipérbole se D, E e F fossem arrastados para os prolongamentos dos lados do triângulo). Em outras palavras, nove pontos no total pertencem a esta cônica determinada de forma única!

Após muitos estudos, ele descobriu que esta descoberta já ocorrera há pelo menos um século, embora não esteja nas literaturas atuais, todavia, a descoberta surgiu da manipulação dessa ferramenta formidável. Na figura 5 apresentamos a Cônica dos nove pontos com o ponto E interno, gerando uma elipse e com E externo, gerando uma hipérbole. A plataforma Geogebra oferece algumas ferramentas dinâmicas que melhoram ainda mais a compreensão dessas construções, como o controle deslizante, que “anima” o ponto E, deslocando automaticamente pela Reta de Euler.

12 *Software* de geometria dinâmica com ferramentas semelhantes ao Geogebra.

**Figura 5:** Construção de cônicas utilizando o ponto flutuante E sobre a Reta de Euler. À esquerda, o ponto E externo gera uma elipse e a direita com E externo ao triângulo, constrói-se uma parábola - Imagem do autor.



## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O uso do GeoGebra como ferramenta de ensino mostrou-se uma estratégia eficaz para tornar o aprendizado de geometria mais dinâmico, interativo e significativo. A exploração da Reta de Euler e da Circunferência dos Nove Pontos por meio de uma sequência didática investigativa permitiu que os alunos não apenas visualizassem conceitos abstratos, mas também formulassem conjecturas e validassem propriedades geométricas de forma autônoma. Essa abordagem favorece a construção do conhecimento e o desenvolvimento de habilidades como raciocínio lógico, curiosidade e pensamento crítico.

Apesar dos desafios relacionados à formação docente e à resistência inicial ao uso de tecnologias em sala de aula, a experiência evidencia que softwares de geometria dinâmica podem servir como poderosos aliados na renovação do ensino da matemática. Eles permitem superar a abordagem mecânica tradicional, substituindo-a por uma experiência de descoberta e engajamento.

Por fim, destaca-se a importância de integrar as TICs de maneira contextualizada e intencional, alinhando-as aos objetivos pedagógicos. O sucesso dessa integração depende não apenas do acesso à tecnologia, mas também da capacitação dos professores e da adoção de metodologias que coloquem o aluno no centro do processo de aprendizagem. Futuros trabalhos podem ampliar essa discussão, explorando o uso do

GeoGebra em outros tópicos da matemática ou em interfaces com outras disciplinas.

## REFERÊNCIAS

ARRUDA, E. P. **Ciberprofessor: Novas Tecnologias, Ensino e Trabalho Docente**. Belo Horizonte, Autêntica, 2004.

CARVALHO, A. M. P. (org). **Ensino de Ciências: Unindo a Pesquisa e a Prática**, São Paulo, Pioneira Thomson Learning, 2004.

CONTADOR, P. R. M. **Matemática, Uma Breve História**, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

COSTA-PINTO, S. M. D. N. **O Computador E O Ensino Superior De Matemática: Uma Prática Interativa**, Belo Horizonte - FACE-FUMEC, 2003.

DELIZOICOV, D et al. **Ensino de Ciências: Fundamentos e Métodos**; São Paulo: Cortez, (2002).

HOGBEN, L. **Maravilhas da Matemática, Influência e Função da Matemática nos Conhecimentos Humanos**, 2ed., Porto Alegre: Globo, 1958.

LEVY, P. **Cibercultura**, Coleção Trans, São Paulo, editora 34, 1999.

MORIN, E. **Os Sete Saberes Necessários À Educação Do Futuro**. 8.ed. São Paulo; Cortez; Brasília,DF: UNESCO, pp.20-84, 2003.

PERRENOUD, P. **Dez Novas Competências Para Ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 2000.

PROFMAT. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. **Recursos Computacionais no Ensino da Matemática**. São Paulo: SBM, 2012.

SHOR, I.; FREIRE, P. **Medo e Ousadia: o cotidiano do professor**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1986.

SOUTO, A. M. da S. **A reta de Euler e a circunferência dos nove pontos: um olhar algébrico**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, UFPB. João Pessoa, 2013.

SOUTO, A. M. da S. et al. **Utilização de Python para elaboração de algoritmos e o aprendizado de programação nas aulas de matemática.** Anais IX CONEDU... Campina Grande: Realize Editora, 2023. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/100122>. Acesso em: 20/10/2025

VALENTE, J. A. **Por Quê o Computador na Educação.** In: VALENTE, J. A. (Org.). Computadores e Conhecimento: repensando a educação. Campinas, SP: Gráfica da UNICAMP, 1993.

VILLIERS, M. **A Generalization of the Nine-point Circle and Euler Line.** Pythagoras no62, África do Sul: Mathematics Education, University of KwaZulu-Natal, pp. 31-35, (2005).