Educação matemática (Vol. 3)
ISBN: 978-65-5222-019-6

doi 10.46943/X.CONEDU.2024.GT13.002

CÁLCULO DIFERENCIAL E DEFICIÊNCIA VISUAL

Jorge Carvalho Brandão[1]

RESUMO

Diante da inclusão de discentes com deficiência visual em Instituições de Ensino Superior (IES), uma preocupação de alguns docentes de matemática é a forma de adequar estratégias de ensino contemplando discentes com deficiência visual e sem deficiência visual. Com efeito, há conceitos no Cálculo Diferencial e Integral com uma variável (doravante CDI-1) que são melhor compreendidos por meio de imagens e gráficos. Ao realizar uma pesquisa no banco de teses da capes, observou-se apenas uma tese, em 2019, que aborda o ensino de Cálculo Integral e deficiência visual e, em 2010, outra tese que contempla matemática no ensino médio para pessoas com deficiência visual. Assim sendo, este trabalho apresenta algumas estratégias de uso de material manipulável para auxiliar, inicialmente de forma intuitiva para, em seguida, seguindo rigor matemático, aprofundar a demonstração de alguns teoremas do CDI-1 contemplando tantos discentes com deficiência visual, em particular cegos, quanto sem deficiência visual. É um recorte de várias estratégias adotadas desde 2015, em uma IES em Fortaleza/CE, oscilando entre Engenharia Didática (ED), Sala de Aula Invertida (SAI), Lesson Study (LS), entre outras. Por conseguinte, no referencial contempla deficiência visual bem como cada uma das metodologias mencionadas anteriormente (ED, SAI, LS). Em relação ao percurso metodológico, apresenta as estratégias utilizadas indicando tanto os aspectos positivos quantos os aspectos negativos com cada turma observada. Negativo no sentido de não contemplar de maneira satisfatória sujeitos sem acuidade visual ou não sendo possível sujeitos cegos entenderem certas demonstrações, como, por exemplo, a demonstração da derivada de x^n, incialmente usando material manipulável nos casos n = 2 ou n = 3 e, em seguida a generalização para qualquer n pertencente ao conjunto dos números naturais. Nas considerações finais apresenta, por conseguinte, uma

1 Doutor em Educação e professor associado de Matemática para Engenharias do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará- UFC, profbrandao@ufc.br ;

Educação matemática (Vol. 3)
ISBN: 978-65-5222-019-6

forma de usar alguma metodologia a partir de determinadas particularidades na turma de discentes.

Palavras-chave: Adaptações, Cálculo diferencial, Deficiência visual.

ISBN: 978-65-5222-019-6

INTRODUÇÃO

Sendo docente de turmas de Fundamentos de Cálculo para Engenharias[2], disciplina anual, com 128 h/aula, tendo na ementa conteúdos de limites, derivadas e integrais (técnicas de integração, integrais impróprias e aplicações), tive a oportunidade de trabalhar com discentes com necessidades educacionais especiais. Mais precisamente, em uma das turmas havia duas discentes com baixa visão.

Também ministrei uma disciplina no período de férias estudantis da instituição (entre janeiro e fevereiro) a mesma disciplina adaptando-a para um discente com Transtorno de Espectro Autista (TEA). Por ocasião da especificidade, a turma ficou limitada a 15 discentes.

O presente trabalho indica de maneira metódica, embora sucinta, as estratégias apresentadas visando contemplar tanto discentes com NEE quanto demais discentes presentes, e aparentemente sem nenhuma necessidade especial, nas respectivas turmas. Com efeito, não é possível ministrar aulas exclusivamente para um ou dois discentes se, em um futuro próximo, tais discentes estarão no mercado de trabalho atuando em conjunto com outras pessoas.

A elaboração das estratégias passou por cinco profissionais: três matemáticos e dois psicopedagogos. Justifica-se a quantidade de profissionais porque, entre as adaptações (que serão descritas na metodologia) optou-se por trabalhar usando softwares e ambientes virtuais. Enquanto docente atuei em ambos os ambientes sendo auxiliado por um par (matemático e psicopedagogo) para virtual e outro par de profissionais para o presencial.

Desta feita, este trabalho tem como *objetivo principal* apresentar conjunto de métodos utilizados em turmas de Cálculo Diferencial I tendo a presença de discentes com necessidades educacionais especiais, tendo o aporte e suporte do Lesson Study.

Como pergunta norteadora pode-se destacar *as estratégias conjuntas usadas para contemplar discentes com e sem necessidades educacionais especiais são eficazes?* Ou seja, como saber se os conteúdos foram de fato assimilados? Houve perda de *qualidade* na forma de ensino, e de aprendizagem, pelos demais discentes, se comparados com as outras turmas com sujeitos sem, aparentemente, necessidades educativas especiais?

2 A instituição também oferece a disciplina na modalidade semipresencial.

ISBN: 978-65-5222-019-6

Repare, nobre leitor, que frequentemente uso a expressão *aparentemente sem necessidades educativas especiais*. Com efeito, conforme será descrito no percurso metodológico, as NEE não estão atreladas a um grupo de sujeitos com um estigma: ou deficiência visual ou Transtorno de Espectro Autista (TEA) ou com deficiência auditiva, etc. Essa expressão pode, a meu ver, ser estendida para aqueles discentes que, por exemplo, ingressam em um dos cursos de engenharias ou exatas *achando* que sabem matemática.

Diante das ações promovidas visando contemplar as discentes com deficiência visual, constatei que havia discentes que argumentavam como certas expressões do tipo: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ ou $1/(a + b) = (1/a) + (1/b)$. Uma maneira de contornar e superar tais dificuldades foi a forma de se expressar matematicamente (sugestão dada por um dos psicopedagogos).

A seguir, apresento brevemente referencial utilizado neste artigo.

REVISANDO UM POUCO LITERATURA

Dado que a vivência está associada ao Lesson Study, vale informar que outras metodologias também foram incorporadas para que o conteúdo fosse adaptado para discentes com necessidades educacionais especiais.

O processo Lesson Study ("Jugyokenkyu") é um processo da cultura escolar japonesa iniciado no século passado. Conforme Fernandez (2002) o referido processo pode indicar: estudo, pesquisa, investigação da lição ou da aula, ou ainda, o estudo de uma tarefa.

Reforça Edda Cury:

> É uma política pública do país e está inserida na cultura oriental. Envolve um processo dinâmico e colaborativo de planejamento, observação e reflexão sobre a aula. Tem como objetivos melhorar as aprendizagens dos estudantes e o desenvolvimento profissional de professores uma vez que este processo de trabalho não abrange apenas aspectos cognitivos dos participantes, mas valoriza também os aspectos afetivos e relacionais (Cury, 2021, pag.2)

Para este trabalho o sentido e o significado sobre o Lesson Study (doravante LS) Estudar Aula. O LS é caracterizado, por Yoshida (1999) como um processo que tem como etapas de maior destaque: planejamento, ensino, observação e análise das aulas, objetivando uma aprendizagem de qualidade para o discente,

ISBN: 978-65-5222-019-6

tornando-o protagonista do seu conhecimento, podendo assumir um papel ativo e autônomo em sua aprendizagem.

O "Lesson Study é um processo de desenvolvimento profissional de professores cada vez mais utilizado em diferentes níveis de ensino" (Ponte et al., 2016, p. 869). Segundo os referidos autores, o LS precisa ser desenvolvido de maneira colaborativa bem como reflexiva com os professores ou grupo de docentes.

As três etapas principais do LS, conforme Araújo, Ribeiro e Fiorentini (2017) são: planejamento, desenvolvimento e análise. No planejamento há a estruturação da aula e da tarefa a ser desenvolvida de maneira colaborativa e coletiva entre os docentes; a segunda ocorre o desenvolvimento da aula, o docente da disciplina leciona a tarefa elaborada na etapa anterior, sendo observado pelos demais colegas, que fazem registros, focando na aprendizagem dos alunos. Por fim, há o ato de, a partir das observações feitas, analisar, refletir e discutir entre os docentes a aula ministrada.

Vale ressaltar que se deve ocorrer, quando necessário, modificações, complementações e melhorias, podendo ser desenvolvido novamente na mesma turma ou em outra de mesmo nível conforme destacam Ponte et al., (2012) e Coelho, Vianna e Oliveira (2014).

Desta feita os processos constituintes do LS geram uma espiral, onde são revistas estratégias de ensino, mas com uma ação docente mais crítica e reflexiva, ocasionado pela experiência vivenciada, no qual o trabalho de colaboração é pautado por uma questão norteadora provinda dos professores (Fiorentini, 2013)[3].

Cegueira pode ser a perda total da visão e as pessoas acometidas dessa deficiência precisam se utilizar dos sentidos remanescentes para aprender sobre o mundo que as cerca. Gil (2000) indica que a *baixa visão* é a incapacidade de enxergar com clareza, mas trata-se de uma pessoa que ainda possui, de alguma forma, sua capacidade visual, que, apesar do auxílio de óculos ou lupas, a visão se mostra baça, diminuída ou prejudicada de algum modo.

Vale ressaltar que ambas as discentes eram cegas do olho esquerdo e usavam *Arial Black* tamanho *18* para atividades escritas. Por sua vez, cada uma das discentes sentava em cantos opostos na sala de aula. Sentavam na primeira fila, sendo uma na extremidade esquerda, a outra na direita.

3 Adaptação da tradução e reflexão após vivências com turmas com discentes com necessidades educacionais especiais

ISBN: 978-65-5222-019-6

Segundo elas, deve-se ao fato da luminosidade ou reflexo da escrita do pincel, na cor preta, no quadro branco. Primeira particularidade a observar enquanto docente: passei a usar apenas a parte central do quadro branco. No percurso metodológico apresento outras estratégias atrelas à vivência em sala de aula.

Em relação ao Transtorno de Espectro Autista (doravante TEA) de acordo com a 67ª reunião do World Health Organization, realizado em Genebra em 2014, o Transtorno do Espectro do Autismo é caracterizado por dois grupos de sintomas para o diagnóstico, tendo como base a presença dos critérios abaixo:

- Déficits de comunicação/interação social: déficit na reciprocidade das interações, déficits nos comportamentos não-verbais, dificuldade de desenvolver/manter relacionamentos.
- Presença de um padrão repetitivo e restritivo de atividades, interesses e comportamentos: estereotipias (ecolalia, p.ex.), insistência no mesmo, adesão estrita a rotinas, interesses restritos/incomuns, hiper/hipo reatividade a estímulos sensoriais.

O ensino de matemática para o referido público, a nível superior, é carente de pesquisas. Em tese recente defendida na Universidade de Aveiro, Portugal, Santos (2018) pesquisou sobre as tecnologias digitais no apoio ao desenvolvimento do raciocínio matemático de alunos com perturbação (ou transtorno) do espetro do autismo, contemplando o correspondente no Brasil ao Ensino Fundamental I.

Analisando os referenciais de Santos (2018) pude perceber que não há citação de trabalhos ao nível de ensino médio ou ensino superior que atrele Matemática e TEA. Investigando banco de teses de universidades brasileiras, como da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) que tem mestrado e doutorado em Educação Especial, também não obtive registros.

Todavia, visando contextualizar conteúdos, cada aula iniciava com uma situação problema. Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP), segundo Barell (2007), é um método de ensino que se baseia na utilização de problemas como ponto inicial para adquirir novos conhecimentos. A curiosidade que leva à ação de fazer perguntas diante das dúvidas e incertezas sobre os fenômenos complexos do mundo e da vida cotidiana. Esclarece que, nesse processo, os alunos são

ISBN: 978-65-5222-019-6

desafiados a comprometer-se na busca pelo conhecimento, por meio de questionamentos e investigação, para dar respostas aos problemas identificados.

Por sua vez, como saber se as respostas apresentadas estão coerentes? Caso errem na resolução dos problemas, como analisar tais erros? Helena Cury (2007) atesta que esse método serve para a análise das respostas de estudantes. Como categoria de análise as respostas são separadas em "totalmente corretas", "parcialmente corretas" e "incorretas", fazendo a contagem do número de respostas de cada tipo. Algumas vezes, dependendo do tipo de questão e de resposta, encontram-se apenas duas classes, respostas corretas ou erradas.

O método Van Hiele (1986), a seguir descrito, foi um dos norteadores para as atividades que usavam material concreto para construção de conceitos, principalmente atrelados às derivadas. A teoria de Dina e Peter Van Hiele, adaptada para pessoas com deficiência visual por Brandão (2010) e revisitada por Lira e Brandão (2013), refere-se ao ensino e aprendizagem da Geometria. Esta teoria, desenvolvida nos anos 50 do século XX, propõe uma progressão na aprendizagem deste tópico através de cinco níveis cada vez mais complexos. Esta progressão é determinada pelo ensino.

Conforme teoria há cinco níveis de aprendizagem da Geometria: visualização (nível 0), análise (nível 1), ordenação (nível 2), dedução (nível 3) e rigor (nível 4).

Por fim, e não menos importante, há a avaliação. Hoffmann (2001) indica que o ato de avaliar tem como interpretação cuidadosa e abrangente das respostas do aluno frente a qualquer situação de aprendizagem, sendo necessário entendê-la como acompanhamento de uma trajetória.

Luckesi (2005), ao se referir às funções da avaliação, alerta para a importância do avaliador estar atento à sua função ontológica, que é a de diagnosticar. Ela representa a base para uma coerente tomada de decisão, visto que se trata do meio de encaminhar os atos subsequentes, na perspectiva de uma situação positiva em relação aos resultados almejados. Além de diagnosticar, a avaliação tem a função de propiciar a autocompreensão do nível e das condições em que se encontram tanto o educando quanto o educador.

Esta *mescla* de teorias é que chamo de *eclética* pois não segui literalmente e a todo instante uma única sequência de estratégias, conforme descrevo no tópico a seguir. A única que foi mais explicitada, por ocasião dos momentos em conjunto com o grupo (matemáticos e psicopedagogos) foi LS.

ISBN: 978-65-5222-019-6

CAMINHADA METODOLÓGICA COM ANÁLISE DE DADOS

O presente estudo caracteriza-se como *estudo de caso*, o qual é a estratégia escolhida ao se examinar acontecimentos contemporâneos. Entretanto, a riqueza do fenômeno e a extensão do contexto da vida real exige que o pesquisador enfrente uma situação tecnicamente distinta, pois existirão muito mais variáveis de interesse do que pontos de dados (YIN, 2010).

Dentre as variáveis pode-se destacar: uma discente com baixa visão tinha uma boa base matemática e adentrou na instituição tão logo concluiu o ensino médio. A outra discente tinha concluído ensino médio em 2010 e tinha muito déficit na matemática.

Ambas tiveram acessos aos mesmos recursos tecnológicos, por sua vez, só uma participou mais ativamente das atividades propostas. Momentos de *reforço* de conteúdos, ou aulas extras com monitores ou orientandos de pós-graduação, uma era mais assídua do que a outra. Enfim: atividades semelhantes para discentes com perspectivas distintas, haja vista uma delas querer continuar no curso escolhido enquanto a outra ter interesse em modificar (embora o Cálculo seja disciplina obrigatória em qualquer curso pretendido pela jovem).

Para saber se atividades desenvolvidas na turma com as jovens com deficiência visual não comprometeriam o desempenho em relação ao todo, isto é, em relação às outras turmas, considerei uma turma como controle. O critério de escolha foi a turma de controle ter mesmos dias de aula em relação à turma estudada (uma turma era segundas e quartas de 08h00min às 10h00min e a outra de 14h00min às 16h00min).

Outro fator: ambas as turmas continham 60 estudantes matriculados. Na turma de controle segui meu padrão de ensino, a saber, apresentava uma situação problema inicial que servia de estímulo para introdução de um determinado conceito. Exemplo: *durante uma gripe atribuída às aves, na Ásia, pesquisadores recomendaram que os aviários fossem construídos em grandes galpões refrigerados (...) cada produtor construía seu aviário usando telas de arame com 20 metros de comprimento (desconsiderar altura as telas). Se o formato de cada aviário era retangular, quais as medidas do retângulo de maior área?*

Tradução: dentre todos os retângulos de perímetro 20 metros, qual possui maior área? Esta "tradução" foi consequência da intervenção de uma das psicopedagogas após apresentação da situação problema (gripe das aves). Com

Educação matemática (Vol. 3)
ISBN: 978-65-5222-019-6

efeito, há discentes que entendem o enunciado a partir de um "comando" direto: faça isso, resolva aquilo, etc.

Neste caso específico uma estratégia para resolução foi solicitar que construíssem retângulos com as medidas dadas para o perímetro. Lógico, após discentes argumentarem que problema solicita área de um retângulo de perímetro conhecido. Tabelas foram confeccionadas a partir de valores sugeridos pelos discentes. Notaram que quanto mais próximas eram as medidas dos lados, maior era a área. Ou seja, a resposta *tendia* para um quadrado.

Por sua vez houve quem afirmasse quadrado não ser retângulo. Assim sendo, usando papeis foram confeccionados vários quadriláteros. Em seguida, discentes eram convidados a identificar tipos de quadriláteros, para tanto, segui as estratégias de Van Hiele (1986) e Lira e Brandão (2013). Não tive tal preocupação na turma de controle. Motivo: segui meu planejamento de aulas *tradicionais*.

Aproveitei a oportunidade, dado que discentes estavam compreendendo conceitos de quadriláteros e fiz a seguinte pergunta: como se lê: $(a + b)^2$? Muitos discentes responderam "a" mais "b" ao quadrado ser dar pausa na fala.

Em seguida perguntei: e como se dá a leitura de $a + b^2$? *Impressionados* alguns responderam o mesmo anterior. É claro que sendo expressões distintas a leitura matemática deve ser distinta.

Assim sendo, introduzi produtos notáveis indicando primeiro a figura geométrica associada para então expressar o algebrismo. Entendendo: $(a + b)^2$ recomendei que lessem o quadrado de (lados de medidas) "a" mais "b". Para $a + b^2$ a ideia foi a junção de um retângulo de área "a" (sim, $a = a \times 1$ – logo, retângulo de lados "1" e "a") com um quadrado de lado "b". sugestão de psicopedagogo, para tornar mais significativa a ação docente.

Reparem a metodologia *eclética*: inicialmente apresentei uma situação problema contextualizada, em seguida trabalhei com análise de erros, dado que havia discentes que não entendiam um quadrado ser um retângulo, usei Van Hiele para analisar o nível dos discentes.

Vale ressaltar que atividades eram contínuas e continuadas, ou seja, não se encerrava em uma única aula conteúdo abordado. Entendendo, fazendo um recorte no tempo, os produtos notáveis que usei para dedução da derivada de x^n, sendo n número inteiro e positivo, também foi revisto o conteúdo para ensinar técnicas de integração, por exemplo integrais de $1/f(x)$ nos casos de $f(x) = x^2 + 6x + 9$, em seguida $f(x) = x^2 + 6x + 8$ ou $f(x) = x^2 + 6x + 10$. Nobre leitor, lembras quais técnicas de integração usam-se, respectivamente?

ISBN: 978-65-5222-019-6

Ressalta-se que integrais de funções do tipo $f(x) = 1/(ax^2 + bx + c)$, sendo a, b e c reais, com a diferente de zero, estão atreladas, entre outras aplicações, às reações químicas entre dois elementos (químicos). Daí um dos estímulos para inserção da referida técnica de integração.

Ou no caso das técnicas de integração por substituição trigonométrica quando no integrando há raiz quadrada de uma expressão do tipo $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Expliquei o motivo da técnica envolver substituição trigonométrica (e, ocasionalmente, substituição por função hiperbólica).

Deduzi, usando vários papeis 60kg de formato retangulares, o porque de $\Delta = b^2 - 4ac$, sendo geometricamente interpretado como a retirada de um quadrado de lado b quatro retângulos de lados a e c e reconstruir figura para compreensão de $\Delta > 0$ (formar retângulo), $\Delta = 0$ (formar quadrado) e $\Delta < 0$ (precisar completar para gerar retângulo). É claro, fiz e discentes manipularam três exemplos de cada caso antes de abstrair.

A figura 1 tem uma ilustração para $x^2 + 6x + 9$. Deve-se considerar que a unidade 1 é uma medida arbitrária. No caso, escolhi minha unidade como sendo um quadrado de lados iguais a três centímetros (par facilitar manipulação das discentes com baixa visão). Optei por usar papel na cor amarela.

O x, que é retângulo de lados iguais a x e a 1, ou seja, dado pelo produto de x por 1, usei um retângulo com medidas 12 cm por 3 cm. Optei por papel na cor vermelha. E o quadrado de lado x, ou seja, x^2, era papel no formato 12 cm por 12 cm. Usei cor verde.

Vale ressaltar que inicialmente tentei usar o material dourado. No caso do $x^2 + 6x + 9$ interpreta-se como uma tábua, junta com seis varetas e nove cubinhos. Desvantagem observada: como interpretar, por exemplo, $x^2 - x$? Se "+" representar inserir, juntar, então "−" significa retirar. E como retirar do material dourado? Recortar a peça? Foi daí que surgiu a necessidade de inserir papeis. A região sombreada da figura 2 indica $x(x - 1)$ como resultado de $x^2 - x$.

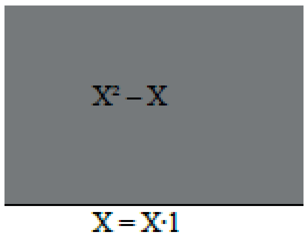
Educação matemática (Vol. 3)
ISBN: 978-65-5222-019-6

Figura 1: esboço de $x^2 + 6x + 9$

$X^2 = X \cdot X$	X $= X \cdot 1$	X $= X \cdot 1$	X $= X \cdot 1$
$X = X \cdot 1$	1 $= 1 \cdot 1$	1 $= 1 \cdot 1$	1 $= 1 \cdot 1$
$X = X \cdot 1$	1 $= 1 \cdot 1$	1 $= 1 \cdot 1$	1 $= 1 \cdot 1$
$X = X \cdot 1$	1 $= 1 \cdot 1$	1 $= 1 \cdot 1$	1 $= 1 \cdot 1$

Fonte: elaborado pelo autor

Figura 2: esboço de $x^2 - x$



Fonte: elaborado pelo autor

Material concreto e geoplano foram utilizados para auxiliar a compreensão de retas tangentes, de partições de regiões abaixo de uma função contínua $y = f(x)$, acima do eixo x e limitada lateralmente pelas retas $x = a$ e $x = b$, com $a < b$.

Talvez o grande diferencial tenha sido a forma de apresentação dos conteúdos. Não obstante material concreto, conforme já citado, o conteúdo era descrito pelo menos de três formas distintas. A saber: (1) verbalizava o que seria apresentado; (2) escrevia um resumo no quadro branco, após explanação verbal; (3) uma foto do que estava escrito era tirada e postada em grupo de WhatsApp; (4) fazia gravação de áudio, no referido grupo. Áudio não excedendo dois minutos para cada foto apresentada.

O grupo de WhatsApp foi criado para acompanhar as duas jovens. Para não excluir demais estudantes, solicitei que os demais 58 fizessem grupos (de WhatsApp) com no máximo dez discentes. Cada grupo de discentes indicava um representante para ter acesso ao meu grupo (que me incluía e as duas pessoas com deficiência visual).

Educação matemática (Vol. 3)
ISBN: 978-65-5222-019-6

Em relação às avaliações, as duas discentes com deficiência visual faziam cada uma das avaliações em dois momentos. As avaliações escritas eram realizadas em dias de quarta feira. Assim, no primeiro momento, na segunda feira, e individualmente, cada uma realizava um diálogo presencial com docente. Eram indagadas sobre conteúdo visto até momento, se elas reconheciam o conteúdo diante de alguma situação problema (ou seja, era lido um texto no qual discente tinha uma cópia em Arial Black 18).

Discente deveria indicar elementos estudados (por exemplo, se no texto há a indicação de que a taxa de crescimento de uma dada população é diretamente proporcional à quantidade presente em dado instante, discentes deveriam informar que taxa significa... ser proporcional equivale a...). Na terça feira, ou seja, um dia após diálogo/avaliação oral, usava-se a ferramenta WhatsApp para dialogar, em grupo, outras situações problemas ou questões de livros didáticos.

Na quarta feira, dia da avaliação escrita, enquanto os demais discentes recebiam uma prova com cinco questões, sendo duas contextualizadas, isto é, com textos para serem interpretados e resolvidos, e três questões de cálculo direto (ou derivação ou integração), as discentes com deficiência visual recebiam uma prova com três questões. Uma questão contextualizada (pois a outra já havia sido avaliada oralmente diante do diálogo na segunda) e duas de cálculo direto.

Observei que, comparando as notas médias das duas turmas, a turma onde estavam presentes as discentes com NEE teve média final 6,4 enquanto a outra a nota foi 5,7. A taxa de aprovação foi, respectivamente, 72% e 62%. Mas, o que é importante, e ainda não foi analisado, dado que o foco foi observar as discentes, é fazer uma análise dos erros de todas as questões de todos os discentes.

Com efeito, repito, o foco foi adaptar conteúdos para discentes com deficiência visual, sem excluir demais discentes da turma. Assim sendo, será que as adaptações foram significativas para demais discentes?

Em relação ao discente com TEA, as mesmas atividades foram realizadas com a turma a qual estava matriculado. Não tive dados satisfatórios porque discente faltou muitas das aulas. Mas, nas que esteve presente, pude observar, em conjunto com demais colegas, que tem uma leitura de gráficos muito rápida, embora tenha dificuldades em gerar tais gráficos usando softwares.

Teve pouca participação no grupo de WhatsApp o que também dificultou uma análise mais aprofundada e, por conseguinte, uma adaptação melhor para sua especificidade. Vale ressaltar que, em ambas as turmas, o grupo de profissio-

Educação matemática (Vol. 3)
ISBN: 978-65-5222-019-6

nais (três matemáticos e dois psicopedagogos) sempre se reunia antes das aulas e imediatamente depois de cada atividade proposta.

Apresento, agora, algumas vivências (sem imagens, dado que o foco está na argumentação) focando o limite fundamental da trigonometria e a derivadas de x^3. Passo a utilizar a primeira pessoa do plural porque, diante do contexto de sala de aula, discentes se sentem mais incluídos (acolhidos), haja vistas serem sujeitos efetivos (e afetivos) na participação ativa na construção de saberes.

Limite Fundamental da Trigonometria

Por qual motivo tem este nome? Porque todos os limites que envolvem funções trigonométricas e que têm a indeterminação 0/0 direta ou indiretamente passam por ele. Exemplificando: modelagem de marés, eletrocardiogramas, MHS, entre outros estão associados, em sua modelagem, à funções deslocamento do tipo y = A + B·cos(Cx + D), sendo constantes A, B, C e D (para cálculo inicial da função velocidade!) e x o tempo.

$$v_{inst}(k) = \lim_{x \to k} \frac{f(x) - f(x)}{x - k} = \lim_{x \to k} \frac{A + B \cdot \cos(Cx + D) - A - B \cdot \cos(Ck + D)}{x - k}$$

Há estratégias... pensemos no caso mais simples! Sabemos que sen0 = 0 e cos0 = Assim, façamos uma mudança de variável. Seja $w = x - k$ (pense da seguinte maneira: em ano, qual a idade de cada um de nós no ano que nascemos? Mas, não temos a mesma idade. Com efeito, nascemos em anos distintos! Como calcular, hoje, a idade de cada um de nós?).

Sendo $w = x - k$, segue-se que $x \to k$ implica em $w \to 0$.

$$\lim_{x \to k} \frac{B \cdot \cos(Cx + D) - B \cdot \cos(Ck + D)}{x - k} = B \lim_{w \to 0} \frac{\cos(Cw + Ck + D) - \cos(Ck + D)}{w}$$

Ser simples sem ser simplório! Isto é, em vez de fazer suposições, tais como B = C = 1 e D = 0 para facilitar nossas contas iniciais, notamos que podemos fazer mudanças de acordo com as necessidades. Consideremos (tais suposições podem ser feitas após indagar discentes o que eles observam na escrita do limite!) R = Ck + D (que é constante!) para facilitar tanto a visualização quanto a argumentação!

$$B \lim_{w \to 0} \frac{\cos(Cw + R) - \cos(R)}{w}$$

ISBN: 978-65-5222-019-6

Notamos que a escrita ficou "enxuta"! Agora, vamos desenvolver o cos(Cw + R) – neste momento é interessante recordar de onde vieram tais fórmulas para seno da soma, cosseno da diferença, etc[4].

$$B \lim_{w \to 0} \frac{\cos(Cw) \cdot \cos(R) - \text{sen}(Cw) \cdot \text{sen}(R) - \cos(R)}{w}$$

Procuremos deixar a escrita mais "atraente"! Vamos "simplificar" ainda mais a escrita. Considere $z = Cw$. Daí, $w \to 0$ implica $z \to 0$.

$$B \lim_{z \to 0} \frac{\cos(z) \cdot \cos(R) - \text{sen}(z) \cdot \text{sen}(R) - \cos(R)}{z/C}$$

Ou seja,

$$BC \lim_{z \to 0} \frac{\cos(z) \cdot \cos(R) - \text{sen}(z) \cdot \text{sen}(R) - \cos(R)}{z}$$

Notemos que cos(R) se repete. Podemos, por conseguinte, reorganizar a escrita!

$$BC \lim_{z \to 0} \left[\frac{\cos(z) - 1}{z} \cos(R) - \frac{\text{sen}(z)}{z} \text{sen}(R)\right]$$

Uma dica: construir tabelas para averiguar que (senz)/z $\to$ 1 à medida que z $\to$ 0. Mas... tabelas são trabalhosas (sem argumentar que NÃO são formais – no sentido matemático!). Assim, segue uma argumentação para "construção" de uma demonstração do limite fundamental da trigonometria:

$$\lim_{z \to 0} \frac{\text{sen} z}{z} = 1$$

1. Delimitado ao primeiro quadrante.
2. Supor raio unitário. No eixo das abcissas, eixo dos "x", considere o ponto A o ponto de interseção entre a circunferência e o eixo x.

4 Nobres leitores, anualmente nosso grupo de pesquisa, junto com o G-Tercoa, oferece cursos de capacitação na área de matemática e deficiência visual, onde usamos material concreto para demonstrar as expressões acima argumentadas, bem como outras que são pré-requisitos para o Cálculo!

Educação matemática (Vol. 3)
ISBN: 978-65-5222-019-6

3. Seja O centro da circunferência e considere z o ângulo AÔB, sendo B o ponto de interseção entre a circunferência e a semirreta com origem em O e que está gerando o referido ângulo.
4. Seja r uma (ou seria "a") reta paralela ao eixo y passando por B. Considere C a interseção da reta r com eixo x.
5. Com base no triângulo COB, sendo $\overline{OB} = 1$ (porque...), segue-se que senz = $\frac{\overline{BC}}{\overline{OB}}$ ou seja, $\overline{BC}$ = senz.
6. Sabemos que z é ângulo central (não esquecendo raio unitário), logo, o arco de extremidades A e B corresponde ao referido ângulo.
7. Percebemos que o segmento de extremidades C e B é menor (ou igual) ao arco de extremidades A e B (Em qual condição terá igualdade?)
8. Ou seja, senz ≤ z (como estamos no primeiro quadrante... 0 ≤ (senz)/z ≤ 1).
9. E agora? Vamos "prender" a expressão. Seja t a reta tangente à circunferência em
10. A (ou... seja t reta paralela ao eixo dos y passando por A). Considere D a interseção entre as retas r e t.
11. Do triângulo AOD, $\overline{AD}$ = tgz (por qual motivo não estabelecer outras relações?).
12. Percebe-se que z ≤ tgz (ou seja, o arco de extremidades A e B é menor (ou igual – em qual condição? – ao segmento de extremidades A e D).
13. Assim, $z \leq \frac{\text{sen } z}{\cos z}$. Organizando... $\cos z \leq \frac{\text{sen } z}{z}$
14. Por conseguinte, $\cos z \leq \frac{\text{sen } z}{\cos z} \leq 1$ e, pelo Teorema do Confronto, quando z se aproxima de 0 (pela direita ou pela esquerda?) segue-se resultado.

Já para encontrar o outro limite, usaremos produtos notáveis: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Por qual motivo? A relação fundamental da trigonometria indica que $\text{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$. Dado que precisamos de "cosz – 1" relacionando-o com "senz", então façamos: $\text{sen}^2 z = 1 - \cos^2 z$. Por sua vez, comparando a = 1 e b = cosz, segue-se: $\text{sen}^2 z = (1 - \cos z)(1 + \cos z)$.

Assim sendo, se multiplicarmos por 1 a expressão ela não será alterada. E 1 = k/k, isto é, é a divisão de qualquer expressão não nula por ela mesma!

$$\lim_{z \to 0} \frac{\cos z - 1}{z} \cdot \frac{\cos z + 1}{\cos z + 1} = \lim_{z \to 0} \frac{-\text{sen}^2 z}{z(1 + \cos z)} = \lim_{z \to 0} \frac{\text{sen} z}{z} \cdot \frac{-\text{sen} z}{1 + \cos z} = 0$$

Educação matemática (Vol. 3)
ISBN: 978-65-5222-019-6

Definição: se existir, a **derivada** em x = a é definida como o seguinte limite:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Vide outras notações nos livros textos, como dy/dx.

Onde usamos derivação? Se você recordar o tópico sobre limites, notará que uma velocidade instantânea é a derivada da função deslocamento em relação ao tempo, a aceleração instantânea é a derivada da velocidade em relação ao tempo, etc...

Derivada de x^n (nos casos n = 2 e n = 3)

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

1. O numerador, f(x) – f(a), no caso n = 2, corresponde a $x^2 - a^2$ (como se lê?).
2. Geometricamente, pensar no procedimento apresentado em 2.4.2
   Ou seja, $x^2 - a^2 = (x - a)(x+a)$
3. Por conseguinte, $(x^2 - a^2)/(x - a) = x + a$ e...
4. Seja o caso n = 3. Deste modo, numerador corresponde a $x^3 - a^3$ (como se lê?). Geometricamente, pensar no cubo da diferença.
5. Dica: material dourado ou caixas de creme dental (desde que contemplem as medidas...). Retirando o cubo de lados (arestas) iguais a "a", sobram quatros paralelepípedos: um com lados "x", "x" e "x – a" (logo volume dado por $x^2(x - a)$); outros dois com lados "a", "a" e "x – a" (por conseguinte, volume $a^2(x - a)$ cada um); e o quarto com arestas medindo "x – a", "x – a" e "a", sendo seu volume dado por $a(x - a)^2$
6. Juntando-os: $x^2(x - a) + 2(x - a)a^2 + a(x - a)^2$, e recordando distributividade, tem-se:
   $$(x - a)(x^2 + 2a^2 + ax - a^2) = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$
7. Por conseguinte, $(x^3 - a^3)/(x - a) = x^2 + ax + a^2$ e...

Para n > 3 não há possibilidades geométricas (no sentido...). Desta feita, intuir.

Educação matemática (Vol. 3)
ISBN: 978-65-5222-019-6

Derivada de $f(x) = x^n$, é $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, para qualquer n real.

Começaremos com n inteiro e positivo. Faremos a dedução para um certo k, um valor qualquer do domínio e, em seguida, substituiremos k por x...

$$f'(k) = \lim_{x \to k} \frac{f(x) - f(k)}{x - k} = \lim_{x \to k} \frac{x^n - k^n}{x - k}$$

Dos produtos notáveis...

$$\lim_{x \to k} \frac{(x - k)(x^{n-1} \cdot k^0 + x^{n-2} \cdot k^1 + \cdots + x^0 \cdot k^{n-1})}{x - k}$$

Simplificando e aplicando o limite, segue-se resultado!

CONCLUSÃO

Neste trabalho não tenho condições de informar as 27 adaptações realizadas durante o desenvolvimento da disciplina, contemplando desde interpretações de produtos notáveis, passando por interpretação geométrica da derivada até técnicas de integração. O que consegui relatar é para mostrar que é um desafio contemplar discentes com necessidades educativas especiais incluídos em salas regulares, sem excluir demais discentes sem aparentemente ter NEE.

Também não abordei a inclusão na instituição a qual trabalho. Um dos motivos: ser professor é ser desafiado a encontrar formas alternativas de ensinar os mesmos conteúdos aos diferentes discentes, pois cada um, independentemente de ser portador de NEE, tem um ritmo de aprendizagem.

Fica um questionamento: individualmente, será que as adaptações foram significativas para cada discente, independentemente de ter ou não ter NEE? Desta feita, concluo este relato com questionamentos para pesquisas futuras: (1) Fazer uma análise dos erros de cada discente e (2) acompanhar alguns dos discentes em disciplinas futuras, como Cálculo Vetorial e Equações Diferenciais Ordinárias para assegurar se estratégias foram, ou não foram, satisfatórias.

Educação matemática (Vol. 3)
ISBN: 978-65-5222-019-6

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, W. R., RIBEIRO, M., FIORENTINI, D. Lesson study no grupo de sábado: o prelúdio de uma tarefa desenvolvida no subgrupo do ensino médio In **Anais do VII Congresso Internacional de Ensino em Matemática**, Canoas, 2017

BARELL, J. **Problem-Based Learning. An Inquiry Approach**. Thousand Oaks: Corwin Press. 2007.

COELHO, F. G.; VIANNA, C. C. S S.; OLIVEIRA, A. T. C.C. A metodologia da Lesson Study na formação de professores: uma experiência com licenciandos de matemática. **VIDYA**, v. 34, n. 2, p. 1-12, 2014.

CURI, E. Lesson Study: Contribuições para Formação de Professores que Ensinam Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática,** Volume 14, número 34, p. 1-19, 2021

CURY, H. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2007.

BRANDÃO, J. **Matemática e deficiência visual.** Tese (Doutorado). Universidade Federal do Ceará, UFC - Faculdade de Educação, 2010.

BRASIL**. Programa Nacional de apoio à educação de pessoas com deficiência visual:** Orientação e Mobilidade – Projeto Ir e Vir. Brasília: MEC/SEE, 2002.

______.Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais Da Educação Básica/ Lei 9394/96. Em 20 de dezembro de 1996. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 1996.

FERNANDEZ, C. Learning from Japanese approaches to professional development: The case of lesson study. **Journal of teacher education**, v. 53, n. 5, p. 393-405, 2002

FIORENTINI, D. Learning and Professional Development of the Mathematics Teacher in **Research Communities. Sisyphus-Journal of Education**, v. 1, n. 3, p. 152-181, 2013.

FREIRE, P**. Pedagogia da autonomia:** saberes necessários à prática educativa. 31. ed. - São Paulo: Paz e Terra, 2005.

Educação matemática (Vol. 3)
ISBN: 978-65-5222-019-6

GIL, M. (org.). Secretaria de Educação a Distância, BRASIL MEC. **Deficiência visual**, 2000.

HOFFMANN, Jussara. **Avaliação mito e desafio:** uma perspectiva construtivista. Porto Alegre: Educação & Realidade, 2001.

LEE, C. **Language for learning mathematics, assessment for learning in practice.** Berkshire: Open University Press, 2006.

LIRA, A. K. & BRANDÃO, J. **Matemática e deficiência visual.** Fortaleza: Editora da UFC, 2013.

LUCKESI, C. **Avaliação da aprendizagem na escola:** reelaborando conceitos e criando a prática. 2 ed. Salvador: Malabares Comunicações e eventos, 2005.

PONTE, J. P. et al. O Estudo de Aula como Processo de Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática. **Boletim de Educação Matemática**, v. 30, n.56, p. 868-891, 2016.

SANTOS, Maria I. G. A**s tecnologias digitais no apoio ao desenvolvimento do raciocínio matemático de alunos com perturbação do espetro do autismo.** Universidade de Aveiro (tese de doutorado), 2018.

VAN HIELE, P.M. **Structure and insight:** a theory of mathematics education. Academic Press, 1986.

VYGOTSKY, L. S**. A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1996.

______. **Pensamento e linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 2003.

YIN, R. K. **Estudo de caso:** planejamento e métodos. Tradução Ana Thorell; revisão Técnica Cláudio Damacena. – 4. ed.- Porto Alegre: Bookman, 2010.

YOSHIDA, M. Lesson study [Jugyokenkyu] in elementary school mathematics in Japan: A case study. In: **American Educational Research Association (1999 Annual Meeting)**, Montreal, Canada. 1999.