

O ENSINO-APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA EM SALA DE AULA: CONTRIBUIÇÕES DE ALGUNS PESQUISADORES BRASILEIROS

Adriano Alves da Silveira ¹

RESUMO

A presente pesquisa tem como objetivo analisar as contribuições de alguns pesquisadores sobre o processo de ensino-aprendizagem de Análise Combinatória. Assim, buscaram-se algumas pesquisas que dão diversos focos ao estudo de Análise combinatória (Atividades Investigativas; Comunicação Matemática; Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e Resolução/exploração de Problemas). Com isso, foram trazidos os principais resultados dessas pesquisas com o intuito de ter um maior conhecimento sobre o tema desta pesquisa. Entre os pesquisadores que investigaram o estudo de Análise Combinatória, destacamos: (VARGAS, 2009); (ALMEIDA, 2010); (SOUZA, 2010) e (SILVA, 2013). Em relação ao procedimento utilizado, classifica-se o estudo como pesquisa bibliográfica, no qual foram consultados os documentos oficiais, e principalmente dissertações sobre o tema. Notou-se que o foco central das pesquisas tem sido para a sala de aula e para a metodologia Resolução de Problemas. Portanto, as pesquisadas analisadas contribuem para a formação dos professores que ensinam Matemática, visto que os resultados podem fazer com que os docentes reflitam sobre suas práticas, na medida em que é promovida uma substancial melhora das ações didáticas em sala de aula. As experiências que foram vivenciadas em sala de aula proporcionaram um diálogo entre a teoria e a prática, trazendo reflexões sobre como os alunos mobilizam seus conhecimentos no estudo da Combinatória, a partir de abordagens metodológicas inovadoras.

Palavras-chave: Ensino-Aprendizagem, Análise Combinatória, Sala de Aula.

INTRODUÇÃO

O presente trabalho apresenta o mapeamento de algumas pesquisas que discutiram o tema: “Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória em sala de aula”, dando atenção ao enfoque que foi dado, levando em consideração seus objetivos, metodologias utilizadas, resultados obtidos, recomendações metodológicas ou caminhos para a nova pesquisa. A partir daí, buscou-se entender as contribuições dos pesquisadores para o estudo da Combinatória, de modo que foi destacado o que se pretende aprofundar em relação ao ensino-aprendizagem deste tópico matemático.

O interesse pelo ensino-aprendizagem de Análise Combinatória partiu primeiramente de algumas lacunas deixadas quando o presente autor ainda era aluno da Educação Básica,

¹ Mestre do Curso de Ensino de Ciência e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, adriano.exatas@hotmail.com;

época em que não houve qualquer contato com o estudo de Análise Combinatória. Deste modo, questionávamos a respeito de como contribuir para que os alunos tenham um aprendizado com compreensão no estudo da Análise Combinatória; o que levou a buscar alternativas metodológicas para este conteúdo.

Este artigo tem como objetivo analisar as contribuições de alguns pesquisadores sobre o processo ensino-aprendizagem de Análise Combinatória em sala de aula. Assim, buscaram-se algumas pesquisas que dão diversos focos ao estudo de Análise combinatória (Atividades Investigativas, Comunicação Matemática, Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e Resolução/exploração de Problemas). Com isso, foram trazidos os principais resultados dessas pesquisas com o intuito de ter um maior conhecimento sobre o tema desta pesquisa. Entre os pesquisadores que investigaram o estudo de Análise Combinatória, destacamos: Vargas (2009); Almeida (2010); Souza (2010) e Silva (2013).

A partir do mapeamento das pesquisas, podemos elencar ideias relevantes sobre o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, tais como: os primeiros problemas devem conter uma quantidade relativamente pequena de agrupamentos, para que os alunos possam listá-los em seguida fazer a contagem; posteriormente o aluno deve lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem a compreensão do princípio fundamental da contagem; os problemas trabalhados devem levar à elaboração de estratégias que vão em direção à construção do raciocínio combinatório; as fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório; como também o apontamento das dificuldades encontradas e as principais estratégias utilizadas nas resoluções dos problemas de Análise Combinatória.

Notou-se que o foco central das pesquisas analisadas tem sido para a sala de aula e para a metodologia Resolução de Problemas. Mesmo assim percebe-se pouca compreensão sobre o Ensino de Análise Combinatória na sala de aula, diante das dificuldades encontradas pelos alunos neste tópico.

METODOLOGIA

No presente estudo foi realizado uma pesquisa bibliográfica, no qual foram consultados os documentos oficiais, e principalmente dissertações sobre o tema desta pesquisa.

De acordo com Gil (2010, p.29-31), “A pesquisa bibliográfica é elaborada com base em material já publicado. Tradicionalmente, esta modalidade de pesquisa inclui material impresso como livros, revistas, jornais, teses, dissertações e anais de eventos científicos”.

As dissertações analisadas foram: Atividades investigativas (VARGAS, 2009), Comunicação Matemática (ALMEIDA, 2010), Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da resolução de problemas (SOUZA, 2010) e Resolução/exploração de problemas (SILVA, 2013).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Inicialmente, destacou-se a pesquisa de Antônio Fernando Vargas, que tem como título: “*O Ensino-aprendizagem de Análise Combinatória através da Resolução de Problemas com Atividades Investigativas*”. Trata-se da versão final de uma dissertação de mestrado defendida, no ano de 2009, na Pontifícia Universidade Católica (PUC) de Minas Gerais.

O trabalho está organizado em três momentos: primeiro, o Referencial Teórico, iniciando com a Resolução de Problemas, tomando como base as ideias de George Polya. O segundo, a Elaboração das Atividades Investigativas, tendo, como principal suporte teórico, João Pedro da Ponte, que apresenta a técnica de montagem destas. No terceiro, a aplicação destas atividades, também se baseando nos dois autores citados, além da metodologia utilizada durante sua investigação em sala de aula e, por fim, é apresentada a conclusão.

O autor elaborou, dentro de uma sequência didática de assuntos desse conteúdo programático, por meio da abordagem metodológica baseada nas construções de conceitos, definições, deduções de fórmulas e, principalmente, resolução de problemas.

O autor destaca, como objetivo central de sua pesquisa, propor e avaliar o ensino-aprendizagem, com uma sequência didática, de Análise Combinatória através da resolução de problemas usando atividades investigativas.

Para atingir o que pretendia com a pesquisa, o autor criou uma proposta com um conjunto de atividades para o processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, estruturadas com uma sequência didática de conteúdos, que busca a aprendizagem por etapas, privilegiando a compreensão dos conceitos e a operacionalização através dos cálculos numéricos antes de algebrizar.

As atividades selecionadas para trabalhar em sala de aula foram estruturadas com foco em dois pilares: a identificação e constituição de agrupamentos dos elementos de um conjunto e a contagem desses agrupamentos, a partir do estabelecimento das fórmulas matemáticas.

Para o autor, o processo Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória deve ser estruturado buscando focalizar os seguintes tópicos: 01 – A identificação e constituição de “agrupamentos” dos elementos de um determinado conjunto; 02 – A “contagem” desses agrupamentos a partir do estabelecimento de uma fórmula matemática, deduzida pelas propriedades dos agrupamentos usando instrumental de síntese: “fatorial”.

A Metodologia utilizada em sala de aula foi a de resolução de problemas dando ênfase em atividades investigativas e aplicação de uma sequência didática, pela qual o autor enfatizou as estratégias determinadas por Polya (1995²), nas suas quatro fases: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução dele e o retrospecto.

A presente pesquisa é de cunho qualitativo, pela qual a coleta dos dados foi realizada através de descrições de situações vivenciadas durante a aplicação das atividades, levando em consideração, como foram desenroladas situações-problema e a importância dos participantes para esse tipo de pesquisa.

Foram selecionadas e trabalhadas dez atividades investigativas com a duração média de quarenta e cinco minutos para cada aula. Participaram, da pesquisa, noventa e nove alunos da segunda série do Ensino Médio, dez professores de Matemática, que as realizaram isolada e individualmente e um professor de Química, pelo fato de não ter aprendido este conteúdo. Os alunos foram organizados em duplas ou, em outro caso, em tríade, pelo fato da impossibilidade de divisibilidade.

O autor conclui o trabalho trazendo alguns depoimentos dos alunos que foram selecionados e transcritos, levando em consideração duas categorias: Caderno de Atividades e Atividades investigativas, com o intuito de ter um pequeno relatório a respeito da nova metodologia de ensino-aprendizagem adotada.

Em relação ao Caderno de atividades, foram transcritos alguns depoimentos segundo os quais o novo método de ensino e aulas dinâmicas promoveu um maior interesse dos alunos, diante da dificuldade encontrada quanto ao ensino de Análise Combinatória, de modo que este foi minimizado pelo uso do caderno trabalhado de forma autônoma. Além disso, a utilização dele valorizou a aula expositiva convencional, levando a aprendizagem da matéria, proporcionando um trabalho em dupla que possibilitou uma disponibilidade maior do professor. Por fim, é apresentado que a utilização do caderno de atividades foi um meio de abordagem do conteúdo extremamente inovador que levou à aprendizagem do conteúdo de maneira satisfatória.

² Originalmente publicado, em inglês, em 1944.

Para o autor, ficou evidente que é eficaz a metodologia da resolução de problemas, com esses modelos de atividades. Nesse sentido, foram transcritos alguns depoimentos dos alunos acerca das Atividades investigativas, que destacaram algumas ideias centrais, como: com estas atividades, os alunos afirmaram que puderam experimentar uma nova maneira de aprender Matemática; permitiu um trabalho em sala de aula que valoriza o aprofundamento do conhecimento instigando de modo a descobrir, com prazer, a solução das atividades propostas; além disso, as atividades investigativas apresentam o conteúdo de Análise Combinatória de uma maneira muito didática, proporcionando um trabalho que consistiu em investigar e deduzir as fórmulas, promovendo um aprendizado sem precisar decorar as fórmulas.

Os professores que participaram da pesquisa apresentaram opiniões e também sugestões de melhoramento das atividades propostas. Eles perceberam que existiu uma sequência lógica do assunto abordado, partindo de conceitos mais elementares para outros mais complexos. No entanto, notaram também que o autor da dissertação, insistiu muito no verbo imaginar. Assim, destacaram que em vez de imaginar, poderiam mostrar, ou seja, utilizar materiais concretos que facilitariam mais a compreensão por parte dos alunos.

O autor recomenda a utilização de materiais concretos em sala de aula, o que facilitaria a compreensão por parte dos alunos; e, além disto, os materiais são de fácil aquisição. Ele destaca que símbolos abstratos, como, por exemplos: algarismos, letras, números, entre outros, podem ser produzidos de papelão ou de tecido emborrachado e manuseados durante a socialização das atividades. Além de outros objetos, tais como: placas de veículos; escudos de times de futebol; volantes de loterias; bolas de isopor; jogos de dominó; baralhos; dados; entre outros, são disponíveis em lojas comerciais.

O autor destaca que os resultados obtidos através da investigação do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, levando em consideração as dificuldades encontradas tanto pelos alunos em relação à aprendizagem como pelos professores em ministrar esse conteúdo, devido à complexidade de seus conceitos, apontam que a mudança metodológica das aulas expositivas e do processo de ensino tradicional, tais como: definições formais, deduções de fórmulas e aplicações em exercícios e problemas, para investigações com atividades, se mostrou com maior desempenho didático, verificado após a aplicação das atividades, segundo os relatórios descritos pelos alunos.

A segunda pesquisa analisada, de mestrado, foi concluída em 2010, na Universidade Federal de Ouro Preto de Minas Gerais, da autora Adriana Luziê de Almeida, que tem como título: *“Ensinando e aprendendo Análise Combinatória com ênfase na Comunicação Matemática: um estudo com o 2º ano do Ensino Médio”*.

O objetivo central da pesquisa foi investigar o potencial da Comunicação Matemática em uma proposta de Análise Combinatória, construída com base na resolução de situações-problema, para alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Na revisão de literatura, a autora traz resultados dos estudos de alguns pesquisadores acerca de Análise Combinatória, como: Navarro-Pelayo (1991) e Batanero e Navarro (1991), Roa (2000), Roa e Navarro-Pelayo (2001).

Para a fundamentação teórica, em relação à Comunicação e Comunicação Matemática a autora destaca algumas ideias de Menezes (1999), Martinho (2007) e D'Antonio (2006). Além disso, são apresentadas ideias de Yackel e Cobb (1996) e Boavida (2005b), sobre argumentação nas aulas de Matemática, visto que ela se relaciona, de forma reflexiva, com o processo de comunicação.

Em relação à Metodologia em sala de aula, a autora desenvolveu e aplicou uma proposta de ensino de Análise Combinatória, fundamentada nos estudos sobre desenvolvimento do pensamento combinatório e um ambiente de estímulo à argumentação e discussão de situações-problema em pequenos e grandes grupos.

Esta proposta de ensino foi elaborada a partir da revisão de literatura acerca do ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, no qual a autora tinha como finalidade identificar os principais obstáculos e formas de enfrentá-los, referentemente ao estudo desse tópico.

Almeida (2010) aponta que a Comunicação Matemática entre alunos e professores deveria ir além da mera troca de informações e, com isso, preconiza uma compreensão mais profunda dos conceitos relacionados à Análise Combinatória e que se deve estimular a argumentação e a expressão.

Para a autora, nem toda comunicação gera aprendizagem, entretanto, toda aprendizagem é produto de algum tipo de comunicação, que ocorre a partir da interação do indivíduo com um objeto ou sujeito. Assim foi criado um ambiente de aprendizagem nos qual os alunos foram estimulados a expor suas ideias, apresentar sugestões, argumentar, questionar e refletir. Desta forma, para que o ambiente seja favorável, é necessário valorizar a argumentação, no qual o aluno constrói o próprio conhecimento, a partir do que emite e do que recebe.

No entanto, para Almeida (2010), mais do que ensinar a um aluno como resolver problemas, oferecendo-lhe habilidades e técnicas, é necessário garantir o espaço de discussões para que possa aprender, consigo mesmo e com os outros. Deste modo, para que se promova a Comunicação Matemática, é necessário que os sujeitos proponham questionamentos entre si, oferecendo informações de modo que eles possam se apropriar do conhecimento.

Para autora, os resultados da pesquisa evidenciam que a maioria dos alunos participou com interesse da proposta e que, gradativamente, passou a se expressar mais e com maior segurança e propriedade sobre os conceitos estudados e alcançou uma compreensão mais profunda dos mesmos, desenvolvendo tanto o pensamento combinatório quanto a argumentação. No entanto, a autora salienta que uma das maiores dificuldades enfrentadas pelos alunos, diz respeito à identificação do tipo de agrupamento, ou seja, se a ordem é importante ou não.

Ao fim da pesquisa, a autora notou que houve um significativo crescimento na compreensão dos conceitos e na resolução de problemas combinatórios, no qual a comunicação matemática foi fundamental para os bons resultados da proposta. Além disso, os dados da pesquisa sugerem que as discussões em pequenos e grandes grupos, quando realizadas de modo organizado e mediadas pelo professor, em um clima de respeito mútuo e estímulo à argumentação, trazem contribuições para o desenvolvimento do pensamento combinatório.

É importante destacar que uma das preocupações que norteou o seu trabalho em sala de aula, foi a possibilidade de contribuir de modo efetivo para a melhoria do ensino e da aprendizagem de Análise Combinatória. Assim a proposta de ensino construída gerou um produto educacional direcionado aos professores de Matemática – um livreto com a descrição completa e comentada das atividades realizadas.

A terceira pesquisa que analisamos é de mestrado, concluída em 2010, na Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, da autora Analucia Castro Pimenta de Souza, que tem como título: *“Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas”*.

A autora destaca inicialmente que o seu interesse pela Matemática ocorreu desde a Educação Básica. Diante disso ela cursou Bacharelado e Licenciatura em Matemática, com o objetivo de aprofundar o conhecimento. No entanto, a autora ressalva que o seu interesse pela Educação Matemática surgiu com as dificuldades encontradas ao ministrar suas primeiras aulas. Assim, ela notou que era necessário um respaldo teórico e metodológico que pudessem contribuir para sua formação docente, proporcionando uma aprendizagem com significado e uma metodologia de ensino diferente da tradicional.

A autora salienta sua dificuldade na compressão dos conceitos relacionado à Análise Combinatória, visto que os professores que fizeram parte de sua formação básica, insistiam em um trabalho em sala de acordo com o modelo fórmula-aplicação, no qual as fórmulas não eram

entendidas por ela. Com isso, a pesquisadora propõe uma abordagem alternativa que conduza os alunos a investigar e construir os conceitos relativos à combinatória.

Deste modo, a autora fez um curso de Especialização em Educação Matemática e participou do GTERP (Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas) Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da UNESP de Rio Claro/SP, onde conheceu uma metodologia de ensino alternativa.

A autora desenvolveu uma monografia com o tema: “Análise Combinatória”, destacando que este sempre foi um conteúdo em que encontrava dificuldade, não conseguindo associar as fórmulas que se lhe apresentavam com os conceitos pertinentes a esse tópico matemático.

No mestrado, ela resolveu dar continuidade ao trabalho, realizando uma pesquisa como o mesmo tema, adotando como metodologia de trabalho para a sala de aula, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

O objetivo central da pesquisa foi trabalhar a Análise Combinatória na sala de aula com os alunos, adotando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas.

Para fundamentação teórica em relação à Combinatória, a autora destaca algumas ideias de: Dossey (1991); Framework (1992); Gardiner; (1991); Morgado et al (1991); Domingues (1993); PCN-EM (Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio – Matemática). Em relação à Resolução de problemas; temos: Polya (1962); Van de Walle (2001); Dante (1989); Onuchic (1999); Gazire (1988); Schroeder & Lester (1989); Onuchic (2004); Jinfa Cai (2003) e o uso de documentos do NCTM – National Council of Teachers of Mathematics – USA (Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos).

A autora aponta que os problemas iniciais podem ser elaborados com poucos elementos, através da solução intuitiva e da contagem direta, para destacar quantas e quais são as possibilidades nesse tipo de abordagem. Deste modo, os alunos vão observar que em alguns casos a contagem direta é impraticável, assim vão perceber certas regularidades para desenvolverem técnicas de contagem apropriadas, que generalizem as soluções. Para ela, eles perceberão que, ao contar ou fazer os agrupamentos através das técnicas de contagem, estes se diferenciam pela ordem e/ou pela natureza dos elementos dados no problema e entenderão a necessidade do uso de fórmulas, chegando à solução de modo mais rápido quando o número de elementos envolvidos nos agrupamentos for grande.

Durante a pesquisa, a autora enfatiza que considera importante trabalhar os seguintes conceitos: padrão; contagem; Princípio Fundamental de Contagem (ou Princípio Multiplicativo); permutação; combinação e arranjo.

A autora destaca, em sua investigação, a Matemática Discreta como um ramo da matemática do qual a Análise Combinatória faz parte, no qual ela percebeu o desconhecimento desse ramo matemático no nosso meio acadêmico. Ela destaca o que é Matemática Discreta, fala sobre sua importância, sua forma de ensino e de quando se deu sua inserção no currículo da matemática escolar.

A pesquisadora criou três projetos, adotando, para os três, esta Metodologia, no qual ela assumiu três posturas diferentes: como uma professora-pesquisadora, trabalhando em sua própria sala de aula, com seus próprios alunos; como uma pesquisadora, ministrando minicursos e oficinas de trabalho, em encontros de Educação Matemática, com professores, educadores matemáticos e alunos da Licenciatura em Matemática; e como uma pesquisadora que se apresentasse, em Congressos e Encontros de Educação Matemática, oferecendo suas próprias pesquisas, para conhecimento e divulgação delas, a outros pesquisadores, para discussão e análise.

Para o desenvolvimento da pesquisa, Souza (2010) adotou o modelo metodológico, apresentada por Thomas A. Romberg em seu artigo, de 1992, intitulado: “Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa”. Romberg descreve dez atividades, organizadas em um fluxograma, que são distribuídas em três blocos: o primeiro bloco trata da identificação do problema, formado por quatro atividades: Identificar um Fenômeno de Interesse; Construir um Modelo Preliminar; Relacionar o Fenômeno de Interesse e o Modelo Preliminar com ideias de outros pesquisadores; e Levantar uma Pergunta ou conjectura. O segundo bloco propõe-se a resolver o problema levantado na pesquisa nele se tem duas atividades: Selecionar uma Estratégia Geral e Selecionar um Procedimento Geral de pesquisa. O terceiro e último bloco, trata da análise das informações obtidas, buscando tudo o que ficou evidente frente à questão ou conjectura levantada, terminando com as seguintes atividades: Coletar informações; Interpretar as informações coletadas; Transmitir os resultados para outros; e Antecipar a ação de outros.

A autora evidenciou, nos três projetos, que o trabalho em sala de aula, adotando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, proporcionou aos alunos uma aprendizagem com significado e compreensão. Ela destaca que essa metodologia é um meio de se aprender Matemática ao longo da resolução de problemas.

Souza (2010) também fez uma análise de doze livros didáticos, dispostos em ordem cronológica: livros das décadas de 40, 50, 60, 70, 90 e anos 2000. A autora adotou alguns critérios para análise dos livros, tais como: 1) Se ao trabalhar Análise Combinatória os autores partem ou não de problemas; 2) Se o livro didático motiva e sugere um trabalho colaborativo com os alunos; 3) Se a formalização dos conceitos de Análise Combinatória é feita antes do problema dado, durante a resolução do problema ou depois do problema resolvido; 4) Se o livro é um dos recursos didáticos que pode contribuir para o trabalho do professor em sala de aula.

A pesquisadora evidenciou que a maioria dos livros apresenta Análise Combinatória no modo tradicional de ensino. Ela enfatiza que, de início, os conceitos são definidos pelo professor, seguidos de alguns exemplos e com uma possível aplicação num problema a ser resolvido pelo professor, não permitindo a participação dos alunos na construção desses conceitos, uma vez que os problemas para os alunos resolverem são oferecidos somente no final do capítulo. Além disso, antes de um problema ser colocado para os alunos, a matemática necessária para resolvê-lo já é trabalhada pelo professor, com a apresentação das fórmulas para posterior aplicação, tendo o ensino totalmente centrado no professor.

A autora elaborou um questionário exploratório, para entrevistar um professor de matemática, atuante no Ensino Médio, efetivo na rede pública de ensino do Estado de São Paulo, com o intuito de coletar outras informações que, posteriormente, poderiam contribuir com a análise feita nos projetos, possibilitando a articulação entre os pressupostos teóricos do estudo. Ela destaca que os objetivos dessa entrevista eram o de evidenciar a importância do ensino de Análise Combinatória; descrever como esse conteúdo é trabalhado pelo professor e poder identificar as principais dificuldades que professor e alunos enfrentam ao trabalhar esse tópico matemático.

A autora afirma ter percebido que o professor trabalha o conteúdo Análise Combinatória para depois resolver problemas, e não através da resolução de problemas, enfatizando a aplicabilidade dos conceitos.

Para a autora, o trabalho em sala de aula nessa metodologia, possibilitou que os alunos utilizassem diversas estratégias como representações, através de tabelas, diagramas e listas organizadas. Essas ideias contribuíram para a construção dos conceitos envolvidos em Análise Combinatória. Ela afirma que mostrar o raciocínio combinatório, explorar o processo de contagem e o conceito de padrão foram passos importantes para a construção dos conceitos envolvidos em Análise Combinatória.

Ao fim da pesquisa, a autora destaca que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, trabalhando com Análise

Combinatória, contribuiu para um trabalho significativo tanto para os alunos como para o professor.

Para ela, a metodologia de ensino adotada propiciou, aos alunos, a participação na construção dos conceitos de Análise Combinatória ao resolver um problema, como também proporcionou, aos participantes, o crescimento da aprendizagem.

Além disso, ela ressalta que a sua pesquisa pode colaborar para a formação do professor que, ao ler o seu trabalho, pode refletir sobre o que ocorreu além da sala de aula ao se trabalhar Análise Combinatória e, com sua prática, buscar um trabalho diferenciado.

O último trabalho analisado é do autor: Adeilson Pereira da Silva, com título: *“Ensino-aprendizagem de análise combinatória através da resolução de problemas com um olhar para a sala de aula”*, apresentado em 2013 como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática na Universidade Estadual da Paraíba – UEPB.

A pesquisa de Silva (2013) buscou traçar um mapeamento do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória através da prática em sala de aula, cuja metodologia empregada de ensino-aprendizagem remeteu à resolução e exploração de problemas.

O autor afirma que suas pretensões com a pesquisa foi uma mudança em sua própria prática docente, como também avançar o campo da educação matemática no que diz respeito ao ensino-aprendizagem de Análise Combinatória em sala de aula.

A Metodologia de pesquisa é de cunho qualitativo, fazendo uso de observações, registros das aulas e materiais utilizados pelos alunos, na modalidade pesquisa pedagógica, que valoriza um olhar reflexivo para sua própria prática como professor-pesquisador.

O autor traz uma revisão de literatura fazendo o mapeamento das pesquisas de Sturm (1999), Esteves (2001), Sabo (2007), Souza (2010). A revisão de literatura apresenta uma breve descrição de algumas pesquisas que foram direcionadas para o Ensino Médio ou com profunda análise nas estruturas e organização do currículo de Análise Combinatória.

Ao fim da revisão de literatura, o autor destaca o delineamento da aula de Análise Combinatória traçado a partir das pesquisas. Ele percebeu que é dada uma ênfase em exercícios repetitivos sem compreensão dos métodos empregados.

Por outro lado, as pesquisas também indicam uma tentativa de mudança do atual panorama, colocando, como foco principal, o desenvolvimento do pensamento combinatório. Para fazer isso, deve valorizar a utilização de estratégias como o esquema da árvore das possibilidades, o Princípio Fundamental da Contagem, entre outros, desenvolvendo no aluno a formalização dos conceitos a partir de um caminho intuitivo.

Nesse sentido Silva (2013) aponta como necessidade para os estudos em Análise Combinatória, o desenvolvimento de resolução/exploração de problemas como meio de propiciar melhor compreensão dos processos.

Para o autor, uma proposta de ensino pautada na exploração/resolução de problemas, é comum partir-se da exploração da criatividade do estudante fazendo uso de atividades concretas, jogos, TICs, entre outros meios. O fato é que não há uma negação das fórmulas, mas estas são resultados do processo de compreensão dos estudantes e da generalização no processo de resolução de problemas.

Nesse sentido, o autor destaca que o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, por meio da exploração/resolução de problemas, busca partir de situações-problema, que, num processo de ação-reflexão, medeia o desenvolvimento das ideias e dos conceitos de Arranjo, Permutação e Combinação, enfatizando assim o pensar combinatório como uma ferramenta essencial na abstração e formalização de conceitos científicos.

Em relação ao referencial teórico a respeito do Conteúdo de Análise Combinatória, o autor traz algumas recomendações dos documentos oficiais, Morgado et al (1991) e Dossey (1991) que apresentam Análise Combinatória no campo da Matemática Discreta.

A pesquisa foi realizada em uma escola pública localizada na região de Casa Amarela, Recife-PE, em uma turma da 2ª série do Ensino Médio. A escolha da instituição deve-se ao fato de o professor-pesquisador trabalhar nela e ser o professor da turma. Foram 11 encontros, totalizando vinte duas aulas com duração de 50 minutos cada. Os problemas selecionados traziam diversos conceitos e ideias de Análise Combinatória, abordando noções e ideias do Princípio Fundamental de Contagem, Arranjo, Permutação e Combinação, assim como Fatorial de um número Natural.

O autor destaca dificuldades encontradas durante sua intervenção, tais como; a distinção entre problemas de Arranjo e de Combinação, o que acarreta o fato de não se perceber, na compreensão do problema, por parte dos alunos, se a ordem dos elementos no agrupamento é pertinente ou não na contagem.

De acordo com o autor, a pesquisa traz contribuições para o conteúdo de Análise Combinatória e para uma melhor compreensão do uso da resolução de problemas em sala de aula, como metodologia de ensino-aprendizagem.

O autor salienta que a Resolução de problemas tem sido utilizada com diferentes interpretações, no entanto, durante sua abordagem em sala de aula, ocorreu na concepção ensino-aprendizagem através da resolução de problemas, propondo um ambiente em que o aluno aprende Matemática resolvendo problemas, no qual é valorizado o diálogo entre a tríade

professor-problema-aluno. Além disso, com a finalidade de uma formação conceitual sólida foi trabalhada com a exploração de situações que vão além da simples busca por respostas.

Ao fim do trabalho, o autor aponta alguns caminhos que podem ser trilhados no ensino-aprendizagem da Combinatória, apontando que podem ser trabalhados problemas voltados para questões do mundo social, com problemas envolvendo jogo do bicho, bingo, loteria esportiva, problemas modelados do social etc, sem perder o foco da aprendizagem dos conceitos.

O autor aponta a importância de pesquisas com o cotidiano da sala de aula, que implicam um olhar crítico sobre ela, na qual se busca pensar na formação do professor. Para ele, é imprescindível o diálogo entre a experiência e a própria pesquisa ou a pesquisa de colegas, na medida em que possibilita serem vivenciadas experiências bem sucedidas adaptadas para própria realidade.

Desse modo, o autor salienta que são necessárias investigações e pesquisas em sala de aula, na tentativa de unir a experiência do professor e o saber formado na academia que, por diversas vezes, se apresenta desconectado ou não recebe a devida atenção no cotidiano da sala de aula.

Conforme o autor, sua pesquisa contribui para a discussão do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, tendo implicações na formação, inicial e continuada de professores, apontando considerações e reflexões, resultado de um olhar voltado para a sala de aula, a partir de uma intervenção focada na metodologia de resolução de problemas.

O autor conclui o trabalho afirmando que a resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem possibilita, no mínimo, uma formação crítica e questionadora, provocando a autonomia do aluno nesse processo. Para ele, a pesquisa levou a compreender como os alunos aprendem a ser bons solucionadores de problemas e como se dá o processo de ensino-aprendizagem por meio da sua resolução. O quadro 1, a seguir apresenta um resumo das pesquisas analisadas.

Quadro 01 – Resumo das pesquisas analisadas

AUTOR-ANO	OBJETIVO CENTRAL	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	METODOLOGIA EM SALA DE AULA
VARGAS, Antônio Fernando (2009).	Propor e avaliar o ensino-aprendizagem, com uma sequência didática, de Análise Combinatória, através da resolução de problemas usando atividades investigativas.	Resolução de Problemas: Polya (1995), Gazire (1989), Andrade (1998), Bicudo (1999). Atividades Investigativa: Ponte (2003).	Resolução de problemas; Sequência didática.
ALMEIDA, Adriana Luziê de (2010).	Investigar o potencial da Comunicação Matemática em uma proposta de Análise Combinatória, construída com base na resolução	Ideias sobre a Combinatória: documentos oficiais. Comunicação e Comunicação Matemática: Menezes (1999),	Elaboração e aplicação de uma proposta de ensino-

	de situações-problema, para alunos do 2º ano do Ensino Médio.	Martinho (2007) e D'Antonio (2006). Argumentação nas aulas de Matemática: Yackel e Cobb (1996) e Boavida (2005b).	aprendizagem da Combinatória por meio da Comunicação Matemática com base na resolução de situações-problema.
SOUZA, Analucia Castro Pimenta de (2010).	Trabalhar a Análise Combinatória na sala de aula com os alunos, adotando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas.	Ideias sobre a Combinatória: Morgado et al (1991), Domingues (1993), PCN-EM (Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio – Matemática), as Propostas Curriculares do Estado de São Paulo, de 1989 (2ª edição) e de 2008. Matemática Discreta: Dossey (1991), Framework (1992), Gardiner (1991). Resolução de problemas: Polya (1962), Van de Walle (2001), Dante (1989), Onuchic (1999), Gazire (1988), Schroeder & Lester (1989), Onuchic (2004), Jinfa Cai (2003) e o uso de documentos do NCTM – National Council of Teachers of Mathematics – USA (Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos).	Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.
SILVA, Adelson Pereira da (2013).	Traçar um mapeamento do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, através da prática em sala de aula, utilizando como metodologia de ensino-aprendizagem a resolução e exploração de problemas.	Análise Combinatória: documentos oficiais. Matemática Discreta: Dossey (1991) e Morgado et al (1991). Pesquisa no cotidiano: Esteban (2003).	Resolução e exploração de problemas; Pesquisa pedagógica.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Fazendo uma análise geral das pesquisas que foram apresentadas, notamos que todas elas estão voltadas para uma abordagem em sala de aula, contemplando a preocupação com ensino-aprendizagem da Combinatória. No entanto, a pesquisa de Souza (2010) também traz algumas reflexões sobre livro didático, além de uma entrevista com um professor do Ensino Médio.

As pesquisas que foram desenvolvidas em sala de aula tiveram como público alvo turmas do 2º do Ensino Médio. No entanto, é relevante destacar que a Análise Combinatória deve ser trabalhada durante o Ensino Fundamental, para que os estudantes possam apreender conceitos matemáticos que vão contribuir para construção do raciocínio combinatório e

consequentemente preparar para sua abordagem no Ensino Médio.

Nesse sentido, os PCN (BRASIL, 1997) apontam que no decorrer do 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental os alunos devem ser levados a desenvolver a familiarização com a contagem de agrupamentos, de maneira informal e direta, fazendo, por exemplo, uma lista de todos os agrupamentos possíveis para depois contá-los. Enquanto, para o 3º e para o 4º ciclo, ressaltam a relevância dos problemas de contagem, cujo o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades.

As pesquisas de Vargas (2009), Almeida (2010), Souza (2010) e Silva (2013), destacam que o ensino de Análise Combinatória pode ocorrer através de atividades investigativas, Comunicação Matemática, Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da resolução de problemas e Resolução/exploração de problemas. Os pesquisadores evidenciaram que estas propostas foram eficazes no que diz respeito ao processo ensino-aprendizagem.

A finalidade da pesquisa de Vargas (2009) era apresentar uma nova metodologia para o ensino-aprendizagem do conteúdo de Análise Combinatória através da Resolução de Problemas com Atividades Investigativas.

Em sua intervenção em sala de aula com a utilização de atividades investigativas, o autor utilizou, como Metodologia, a Resolução de Problemas, enfatizando as ideias de Polya (1995) sobre as quatro fases para resolver um problema.

Concordamos com Vargas (2009) ao afirmar que a Resolução de problemas, para o ensino-aprendizado de Análise Combinatória, se destaca como uma metodologia eficaz para a distinção dos agrupamentos combinatórios (Arranjos e Combinações), que é o princípio fundamental para o domínio deste conteúdo.

Os PCN+ sugerem que um trabalho em sala de aula de Análise Combinatória, pode ocorrer pela resolução de problemas ao afirmar: “Esse conteúdo devem ter maior espaço e empenho de trabalho no Ensino Médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril” (BRASIL, 2002, p. 127). Isso é fácil perceber pela espontaneidade em formular problemas de Combinatória, uma vez que é comum notar como eles estão presentes nos afazeres cotidiano dos alunos.

A pesquisa de Souza (2010) também tem o problema como o ponto de partida para chegar à formalização de um novo conceito e conteúdo. A autora trabalhou com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de problemas. O

trabalho em sala de aula nesta perspectiva, permite uma discussão de elementos essenciais no ambiente escolar. Na verdade, a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação, quer dizer que estes três elementos ocorrem simultaneamente. Assim o professor ensina e o aluno – agindo como sujeito em ação – aprende. A avaliação ocorre por ambas as partes, pois o aluno reflete sobre o seu fazer, levando-o à construção do conhecimento matemático. Enquanto o professor avalia todo o processo, fazendo uma análise dos resultados obtidos, como também reorientando caso for necessário.

A pesquisa de Souza (2010) aponta a necessidade de fazer uma entrevista com o professor do Ensino Médio, com o intuito de conhecer outro ponto de vista sobre o tema proposto em sua pesquisa, de tal forma que posteriormente a ajudasse na análise feita nos projetos. Era necessário que o professor entrevistado não conhecesse a metodologia utilizada pela pesquisadora durante sua intervenção em sala de aula.

A pesquisa de Almeida (2010) consistiu em um estudo sobre pensamento combinatório e comunicação matemática para construir uma proposta de ensino de Análise Combinatória. A autora concorda que a utilização de situações-problema pode contribuir para a aprendizagem de Análise Combinatória, no entanto, para que se tivesse um ensino eficaz não bastaria apenas construir suas próprias estratégias, mas também seria necessária a comunicação e discussão em pequenos grupos e da troca de experiências entre o professor e seus alunos ou entre os próprios alunos. É claro para nós que essas ideias são importantes, desse modo durante a nossa ação pedagógica ficaremos atentos em como essas ideias poderão favorecer o ensino-aprendizagem da Combinatória.

Na verdade, a própria autora destaca que existem diversas abordagens que privilegiam determinados tipos de comunicação que buscam contribuir com o processo de ensino e aprendizagem, no qual ela cita como exemplo a Metodologia Resolução de Problemas.

As pesquisas de Vargas (2009), Almeida (2010) e Silva (2013) atingiram o objetivo esperado, porém os autores destacaram que mesmo as propostas obtendo resultados significativos, os alunos ainda mostraram dificuldade na distinção dos problemas de arranjo e combinação. Os autores apontam que é necessário dar ênfase a um trabalho que valorize a construção do raciocínio combinatório.

Para Borba (2010, p.3) o *raciocínio combinatório* é,

[...] entendido como um modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se agrupar os elementos dos mesmos, de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis.

Em contrapartida, os PCN+ (BRASIL, 2002), dizem que o raciocínio combinatório é uma forma de pensamento matemático que consiste em decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis. Para este documento, esta nova forma de pensar em Matemática não deve ser aprendida como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação.

Desta forma, em todos os trabalhos os pesquisadores apontaram a necessidade de valorizar estratégias que contribuíssem para essa forma de pensamento matemático. Eles destacaram a árvore de possibilidade, a enumeração dos agrupamentos, a utilização de tabelas, o Princípio Fundamental da Contagem, desenhos, dentre outras.

Souza (2010) recomenda que os primeiros problemas devem conter uma quantidade relativamente pequena de agrupamentos, para que os alunos possam listar e contar todas eles, utilizando as estratégias mencionadas acima que desenvolvem o raciocínio combinatório, e posteriormente os alunos vão perceber que nem sempre vão poder recorrer a estas estratégias, com isso vem a necessidade da compreensão das fórmulas.

Para que o aluno consiga apreender as ideias iniciais da Combinatória, é necessário que os problemas propostos possam ser resolvidos pela contagem direta, ou seja, fazendo lista dos possíveis agrupamentos. De acordo com os PCN (BRASIL, 1998, p. 137),

A resolução de problemas de contagem [...] coloca o aluno diante de situações em que é necessário agrupar objetos, em diferentes quantidades, caracterizando os agrupamentos feitos. Ao tentar solucionar essas situações, ele poderá aperfeiçoar a maneira de contar os agrupamentos e desenvolver, assim, o raciocínio combinatório. Conseqüentemente, poderá desenvolver maior segurança e criatividade para enfrentar situações-problema de caráter aleatório, que dependem de uma contagem sistematizada, e dispor de uma ferramenta útil e motivadora para a aprendizagem da probabilidade e da estatística.

Com isso, a escolha dos problemas que iremos trabalhar em sala de aula permitem que os alunos recorram a estas estratégias, valorizando outro aspecto de um problema matemático, que é o de possuir diversas formas de resolução.

A pesquisa de Souza (2010) trabalhou com alunos em sala de aula, professores e graduandos em uma oficina, além de estar divulgando suas pesquisas para pesquisadores em congressos. Nesse sentido, a autora ressalta que a sua pesquisa pode colaborar para a formação do professor que, ao ler este trabalho, pode refletir sobre o que ocorreu além da sala de aula ao se trabalhar Análise Combinatória e, com sua prática, buscar um trabalho diferenciado. Ela refletiu que uma nova pesquisa poderia trabalhar com mais profundidade para promover a

formação do professor.

Portanto, nota-se que o foco central das pesquisas já desenvolvidas tem sido para a sala de aula e para a resolução de problemas. Mesmo assim percebe-se pouca compreensão sobre o Ensino de Análise Combinatória na sala de aula, diante das dificuldades encontradas pelos alunos neste tópico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao fazermos o mapeamento de algumas pesquisas e após realizarmos leituras acerca do estudo de Combinatória, podemos destacar algumas ideias relacionadas ao ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, tais como:

- A Análise Combinatória deve ser trabalhada no Ensino Fundamental;
- O ponto de partida deste tópico deve ocorrer a partir do Princípio Fundamental da Contagem, e mais adiante ele tem um papel importante na compreensão das fórmulas;
- A proposta de trabalho em sala de aula da Combinatória pode ocorrer perto da perspectiva da resolução de problemas, com o intuito de se evitar a teorização excessiva e estéril;
- Devem ser trabalhados problemas que levam o aluno à elaboração de estratégias que vão em direção à construção do raciocínio combinatório;
- As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório, deste modo, é preciso dar ênfase a mecanismos que leva a compreensão das mesmas;
- É preciso encorajar os alunos na busca de estratégias tais como: a construção da árvore de possibilidades, tabelas, enumeração de todas as possibilidades, desenhos e o Princípio Fundamental da Contagem;
- Algumas das dificuldades encontradas no ensino-aprendizagem da Combinatória dizem respeito à distinção dos tipos de agrupamentos, ou seja, se é arranjo, permutação ou combinação;
- A Combinatória não deve ser encarada apenas como uma ferramenta para Probabilidade e Estatística, mas como um importante tópico da Matemática que desenvolve uma forma de pensamento matemático (raciocínio combinatório).

Desse modo, as pesquisas desenvolvidas no cotidiano de sala de aula conseguem dar forma aos conteúdos que estão sendo trabalhados. Com isso, a participação do professor que acumula atribuições de profissional da educação e de pesquisador da educação matemática nas discussões que envolvem ensino-aprendizagem, consegue dar uma nova compreensão à matemática que é ensinada aos alunos.

Assim, as pesquisadas analisadas contribuem para a formação dos professores que ensinam Matemática, visto que os resultados podem fazer com que os docentes reflitam sobre suas práticas, na medida em que é promovida uma substancial melhora das ações didáticas em sala de aula.

As experiências que foram vivenciadas em sala de aula proporcionaram um diálogo entre a teoria e a prática, trazendo reflexões sobre como os alunos mobilizam seus conhecimentos no estudo da Combinatória, a partir de abordagens inovadoras, tais como: Atividades investigativas (VARGAS, 2009), Comunicação Matemática (ALMEIDA, 2010), Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da resolução de problemas (SOUZA, 2010) e Resolução/exploração de problemas (SILVA, 2013).

Durante a pesquisa, algumas ideias foram tomando forma e apontamos a possibilidade de direcionamentos para futuras pesquisas de Análise Combinatória. O apontamento para novas pesquisas, surge da necessidade de se trabalhar – de forma mais efetiva – alguns dos conceitos deste tópico no Ensino Fundamental. Assim, pode-se realizar uma entrevista, com professores do Ensino Fundamental, objetivando conhecer as suas dificuldades para ministrar aulas sobre os conceitos iniciais de Análise Combinatória, e, posteriormente, construir junto com os professores uma proposta didática que possam ajudar a superar estas dificuldades.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. L. de. **Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática: um estudo de caso com o 2º ano do ensino médio.** 2010. 166p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

BORBA, R. **O Raciocínio Combinatório na Educação Básica.** In: **Anais...** do X Encontro Nacional de Educação Matemática. Bahia, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática: 1º e 2º ciclos.** Brasília, DF: MEC, 1997.

_____. Ministério da Educação e dos Desportos. Secretaria do Ensino Fundamental **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, 3º e 4º ciclos (5º a 8º séries)** – Brasília: MEC/SEF, 1998.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** Brasília, DF: MEC, 2002.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

SILVA, A.P. **Ensino e Aprendizagem de Análise Combinatória Através da Resolução de Problemas: um olhar para a sala de aula.** (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). UEPB, Campina Grande, Paraíba, 2013.

SOUZA, A.C.P. de **Análise Combinatória no Ensino Médio apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas,**2010. 343 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) UNESP – Rio Claro.

VARGAS, A.F. **O Ensino-aprendizagem de Análise Combinatória através da Resolução de Problemas com Atividades Investigativas.** Dissertação de Mestrado. PUC-MG – Belo Horizonte, 2009.