10.46943/VII.CONAPESC.2022.01.084

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS DE EDOS DE PRIMEIRA ORDEM POR MEIO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

CARLOS LISBOA DUARTE

Mestrando do Curso de Modelagem Matemática e Computacional da Universidade Federal da Paraíba- UFPB, carlos_lisboatf@hotmail.com;

PATRÍCIO LUIZ DE ANDRADE

Professor orientador: Doutorando pelo Curso de Tecnologias Energéticas e Nucleares da Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, Instituto Federal da Paraíba – IFPB, patricio.andrade@ifpb.edu.br;

RESUMO

O presente trabalho objetiva apresentar de forma simplificada e didática, a resolução de sistemas lineares homogêneos de EDOs de primeira ordem com coeficientes constantes, fazendo, para isso, a aplicação dos conceitos de autovalores e autovetores para encontrar de forma analítica, quando possível, a solução geral que irá satisfazer tais sistemas em um intervalo I. No que tange aos procedimentos metodológicos aplicados na construção do referido trabalho, podemos evidenciar que a pesquisa se deu por meio de uma revisão bibliográfica pautada nos estudos de autores como: Boyce e DiPrima, Zill e Cullen, Sotomayor entre outros. Além disso, no decorrer do trabalho apresentamos, de forma detalhada, o processo de transformação de uma equação diferencial linear de ordem n em um sistema de n equações diferenciais lineares de primeira ordem, pois, em muitos casos, se torna mais simples resolver um sistema linear de equações diferenciais de primeira ordem, ao invés de uma equação diferencial de grau n maior que 1. Em seguida, descrevemos todo o processo empregado para resolver tais sistemas, desde a obtenção dos autovalores provindos da equação característica da matriz dos coeficientes do sistema, até a construção dos autovetores que irão compor a solução geral do sistema, juntamente com os seus respectivos autovalores. E por fim, tecemos algumas conclusões acerca da análise qualitativa e da estabilidade de sistemas lineares homogêneos de EDOs para o caso bidimensional, isto é, para sistemas que apresentam dois autovalores. Nessa análise procuramos descrever os possíveis comportamentos que esses sistemas podem apresentar do ponto de vista da estabilidade, ou seja, se teremos um sistema estável, instável ou assin-

toticamente estável, analisando, para isso, os sinais dos autovalores obtidos. E para que possamos visualizar melhor esses resultados, foi feita a construção dos retratos de fase de sistemas lineares de EDOs que apresentam esses casos de estabilidade.

Palavras-chave: Sistemas Lineares de EDOs, Autovalores, Autovetores, Análise Qualitativa.

INTRODUÇÃO

Este artigo visa descrever a resolução de sistemas lineares homogêneos de Equações Diferencias Ordinárias (EDOs) de primeira ordem, com coeficientes constantes por meio de autovalores e autovetores. Esse método pode ser aplicado para encontrar as soluções de EDOs lineares homogêneas de ordem n, visto que por mais alto que seja o grau de uma EDO linear sempre é possível reduzi-la a um sistema linear de n-equações diferenciais de primeira ordem, por meio de substituições adequadas. Assim sendo, o grau da EDO determinará a quantidade de equações diferenciais de primeira ordem que irão compor o sistema, de modo que, uma EDO de terceira ordem, por exemplo, irá ser reduzida a um sistema de três equações diferenciais de primeira ordem.

Por meio da representação de um sistema linear homogêneo de EDOs na forma matricial, por meio dos seus coeficientes, podemos fazer o uso de alguns conceitos da álgebra linear para encontrarmos as soluções desses sistemas, através do método dos autovalores e autovetores. Sendo assim, quando a matriz obtida por meio dos coeficientes de um sistema linear for diagonalizável, será possível obter uma base de autovetores Linearmente Independentes (L.I) associados aos autovalores desta matriz (LAWSON, 1997). Então, neste caso poderemos construir de modo direto uma solução geral para um dado sistema linear de EDOs de primeira ordem.

Além do mais, a utilização do método dos autovalores na resolução de tais sistemas, fornecem informações importantes acerca do comportamento de sistemas lineares homogêneos de EDOs de 1ª ordem, visto que a análise qualitativa desses sistemas, é realizada por meio do estudo dos autovalores provenientes da equação característica do sistema. Essa análise permite entendermos um pouco desses comportamentos, a partir de sua representação gráfica construída através de uma solução geral do sistema, em um dado intervalo para t e atribuindo valores as constantes arbitrárias que compõem a solução geral do sistema.

Diante do exposto, o presente trabalho encontra-se estruturado da seguinte maneira, a saber: no primeiro momento, trazemos um resumo do processo empregado para transformar uma EDO linear de ordem n em sistema de n equações lineares de primeira ordem; no segundo, realizamos uma descrição teórica acerca da resolução desses sistemas, enfatizando o uso do método dos autovalores e autovetores na obtenção de uma solução geral para um dado sistema; no terceiro momento, apresentamos alguns resultados importantes obtidos por meio da análise qualitativa das soluções de sistemas lineares bidimensionais de EDOs; no quarto momento, tecemos algumas considerações finais acerca do estudo.

METODOLOGIA

No que tange aos procedimentos metodológicos para a construção do trabalho, o mesmo se deu por meio de uma revisão bibliográfica pautada nos estudos de especialistas no campo das equações diferenciais ordinárias, proporcionando, assim, a fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento desta pesquisa. Dessa forma, o estudo teve como aporte teórico as contribuições de autores como: Figueiredo e Neves (2015); Sotomayor (2011); Nagle, Saff e Snider (2012) entre outros.

10.46943/VII.CONAPESC.2022.01.084

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Obtenção de um Sistema Linear de EDOs de 1ª Ordem a Partir de uma EDO ou Conjunto de EDOS de Ordem Superior

Uma equação diferencial ordinária é uma equação que envolve uma função desconhecida e suas derivadas ordinárias, de modo que a incógnita é uma função $y(t)$, t é a variável independente e y é a variável dependente.

As EDOs podem ser classificadas quanto a sua *ordem* e *linearidade*, sendo a sua ordem determinada pelo maior grau da derivada de y presente na equação, a linearidade, as EDOs podem ser *lineares* ou *não lineares*, ela é considerada *linear* quando as incógnitas e suas derivadas aparecem de forma linear na equação, isto é, as incógnitas e suas derivadas apresentam unicamente expoentes iguais a 1, além de estarem dispostas na forma de uma soma em que cada parcela é um produto de alguma derivada das incógnitas com uma função que não depende das incógnitas. Caso contrário ela será *não linear*.

A equação diferencial ordinária $y''' + 5y'' - 3y' - 6y = 0$ é um exemplo de EDO linear de ordem 3, pois ela observa o princípio de linearidade evidenciado acima, e a função y possui como maior grau de derivada 3.

Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ \vdots \quad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases} \tag{1}$$

observe que podemos reescrever (1) em termos matriciais, da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Logo, temos que (2) pode ser escrito como

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X} + \boldsymbol{g}(t). \tag{3}$$

Se a função $g(t)$ for identicamente nula em um intervalo I, então o sistema é dito *homogêneo*; caso contrário, ele é *não homogêneo* no intervalo I.

Teorema 1: Se as funções $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ e $g_1, g_2, \dots, g_n$ forem contínuas em um intervalo aberto $I: \alpha < t < \beta$, então existirá uma única solução $x_1 = \theta_1(t), \dots, x_n = \theta_n(t)$ do sistema (1) que também satisfaz as condições iniciais, onde t_0 é qualquer ponto em I e $x_1^0, \dots, x_n^0$ são números dados. Além disso, a solução existe em todo o intervalo I.

Demonstração. ver em (BOYCE; DIPRIMA, 2012). ■

Vamos ilustrar através de alguns exemplos, como transformar uma EDO ou conjunto de EDOs de ordem superior em sistema linear de EDOs de primeira ordem.

Exemplo 1: Escreva a EDO linear a seguir na forma de um sistema EDOs lineares de primeira ordem

$$y''' + 6y'' + 8y' + y = 0$$

Solução:

Para que possamos obter um sistema linear de EDOs de primeira ordem a partir de uma EDO de ordem superior, iremos substituir a variável original da equação por outra de modo que possamos reescrever a EDO, como um sistema de primeira ordem da seguinte maneira

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \\ x_3 = y'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = y' \\ x'_2 = y'' \\ x'_3 = y''' \end{cases}.$$

Assim, isolando a 3ª derivada na equação do problema, teremos o seguinte sistema EDOs lineares de primeira ordem

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ x'_3 = -x_1 - 8x_2 - 6x_3 \end{cases}.$$

□

Exemplo 2: Considerando o sistema de EDOs lineares a seguir, transforme-o em um sistema EDOs lineares de primeira ordem.

$$\begin{cases} y'' - 3y' + y = 1 \\ 4u'' + 2u' - 6u = 2 \end{cases}$$

Solução:

De maneira análoga ao exemplo 1, iremos aplicar as seguintes substituições

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \\ x_3 = u \\ x_4 = u' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = y' \\ x'_2 = y'' \\ x'_3 = u' \\ x'_4 = u'' \end{cases}.$$

Daí, isolando a 2ª derivada em cada uma das equações do sistema inicial do problema, teremos o seguinte sistema EDOs lineares de primeira ordem

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 + 3x_2 + 1 \\ x_3' = x_4 \\ x_4' = \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2} \end{cases}.$$

□

doi 10.46943/VII.CONAPESC.2022.01.084

Construção de uma Solução Geral para um Sistema Linear Homogêneo de EDOs de 1ª Ordem

Como foi evidenciado anteriormente, um fato bastante importante na resolução de sistemas lineares de EDOs de primeira ordem, é a possibilidade de se trabalhar com os coeficientes que compõem o sistema de equações na forma matricial, esse fato nos permite aplicar alguns métodos para a obtenção das soluções de um dado sistema, como é o caso do método dos autovalores e autovetores.

Mas para que possamos compreender como funciona a obtenção dessas soluções, é importante que estejamos familiarizados com alguns conceitos e teoremas que envolvem essa teoria. Dessa forma, vejamos a seguir algumas definições e teoremas pertinentes a prática da resolução de sistema lineares de EDOs de primeira ordem, onde algumas demonstrações e sugestões para provar os mesmos podem ser encontradas nos livros: Equações Diferenciais Elementares e problemas de valores de contorno (BOYCE; DIPRIMA, 2012) e Equações Diferenciais (Nagle; Saff; Snider, 2012).

Definição 1: Um *vetor solução* de um sistema da forma $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}$ em um intervalo *I*, é qualquer matriz coluna

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

cujos elementos são funções diferenciáveis que verificam um sistema linear de *n*-equações de primeira ordem no intervalo *I*.

Dessa forma, segundo (ZILL; CULLEN, 2001) a forma básica de uma solução $\boldsymbol{X}_i$ de um sistema linear de EDOs de primeira ordem é da forma

$$\boldsymbol{X}_i = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} e^{\lambda_i t} = \boldsymbol{V} e^{\lambda_i t},$$

onde $\boldsymbol{V}$ é um autovetor composto por constantes $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ associado a um autovalor λ_i, proveniente da equação característica da matriz **A** associada ao sistema $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

Definição 2: Denomina-se *conjunto fundamental de soluções*, o conjunto formado pelas soluções $\{\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_n\}$ com $n \in \mathbb{N}$, de um sistema linear homogêneo de *n* EDOs de primeira ordem.

Teorema 2: Sejam $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ um conjunto formado por *n* autovalores reais distintos da matriz de coeficientes **A** de um sistema homogêneo, e sejam $\{\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \cdots, \boldsymbol{V}_n\}$ os autovetores

10.46943/VII.CONAPESC.2022.01.084

correspondentes. Então, uma *solução geral* para o sistema homogêneo $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{AX}$ no intervalo $(-\infty, \infty)$ pode ser escrita da forma

$$\boldsymbol{X}(t) = c_1\boldsymbol{V}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\boldsymbol{V}_2e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\boldsymbol{V}_ne^{\lambda_n t}.$$

Demonstração. ver em (BOYCE; DIPRIMA, 2012). ■

O teorema (2) que acabamos de enunciar, trata de um princípio muito importante na teoria dos sistemas lineares de EDOs, no que diz respeito a construção de uma solução geral para um sistema $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}$, conhecido como o *princípio da superposição*. Além disso, o mesmo evidência que um conjunto Linearmente Independente (L.I) formado pelas soluções de um sistema linear homogêneo, pode ser expresso como uma combinação linear dessas soluções, onde $\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$ são constante arbitrárias com $n \in \mathbb{N}$.

Definição 3: Sejam $\{\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_n\}$ soluções L.I do sistema $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{AX}$ formado por *n*-equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, então podemos construir uma *matriz fundamental de soluções* denotada por $\Phi(t)$, na qual cada coluna da matriz corresponderá a uma solução do sistema.

Dessa maneira, uma solução geral obtida a partir de uma matriz fundamental será

$$\boldsymbol{X}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{C},$$

onde $\boldsymbol{C}$ é uma matriz coluna formada por constantes arbitrárias.

Teorema 3: Seja $\Phi(t)$ uma matriz fundamental de um sistema homogêneo em um intervalo *I*. Então $\Phi^{-1}(t)$ existe para todo valor de *t* no intervalo.

Demonstração. ver em (NAGLE; SAFF; SNIDER, 2012). ■

Observação 1: Existirão casos de sistemas envolvendo condições iniciais que irão definir uma determinada solução para um dado sistema. Nestes casos, a matriz fundamental de soluções será denominada de *matriz especial* denotada por $\Psi(t)$.

Exemplo 3: Encontre a solução geral para o sistema linear dado.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y + z. \\ \dfrac{dz}{dt} = \quad 3y - z \end{cases}$$

<u>Solução:</u>

O sistema dado pode ser escrito como

$$\boldsymbol{X}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{X}.$$

Assim, temos que encontrar os autovalores λ e os autovetores $\boldsymbol{V}$ que satisfazem a equação $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{V} = 0$, isto é,

$$\begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & -1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{I}$$

Calculando o determinante de $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$, temos que a equação característica será $-\lambda^3 + 7\lambda + 6 = 0$. A partir da mesma obtemos três raízes que representam os autovalores que são $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = 3$.

Para obtermos os autovetores associados a cada autovalor, iremos aplicar o método de eliminação de Gauss substituindo os autovalores encontrados em (I), obtemos o seguinte conjunto fundamental de soluções

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-2t}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} e^{3t} \right\}.$$

Assim, temos que uma solução geral para o sistema dado é

$$\boldsymbol{X}(t) = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} e^{3t}. \tag{II}$$

E a partir do conjunto fundamental de soluções do sistema, podemos construir uma matriz fundamental da forma

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t} & e^{-2t} & e^{3t} \\ 0 & -e^{-2t} & 4e^{3t} \\ e^{-t} & 3e^{-2t} & 3e^{3t} \end{bmatrix}.$$

A utilização da notação matricial de sistemas lineares de EDOs de primeira ordem, é um método empregado para facilitar a obtenção das soluções do sistema. Dessa forma, podemos reescrever a solução (II) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} x(t) &= -c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t} \\ y(t) &= -c_2 e^{-2t} + 4c_3 e^{3t} \\ z(t) &= c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{-2t} + 3c_3 e^{3t} \end{aligned}.$$

□

Observação 2: Para determinar os autovetores atribuimos valores a $\{v_1, v_2, v_3\}$. Assim, esse valores foram escolhidos de modo conveniente a se obter números inteiros pequenos, quando possível, no entanto qualquer valor real escolhido ainda iria satisfazer as condições para a obtenção do autovetor.

Um ponto a ser mencionado, no que tange a resolução de sistemas lineares homogêneos de EDOs de 1ª ordem nos quais os coeficientes da matriz que o representa são

10.46943/VII.CONAPESC.2022.01.084

constantes reais, é o fato de podermos obter soluções complexas a partir dessa matriz, isto é *autovalores complexos*.

Quando resolvemos problemas envolvendo autovalores complexos, naturalmente podemos esperar que os autovetores associados a esses autovalores possuam valores complexos (FIGUEIREDO; NEVES, 2015). Porém, como na maioria dos casos estamos interessados em obter soluções reais, existe um método no qual é possível transformar uma solução complexa de um sistema linear em uma solução real, fazendo para isso o uso da fórmula de Euler. Então, para uma certa solução $\boldsymbol{X}_i$ complexa, temos o seguinte

$$\boldsymbol{X}_i = (a+bi)e^{(p+qi)t} = (a+bi)e^{pt}e^{qit},$$

onde $(a+bi)$ é um autovetor complexo associado ao autovalor complexo $(p+qi)$, com $a, b, p, q \in \mathbb{R}$.

Então, pela fórmula de Euler

$$e^{iqt} = \cos qt + i\ \text{sen}\, qt,$$

temos que

$$\boldsymbol{X}_i = (a+bi)e^{pt}(\cos qt + i\ \text{sen}\, qt) = (a\cos qt - b\text{sen}\, qt)e^{pt} + i(b\cos qt + a\text{sen}\, qt)e^{pt}$$

ou seja,

$$\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{u}_1(t) + i\boldsymbol{u}_2(t),$$

onde $\boldsymbol{u}_1(t)$ e $\boldsymbol{u}_2(t)$ são vetores que representam soluções reais de um sistema linear homogêneo, ou seja, para cada solução complexa $\boldsymbol{X}_i$ de um sistema, é possível se encontrar duas soluções reais a partir da parte real e imaginária de uma solução complexa, respectivamente.

Observação 3: Vale ressaltar que soluções complexas em sistemas lineares de EDOs de primeira ordem sempre apresentam-se em pares conjugados. Desta forma, basta utilizar apenas uma das soluções complexas para se encontrar as duas soluções reais do sistema.

Como podemos notar, até o presente momento nos atentamos a resolução de sistemas lineares homogêneos de EDOs de primeira ordem, nos quais estamos interessados em obter uma solução geral formada por autovetores (L.I) associados aos autovalores provenientes da equação característica do sistema. Contudo, existem casos em que não é possível obter essa solução de modo direto, devido ao tipo de relação existente entre as multiplicidades dos autovalores de um dado sistema.

Definição 4: Definimos de multiplicidade *algébrica* κ, a quantidade de vezes que um autovalor apresenta-se de forma repetida. Já a multiplicidade *geométrica* η, está ligada ao número de autovetores linearmente independentes que podemos obter a partir de um dado

10.46943/VII.CONAPESC.2022.01.084

autovalor múltiplo.

A expressão que representa a relação existente entre as multiplicidades algébrica e geométrica de um autovalor é a seguinte $1 \leqslant \eta \leqslant \kappa$.

Sendo assim, quando lidamos com problemas em que as soluções da equação característica, ou seja, os autovalores apresentam multiplicidade da forma $\kappa > \eta$, isto é, o número de autovetores L.I é menor que a multiplicidade algébrica do autovalor, nos deparamos com uma situação em que teremos a tarefa de encontrarmos uma solução geral L.I a partir de autovalores múltiplos.

Logo, em casos de sistemas que apresentam essa particularidade, podemos fazer o uso do conceito de *exponencial de matrizes* para, assim, encontrarmos uma solução que satisfaça o sistema. Então, supondo que **A** seja uma matriz $n \times n$ formada por coeficientes constantes, é possível definir a sua exponencial $e^{\boldsymbol{A}t}$ por meio de uma expansão da *série de Maclaurin*, que apresenta a seguinte forma

$$e^{\boldsymbol{A}t} := \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \boldsymbol{A}^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + \boldsymbol{A}^n\frac{t^n}{n!} + \cdots.$$

Teorema 4: Se **A** é uma matriz constante $n \times n$, então as colunas da exponencial da matriz $e^{\boldsymbol{A}t}$, formam um conjunto fundamental de soluções para o sistema $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}$. Portanto, $e^{\boldsymbol{A}t}$ é uma matriz fundamental para o sistema, e a solução geral pode ser escrita como

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{C}.$$

Demonstração. ver em (NAGLE; SAFF; SNIDER, 2012). ■

Entretanto, o cálculo para a obtenção da exponencial de uma matriz, é um método aplicado para se obter a solução de um dado sistema na forma de uma matriz fundamental, independentemente se ele possui autovalores múltiplos ou não, uma vez que esse método pode ser aplicado nos casos de autovalores distintos e complexos.

Contudo, é possível se obter uma matriz fundamental a partir de um conjunto fundamental de soluções, como foi apresentado no Exemplo 3, porém essa matriz em geral não coincide com a matriz fundamental construída por meio do cálculo da exponencial. Todavia, existe um teorema que esclarece essa relação existente entre matrizes fundamentais, como podemos ver a seguir.

Teorema 5: Considere que $\Phi(t)$ e $\Theta(t)$ sejam duas matrizes fundamentais para o mesmo sistema $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}$. Então, existe uma matriz constante $\boldsymbol{C}$ tal que $\Phi(t) = \Theta(t)\boldsymbol{C}$ para todo t. Em particular, podemos obter a exponencial de uma matriz a partir de uma matriz fundamental da seguinte forma

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}.$$

Demonstração. ver em (NAGLE; SAFF; SNIDER, 2012). ■

O caso mais simples de realizar o cálculo da exponencial de uma matriz, é quando a mesma é diagonal. Nessa situação o cálculo é feito de modo direto, isto é, sendo **A** uma matriz diagonal $n \times n$ formada por $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ autovalores em sua diagonal principal, $e^{\boldsymbol{A}t}$ será uma matriz fundamental de soluções onde $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}\}$ irão compor a sua diagonal principal.

Uma outra situação ocorre quando a matriz **A** é *nilpotente*, isto é, $\boldsymbol{A}^k = 0$, onde k é um número inteiro positivo. Assim sendo, teremos que $e^{\boldsymbol{A}t}$ apresentará uma quantidade finita de termos, pois a partir de um certo índice de nilpotência os termos da série irão ser iguais a zero, logo $e^{\boldsymbol{A}t}$ será igual a

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \cdots + \boldsymbol{A}^{k-1}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + 0 + \cdots.$$

Então, como consequência do teorema Cayley-Hamilton, nos casos em que o polinômio característico da matriz **A** for igual a $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^k$, teremos que $(\boldsymbol{A} - \lambda_i\boldsymbol{I})^k = 0$. Logo, quando λ_i for o único autovalor múltiplo de **A**, $(\boldsymbol{A} - \lambda_i\boldsymbol{I})$ será nilpotente. Assim, temos que a exponencial da matriz **A** terá a seguinte forma

$$e^{\boldsymbol{A}t} = e^{\lambda_i \boldsymbol{I}t}e^{(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})t}$$

$$e^{\boldsymbol{A}t} = e^{\lambda_i t}\left[\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{A} - \lambda_i\boldsymbol{I})t + \cdots + (\boldsymbol{A} - \lambda_i\boldsymbol{I})^{k-1}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right]. \quad (4)$$

Portanto, podemos obter uma solução geral para um dado sistema linear homogêneo de EDOs de primeira ordem que apresentam autovalores múltiplos, a partir do cálculo da expressão (4).

Exemplo 4: Encontre uma solução geral para o sistema linear de EDOs

$$\boldsymbol{X}' = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}\boldsymbol{X},$$

na forma de uma matriz fundamental, utilizando para isso o cálculo da exponencial de matrizes $e^{\boldsymbol{A}t}$.

Solução:

Calculando o determinante de $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})$, temos que a equação característica será

$$(\lambda + 1)^2 = 0.$$

A partir da mesma, obtemos duas raízes que representam os autovalores que são $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, ou seja, um autovalor com multiplicidade algébrica 2.

Aplicando o formato da equação 4, teremos o seguinte

10.46943/VII.CONAPESC.2022.01.084

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^2 = 0$$

donde

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}) = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$e^{\boldsymbol{A}t} = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + te^{-t}\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Portanto, teremos que uma solução geral na forma de uma matriz fundamental $e^{\boldsymbol{A}t}$ que irá satisfazer o sistema linear de EDOs dado, é da forma

$$\boldsymbol{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} - 5te^{-t} & 5te^{-t} \\ -5te^{-t} & e^{-t} + 5te^{-t} \end{bmatrix}\boldsymbol{C}.$$

□

Entretanto, existe uma outra maneira para encontramos as soluções associadas a um autovalor múltiplo. Esse método recebe o nome de *método dos autovetores generalizados*, que é definido como se segue.

Definição 5: Supondo que $\boldsymbol{A}$ seja uma matriz $n \times n$, podemos escolher um vetor $\boldsymbol{v}$ tal que

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})^k\boldsymbol{v} = 0,$$

para algum autovalor λ pertencente a **A** e um certo k inteiro positivo. Nesses termos dizemos que $\boldsymbol{v}$ é um autovetor generalizado associado λ. Assim, somos capazes de listar n vetores, associados a matriz $\boldsymbol{A}$, linearmente independentes da seguinte maneira

$$\{\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3, \cdots, \boldsymbol{V}_n\} = \{\boldsymbol{v}, (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}, (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^2\boldsymbol{v}, \cdots, (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^{k-1}\boldsymbol{v}\}.$$

Estes vetores são chamados de *autovetores generalizados* da matriz **A**, associados ao autovalor λ. Além disso, o último vetor desta lista, $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^{k-1}\boldsymbol{v}$, é um autovetor L.I da matriz **A**, ou nesse caso chamado de *autovetor regular*.

Com isso, teremos que

$$\boldsymbol{X}_i = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{v}_i$$

$$e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{v}_i = e^{\lambda\boldsymbol{I}t}e^{(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})t}\boldsymbol{v}_i$$

$$e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{v}_i = e^{\lambda t}\left[\boldsymbol{v}_i + t(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}_i + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^{k-1}\boldsymbol{v}_i\right]. \tag{5}$$

Em suma, teremos que as soluções $\boldsymbol{X}_i = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{v}_i$, serão linearmente independentes, e formarão um conjunto fundamental de soluções para um dado sistema. Desta forma, podemos escrever as soluções $\boldsymbol{X}_i$ na forma de uma matriz fundamental de soluções, a partir dos autovetores generalizados, que irá satisfazer o sistema.

Exemplo 5: Encontre os autovetores generalizados associados ao sistema linear de EDOs,

10.46943/VII.CONAPESC.2022.01.084

$$\boldsymbol{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{X}.$$

Em seguida construa uma solução geral para o sistema na forma de uma matriz fundamental de soluções $\Phi(t)$.

Solução:

Calculando o determinante de $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$, teremos que a equação característica será $-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$. Logo, os autovalores do sistema são $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, ou seja, um autovalor com multiplicidade algébrica 3.

Utilizando a relação (5), teremos que $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})^3 \boldsymbol{v} = 0$. Assim, consideremos o vetor

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

então calculando $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})$ e $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})^2$, teremos que

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$e^{\boldsymbol{A}t} \boldsymbol{v}_1 = e^t \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} e^t \\ 2te^t + t^2 e^t \\ t^2 e^t \end{bmatrix} = \boldsymbol{X}_1,$$

donde

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

formam um conjunto de autovetores generalizados $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ linearmente independentes associados ao autovalor múltiplo $\lambda = 1$, sendo que $\boldsymbol{v}_3$ é um autovetor regular pela definição 5.

Consideremos agora o vetor $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Assim, teremos que

$$e^{\boldsymbol{A}t} \boldsymbol{v}_2 = e^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 2e^t + 2te^t \\ 2te^t \end{bmatrix} = \boldsymbol{X}_2.$$

Por fim, considerando o vetor $\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Teremos que

$$e^{\boldsymbol{A}t} \boldsymbol{v}_3 = e^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 2e^t \\ 2e^t \end{bmatrix} = \boldsymbol{X}_3.$$

10.46943/VII.CONAPESC.2022.01.084

Portanto, temos que uma solução geral na forma de uma matriz fundamental de soluções que irá satisfazer o sistema linear em questão é

$$\boldsymbol{X}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & e^t \\ 2e^t & 2e^t+2te^t & 2te^t+t^2e^t \\ 2e^t & 2te^t & t^2e^t \end{bmatrix}\boldsymbol{C}.$$

□

Observação 4: Como as soluções encontradas são (L.I), e pelo fato da última solução $\boldsymbol{X}_3$ ser construída a partir de um autovetor regular da matriz do sistema, optamos por escrever a matriz fundamental $\Phi(t)$ na ordem $[\boldsymbol{X}_3 \quad \boldsymbol{X}_2 \quad \boldsymbol{X}_1]$.

Introdução a Análise Qualitativa de Sistema Lineares homogêneos de EDOs

Na seção anterior dedicamos nossa atenção ao entendimento da resolução de sistema lineares homogêneos de EDOs, e a partir desses cálculos fomos capazes de construir uma solução geral para um dado sistema, através dos autovalores e autovetores desses sistemas.

Os autovalores e a solução geral de um determinado sistema linear homogêneo de EDOs, oferecem informações extremamente importantes para que possamos compreender um pouco do comportamento desses sistemas, como por exemplo a estabilidade de suas soluções. Desta forma, iremos aqui, apresentar alguns resultados provenientes da análise qualitativa de alguns sistemas lineares homogêneos de EDOs, para isso utilizaremos o software matemático *MATLAB*.

Estabilidade de Sistemas Bidimensionais

No que diz respeito a análise da estabilidade de sistema lineares de EDOs, iremos aqui apresentar alguns resultados a partir do estudo de sistemas homogêneos bidimensionais, ou seja, sistemas da forma

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \tag{6}$$

onde os a_{ij} são coeficientes constantes provindos de uma matriz $\boldsymbol{A}_{n\times n}$, com o $\det \boldsymbol{A} \neq 0$. Assim, temos que o sistema (6) pode ser reescrito como

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{AX}. \tag{7}$$

Temos que cada solução $(x_1(t), x_2(t))$ é na verdade uma curva parametrizada no plano x_1x_2, conhecida como *órbita*, que é simplesmente um conjunto de pontos $\{(x_1(t), x_2(t)) |\, t \in \mathbb{R}\}$, dotado de uma orientação dada pelo sentido do percurso com t crescente, desde $-\infty$ até $+\infty$. Ao representar uma solução no plano x_1x_2 é comum indicar

10.46943/VII.CONAPESC.2022.01.084

com *setas* o sentido desse percurso.

Esboçando algumas órbitas no plano x_1x_2, obtemos o *retrato de fase* do sistema linear homogêneo de equações diferenciais ordinárias, cujo objetivo é dar uma ideia do comportamento global das soluções do sistema, com diferentes condições iniciais (DOERING; LOPES, 2012). O plano x_1x_2 é comumente chamado de *plano de fase*.

Os pontos para os quais o $\boldsymbol{X}' = 0$, ou seja, $\boldsymbol{AX} = 0$, correspondem as soluções de equilíbrio (constantes) para o sistema (7). Essas soluções $(x_1(t), x_2(t)) = (c_1, c_2)$, são denominadas *pontos de equilíbrio* ou *pontos singulares* (também chamados de *singularidades*), nomenclaturas estas inspiradas em seus significados físicos e geométricos, respectivamente. Os pontos não singulares são chamados de *pontos regulares* (SOTOMAYOR, 2011).

Todavia, o comportamento de um conjunto de curvas esboçadas em um plano de fase em relação a um ponto de equilíbrio, é determinado de modo direto pelos autovalores provenientes do cálculo do polinômio característico de um sistema linear de EDOs. A natureza desses autovalores quanto aos seus sinais, é um dos fatores que irão determinar que tipo de singularidade que um sistema irá descrever.

Definição 6: Dado um sistema linear homogêneo da forma $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{AX}$, dizemos que ele é *hiperbólico* quando todos os autovalores obtidos por meio do polinômio característico do sistema, tiverem parte real diferente de zero. Além disso, chamamos de *índice de estabilidade*, o número de autovalores de um sistema, que independente de sua natureza, possuem parte real negativa.

Observação 5: Os autovalores ou valores próprios, como também são conhecidos, podem apresentar-se basicamente das seguintes maneiras:

1. Autovalores distintos de mesmo sinal ou de sinais diferentes;
2. Autovalores complexos puro, ou seja, com a parte real nula e complexos com parte real variando de sinal;
3. Autovalores com multiplicidade.

Dessa forma, a partir da observação dos autovalores somos capazes de ter uma noção do tipo de estabilidade que um dado sistema apresenta.

1. Caso dos Autovalores Distintos

Suponha que o polinômio característico da matriz **A** tenha duas raízes reais distintas λ_1 e λ_2, e sejam $\boldsymbol{V}_1$ e $\boldsymbol{V}_2$ os autovetores associados a esses autovalores. Denotaremos por r_1 e

10.46943/VII.CONAPESC.2022.01.084

r_2 as retas geradas pelos autovetores V_1 e V_2, respectivamente.

Neste caso, sabemos que a solução geral do sistema bidimensional $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, pode ser escrita na forma

$$\boldsymbol{X}(t) = c_1 \boldsymbol{V}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{V}_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{8}$$

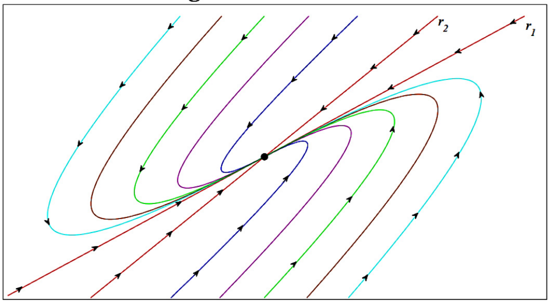
Daí, temos as seguintes situações de comportamentos e estabilidades

I. Se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$. Segue que independentemente da condição inicial (não nula), toda trajetória tende a origem do plano x_1x_2, quando $t \to +\infty$, e ambas as coordenadas da solução $\boldsymbol{X}(t)$ tendem a ∞, quando $t \to -\infty$. Neste caso, diremos que a origem é um *nó atrator* assintoticamente estável, como podemos observar na figura (1);

II. Se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$. Neste caso, teremos um retrato de fase com o comportamento similar a I, fazendo apenas a substituição do *t* por -*t* e, consequentemente, alterando o sentidos das setas. Desta forma, dizemos que a origem é um *repulsor* ou (*fonte*) instável, ver (2);

III. Se $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ou $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Nesta situação, com a condição inicial $\boldsymbol{X}(0) = (c_1, 0)$, todas as trajetórias que passam por pontos situados em r_1 permanecem nesta reta e tendem a $\pm\infty$ com $t \to -\infty$, e tende a origem do plano com $t \to +\infty$. De forma similar, quando a condição inicial $\boldsymbol{X}(0) = (0, c_2)$, todas as trajetórias que passam por pontos situados em r_2 permanecem nesta reta e tendem a $\pm\infty$ com $t \to +\infty$, e tende a origem do plano com $t \to -\infty$. Além disso, se $c_1, c_2 \neq 0$, as demais soluções irão tender para $\pm\infty$, quando $t \to \pm\infty$. Neste caso, diremos que temos um *ponto de sela* instável, ver (3).

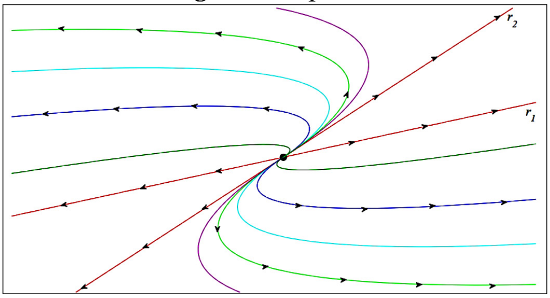
Figura 1: Nó atrator.



Fonte: Elaboração dos autores.

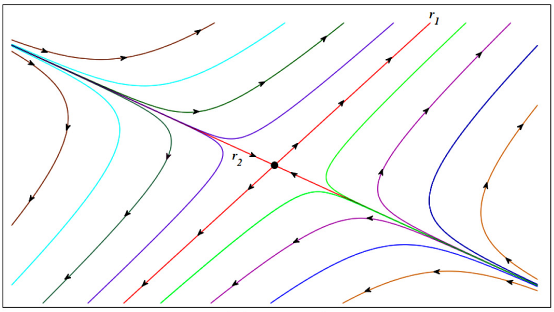
10.46943/VII.CONAPESC.2022.01.084

Figura 2: Repulsor.



Fonte: Elaboração dos autores.

Figura 3: Ponto de sela.



Fonte: Elaboração dos autores.

2. Caso dos Autovalores Complexos

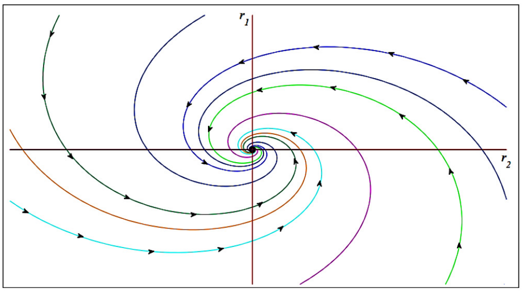
Já para os sistemas que apresentam autovalores complexos, teremos os seguintes casos de comportamentos e estabilidade:

I. Se $\lambda_i = \alpha \pm \beta i$ com $\alpha > 0$. Obteremos um *espiral* ou (*foco*) instável;

II. Se $\lambda_i = \alpha \pm \beta i$ com $\alpha < 0$. Teremos um *espiral* ou (*foco atrator*) assintoticamente estável, ver a figura (4);

III. Se $\lambda_i = \pm \beta i$ com $\alpha = 0$. Então teremos um *centro* estável, ver (5).

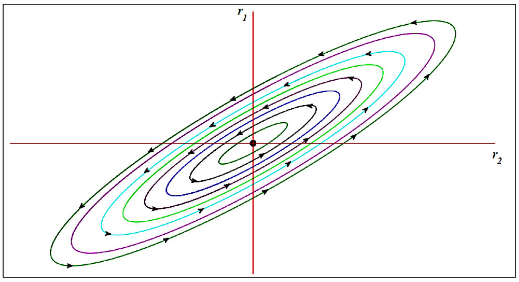
Figura 4: Foco atrator.



Fonte: Elaboração dos autores.

10.46943/VII.CONAPESC.2022.01.084

Figura 5: Centro.



Fonte: Elaboração dos autores.

3. Caso dos Autovalores com Multiplicidade

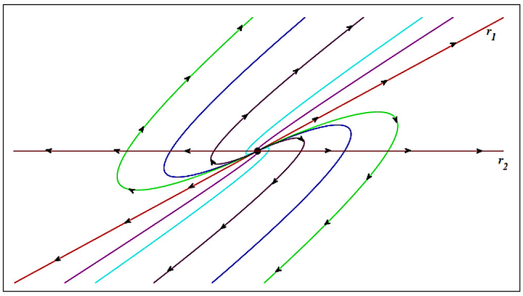
Ainda temos os casos em que os autovalores apresentam multiplicidade, nessa situação temos os seguintes comportamentos e estabilidade:

I. Quando é possível se obter **dois autovetores L.I**, a partir de um autovalor com multiplicidade algébrica igual a 2, e se $\lambda > 0$, então teremos um *nó próprio* ou (*ponto estrelado*) instável, no caso em que $\lambda < 0$ teremos um *nó próprio* ou (*ponto estrelado*) assintoticamente estável;

II. No caso em que só conseguimos obter apenas **um autovetor L.I** de modo direto, a partir de um autovalor duplo, e se $\lambda > 0$, então teremos nessa situação um *nó impróprio* ou (*degenerado*) instável, no caso em que $\lambda < 0$ teremos um *nó impróprio* ou (*degenerado*) assintoticamente estável, ver (6).

Observação 6: Quando o autovalor múltiplo for negativo ou positivo, ele obedecerá os comportamentos descritos acima acerca da forma geométrica e estabilidade. Assim, o seu sinal irá determinar apenas o sentido das setas, ou seja, quando $\lambda < 0$ toda trajetória tenderá para a origem do plano, e quando $\lambda > 0$ toda trajetória tenderá para $\pm\infty$.

Figura 6: Nó impróprio para $\lambda > 0$.



Fonte: Elaboração dos autores.

10.46943/VII.CONAPESC.2022.01.084

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio deste trabalho observamos como ocorre a resolução de sistemas lineares homogêneos de EDOs de 1ª ordem, através da aplicação do método dos autovalores e autovetores. Com algumas adaptações, este método pode ser empregado para se resolver sistemas lineares não homogêneos de EDOs, já que utilizamos apenas os coeficientes que compõem o sistema linear de primeira ordem na forma matricial.

O objetivo de se trabalhar com esse modo de resolução, é que a partir dos autovalores λ provindos do polinômio característico do sistema, e dos autovetores $\boldsymbol{V}$ associados a esse autovalores, é possível se construir na maioria dos casos, uma solução geral $\boldsymbol{X}(t)$ para um dado sistema, por meio de uma combinação linear das soluções $\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{V}_i e^{\lambda_i t}$, que irá satisfazer o sistema. Além do mais, essas soluções $\boldsymbol{X}_i$ podem ser escritas na forma de uma matriz fundamental de soluções $\Phi(t)$, na qual cada solução obtida representará uma coluna da matriz fundamental que irá satisfazer um dado sistema.

Por fim, realizamos um estudo acerca da análise qualitativa de sistemas lineares bidimensionais. Essa análise nos permitiu observar o comportamento de um sistema a partir de seus autovalores, buscando compreender que tipo de estabilidade esses sistemas possuíam. E a partir de uma solução geral de um dado sistema, fomos capazes de construir o seu retrato de fase, atribuindo valores reais as constantes arbitrárias que compõem a solução geral em um dado intervalo *t*. Desta forma, podemos mencionar como uma futura continuidade desse estudo, o aprofundamento da análise de sistemas lineares de EDOs, nos casos de sistemas tridimensionais, além da análise qualitativa de sistemas não-lineares.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Tradução: IÓRIO, Valéria de Magalhães. 9ª Edição. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

DOERING, C. I; LOPES, A. O. **Equações Diferenciais Ordinárias**. 5ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

FIGUEIREDO, D. G; NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 3ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

LAWSON, T. **Álgebra Linear**. Tradução: GOMIDE, Elza. F. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 1997.

NAGLE, R. K; SAFF, E. B; SNIDER, A. D. **Equações Diferenciais**. Tradução: VIEIRA, Daniel. 8ª Edição. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

10.46943/VII.CONAPESC.2022.01.084

SOTOMAYOR, J. **Equações Diferenciais Ordinárias**. Coleção Textos Universitários do IME-USP. Volume 4. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

ZILL, D. G; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. Volume 2. Tradução: FARIAS, Alfredo Alves de. Revisão Técnica: JÚNIOR, Antonio Pertence. 3ª Edição. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

10.46943/VII.CONAPESC.2022.01.084