



O USO DO AXIOMA DE INDUÇÃO MATEMÁTICA COM O AUXÍLIO DO JOGO TORRE DE HANÓI

Josevandro Barros Nascimento¹

Felipe Tarquino Da Silva²

Vandenezia Dagnone Da Silva³

RESUMO

O presente trabalho vem apresentar um relato de experiência de uma oficina pedagógica, intitulada: A ludicidade do jogo Torre de Hanói na Indução Matemática, cujo objetivo principal foi aproximar o aluno com o conteúdo de Indução Matemática, desenvolvendo suas habilidades de resolução de problemas, onde o aluno tenha a oportunidade de estabelecer estratégias para solucionar os problemas. A metodologia utilizada em relação aos procedimentos técnicos foi a pesquisa bibliográfica, já em relação aos objetivos foi utilizada a pesquisa exploratória, onde foi desenvolvida uma oficina pedagógica com 25 alunos da disciplina Teoria dos Números da Universidade Federal da Paraíba/Campus IV. Após a aplicação da oficina foi observado nos alunos participantes na oficina um desenvolvimento no raciocínio lógico dedutivo ao princípio de indução matemática. Ainda como resultados da oficina os alunos concluíram que, a partir do axioma de indução, foi possível concluir que essa linha de raciocínio é válida para qualquer número de discos que se contenha no jogo.

Palavras-chave: Torre de Hanói; Jogo; Teoria dos números.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho discutimos acerca do jogo Torre de Hanói, desenvolvido pelo matemático francês François Édouard Anatole Lucas no século XIX. Esse jogo é aplicado em diversos campos do conhecimento, principalmente como uma ferramenta que auxiliar nas aulas de matemática em diferentes níveis, da Educação Básica ao Ensino Superior, tanto para o processo de desenvolvimento cognitivo como, também, no auxílio da coordenação motora.

O jogo torre de Hanói possui características que explora e combina o lúdico com atividades matemáticas possibilitando o ensino e aprendizagem dos conteúdos da matemática, como por exemplo Sequência Recursivas, Progressões Geométricas, Indução Matemática e Função exponencial entre outros. Além, de possibilitar o professor utilizar como recurso

¹ Professor Mestre em Ciências, Universidade Federal da Paraíba - UFPB, josevandrobarros@yahoo.com.br;

² Graduando do Curso Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba - UFPB, vandeneziasilvaufpb@gmail.com

³ Graduando do Curso Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba - UFPB, vandeneziasilvaufpb@gmail.com;

didático pedagógico em suas aulas. O jogo Torre de Hanói é composta por discos de proporção e medidas diferentes, em que temos as seguintes quantidades de discos: um, dois, três, quatro, cinco “n números” de discos e tem como objetivo passar os discos da haste da direita para a haste da esquerda, observando que deve manter uma ordem decrescente. Para ampliar ou simplificar as dificuldades das jogadas é possível diminuir ou aumentar o número de discos, observando que a regra continua a mesma (COSTA,2019).

Ao utilizar nas aulas de matemática os conceitos presentes no jogo Torre de Hanói, o aluno percebe, que em cada movimento de um disco a uma sequência de movimentos mínimos por exemplo quando no jogo o aluno movimenta um disco temos apenas um movimento, quando movimenta dois disco, tem três movimentos como mostra o quadro 1:

Quadro 1: Torre de Hanói

Número de disco n	Movimentos mínimos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	123

Fonte: Os autores (2020)

O aluno ao construir a tabulação dos resultado de cada movimento dos discos pode criar e deduzir um indução para “n” número de discos neste sentido aprendizagem baseada por meio dos jogos matemáticos desenvolve competências e habilidades no aluno, os jogos possuem inúmeros benefícios “interesse (curiosidade), estímulo do raciocínio lógico e da criatividade em determinar estratégias, sociabilidade entre os indivíduos, entre outros.” (LIMA, 2020, p.1). O jogo além de possibilitar vantagens e benefícios no ambiente escolar, torna-se o ensino e aprendizagem mais fluido e dinâmico, no qual aproxima-se o professor e aluno.

Barbosa e Carvalho (2008, p.3), dizem que o jogos no desenvolvimento do ensino e aprendizagem da matemática torna-se como estratégia facilitadora do ensino e aprendizagem na sala de aula é um recurso didático pedagógico que apresenta excelentes resultados.

Quando utiliza-se jogos como estratégia didática possibilita o aluno a desenvolver métodos e criar soluções para desenvolver certos tipos de situações que encontra no jogo, além

de instigar a sua criatividade em um ambiente desafiador e ao mesmo tempo desenvolve motivação (LIMA, 2020).

Neste sentido a motivação para elaboração desse artigo surgiu mediante as aulas da disciplina de Introdução à teoria dos números, explorando o conceito do Princípio da Indução Finita (PIF), através desse princípio podemos utilizar o jogo Torre de Hanói e elaborar um relatório sobre o jogo aplicado interligando-se ao conceito do princípio de indução finita.

O ensino por meio dos jogos vem sendo, nos últimos anos, uma alternativa metodológica bastante pesquisada, utilizada é abordada em diversos campos, principalmente na Educação Matemática, pois “cada jogo reforça e estimula qualquer capacidade física ou intelectual. Através do prazer e da obstinação, torna fácil o que inicialmente era difícil e extenuante” (COLLOIS, 1990, p. 9), permitindo que o discente possa estruturar seu próprio conhecimento de uma forma significativa.

Partindo da hipótese de que, considerando um número mínimo de movimentos para deslocar uma determinada quantidade de disco de uma haste para outra, é possível encontrarmos uma linha de raciocínio para movimentar os discos de uma forma padronizada, objetivamos, a partir dessa padronização, mostrarmos, através do axioma de indução, que essa linha de raciocínio é válida para um número qualquer de discos.

A nossa metodologia da pesquisa foi desenvolvida a partir de uma revisão bibliográfica através de livros e artigos científicos buscando o aprimoramento da lógica dos conceitos matemáticos sobre o uso do jogo Torre de Hanói e conceito do princípio de indução finita.

A proposta do jogo se torna ampla, dependendo de qual contexto ele será inserido, mas o enfoque deste trabalho será voltado para a relação entre os números de discos e os números de movimentos dentro do conteúdo de indução matemática.

METODOLOGIA

Neste trabalho foi utilizada a pesquisa qualitativa pelo fato de objetivar e despertar uma linha de raciocínio nova desempenhada pelos alunos na utilização da torre de Hanói para a indução matemática, com ênfase na resolução de problemas.

O desenvolvimento desta pesquisa foi delineado em duas etapas. Na primeira, foi realizada uma consulta bibliográfica em artigos científicos, livros e revistas. Pois, a revisão bibliográfica, de acordo com, Manzo (1971, p. 32), “oferece meios para definir, resolver, não somente problemas já conhecidos, como também explorar novas áreas onde os problemas não

se cristalizaram suficientemente”, no intuito dos alunos se aprofundarem um pouco mais sobre a torre de Hanói e também nos assuntos de indução matemática.

No segundo momento, ocorre o desenvolvimento da estratégia da indução matemática que gerou a ideia principal deste trabalho, ocorrido após uma aula na Universidade Federal da Paraíba - campus IV, localizado no município de Rio Tinto, no estado da Paraíba, na disciplina de Teoria dos Números, do curso de Licenciatura Matemática. A atividade foi realizada na disciplina de teoria dos números onde o conteúdo ministrado era o axioma de indução. Foi apresentado o jogo torre de Hanói, explicando como funcionava a lógica do jogo e de todo o seu contexto histórico, no intuito de que os alunos tentassem concluir o objetivo do jogo que é mover os discos de uma haste a outra, obedecendo algumas regras que são estabelecidas pelo jogo.

Em seguida a turma construiu uma tabela que relaciona o número de discos e os números mínimo de movimentos que foi utilizado para concluir o desafio, com isso ficou evidente duas relações entre o número de discos e o número mínimo de movimentos sendo que uma é mais viável que a outra pois depender diretamente do número mínimo de movimento do disco anterior.

O professor fez algumas indagações em relação ao conteúdo e ao jogo “será que essa relação é válida para qualquer número de discos? Como provar se essa relação é válida?” pelo fato de ser um jogo bastante conhecido muitos alunos já sabiam que o jogo era válido para qualquer número de discos, porém não sabiam como comprovar esse fato.

Para comprovar que essa relação é válida para quaisquer números de discos, utilizamos uma ferramenta que os alunos já tinham visto em aulas anteriores que é o axioma de indução. Neste sentido o fato de trazer algo concreto e relacionado com axioma de indução, a aula se tornou mais didática e mais proveitosa, além de quebrar um pouco desse paradigma que o axioma tem, que é de ser algo bastante abstrato.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Torre de Hanói tem seu histórico baseado no misticismo, de origem em uma lenda indiana que relata que o núcleo do mundo se encontra sob o dono de um santuário localizado na região de Benares, na Índia (MACHADO, 1995). Esta lenda, afirma que:

Início dos tempos Deus colocou nesta cúpula três hastes contendo 64 discos concêntricos. Também foi criada uma comunidade de monges cuja única tarefa era mover os discos da primeira para a terceira haste. Os monges deveriam cumprir esta tarefa movendo um disco em exatamente uma unidade de tempo e de maneira minimal, ou seja, eles utilizavam uma regra de

movimentação que produzia o menor número possível de movimentos. Dia e noite, incessantemente, os sacerdotes tocavam os discos de uma haste para a outra, de acordo com as leis imutáveis de Brahma, que dizia que o sacerdote do turno não poderia mover mais de um disco de cada vez, e que o disco fosse colocado na outra haste, de maneira que o de baixo nunca fosse menor do que o de cima (CABRAL, 2006, p. 33).

Conhecido por ser um jogo matemático do tipo ‘quebra-cabeça’ confeccionado e publicado no ano de 1882 pelo matemático francês Édouard Lucas. Desde cedo ele apresentava uma notável aptidão para a matemática, o que fez ingressar em várias instituições da França. Após servir ao exército Édouard Lucas seguiu a carreira de matemático.

Tinha como reputação de ser um ótimo professor, entretanto e instigando seus alunos com desafios matemáticos que requerem considerável inventividade para serem resolvidos. Além de trabalhar como professor de ensino médio, foi um matemático bastante prolífico, tendo publicado durante toda a sua vida mais de 180 artigos sobre as mais diversas áreas da matemática, nos mais diversos jornais da matemática do mundo (SILVA, 2017, p. 21).

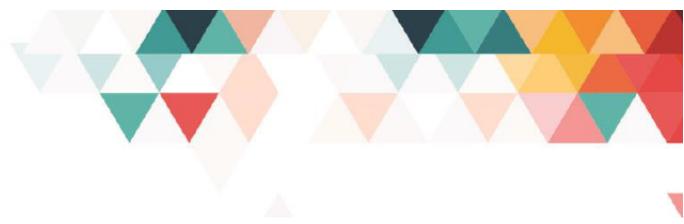
Tendo sua atenção voltada especialmente para a área da teoria dos números, Édouard Lucas fez inúmeras contribuições para essa área de conhecimento matemático, sendo uma delas a descoberta do maior número primo sem a ajuda de computadores. Neste sentido, se os 64 discos fossem removidos da haste que Deus botou no dia da formação para outra haste, o mundo deixaria de existir. Assim, apresentamos o jogo.

JOGOS NO E ENSINO.

Durantes décadas, pesquisas desenvolvem materiais didático pedagógicos que possam auxiliar a prática de ensino e aprendizagem. Araújo, Ribeiro e Santos (2012) relacionaram que os jogos, brincadeiras e instrumentos lúdicos em geral ampliam os conhecimentos podendo promover novos experimentos e permitir a construção de modelos da realidade do sujeito. Tais modelos simulam o mundo real, o que tornam mais fácil desenvolver o pensamento e a estratégias lógicas.

Além das características lúdicas dos jogos em que acomodam o desenvolvimento de diferentes competências para seus jogadores, por exemplo: buscar distintas estratégias para resolver problemas, superação de dificuldade, compreensão de atuação ambientes com regras e noções de utilização.

Associando essas características no ensino e aprendizagem, segundo Amaral (2019), os jogos educativos são atividades abertas, por isso espontânea, que há adaptação em tempo e



espaço, o qual envolve os jogadores no desenvolvimento da resolução de problemas, a partir de obstáculos artificial definidos por regras de formas lúdicas.

JOGOS MATEMÁTICOS

De acordo com Vygostsky (1987), as atividades lúdicas, como jogos e brincadeiras, são essenciais para o desenvolvimento cognitivo e social da criança. Para Kamii (1992), o conceito de jogo é um resultado para o crescimento da originalidade infantil, o qual envolve tomadas de decisões e elaboração de estratégias que conduz a regras pré-estabelecidas do jogo ou elaboradas pela própria criança.

O uso dos jogos no ensino da matemática como uma das tendências metodológicas vem ganhando espaço no ambiente escolar com uma experiência que pode promover o processo de ensino e a aprendizagem de forma lúdica. Segundo De Lara (2004), para os professores a utilização de jogos pode tornar as aulas mais agradáveis e instigantes aos alunos.

O grupo de estudo “Pentathlon Institute”, que desenvolve pesquisas nesta linha, consideram que os jogos não são apenas formas de abordar o lúdico, mas também resgatá-lo. Conforme D’Ambrósio (1989), o lúdico, assim como os jogos, pode ser pensado nas aulas de matemática como uma estratégia para desenvolver o raciocínio lógico dos alunos em situações relacionadas ao cotidiano e o desenvolvimento formal da matemática.

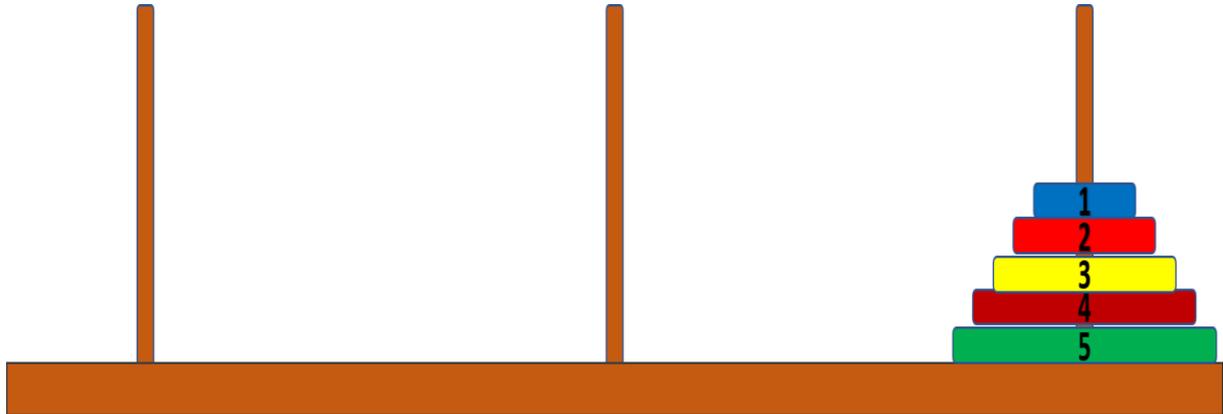
A contribuição em circunstância das características do jogo em situação que envolva o ensino, evidencia que o jogo torna-se uma atividade lúdica quando contribui para o envolvimento do estudante, do desejo e o interesse do jogador pela própria ação do jogo. Segundo Grandó (2000), quando passamos a utilizar os jogos nas aulas de matemática envolvemos os alunos em competição saudável e desafios que os motivam a conhecer os seus limites e suas possibilidades de conquistas.

O JOGO

O jogo é basicamente formado por uma base, onde nela está fixada três hastes na vertical, com discos perfurados no centro de diferentes tamanhos, que são distribuídos de forma que o disco de diâmetro menor esteja sempre sobreposto o de disco maior.



Figura 1: Torre de Hanói



Fonte: Os Autores (2020).

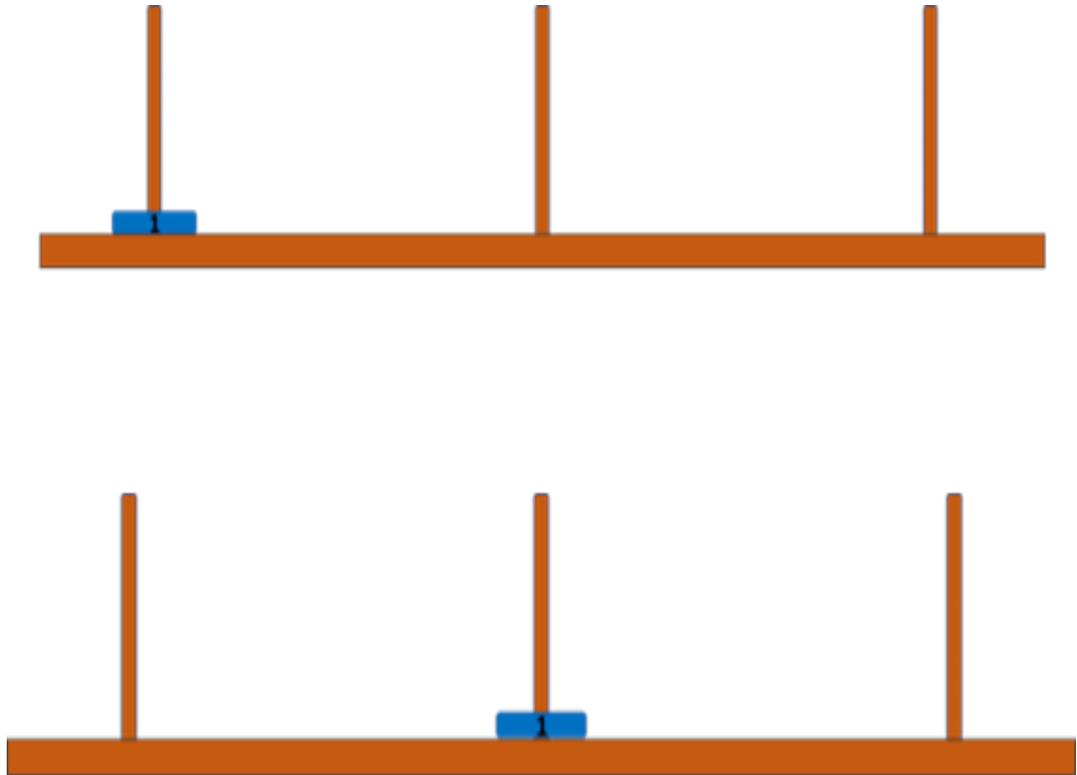
O objetivo do jogo é mover todos discos de uma haste para outra com uma quantidade mínima de movimentos, obedecendo às seguintes regras.

- 1) só pode deslocar ou movimentar um disco por vez;
- 2) o disco de diâmetro maior não pode ficar sobre o de diâmetro menor;
- 3) Não pode, em hipótese nenhuma, deslocar/movimentar uma peça que esteja inferiormente a outra.

Só com um disco percebe-se que o jogo se torna bastante simples, visto que só levará um movimento para deslocar o disco de uma haste para outra.



Figura 2: movimento com um disco

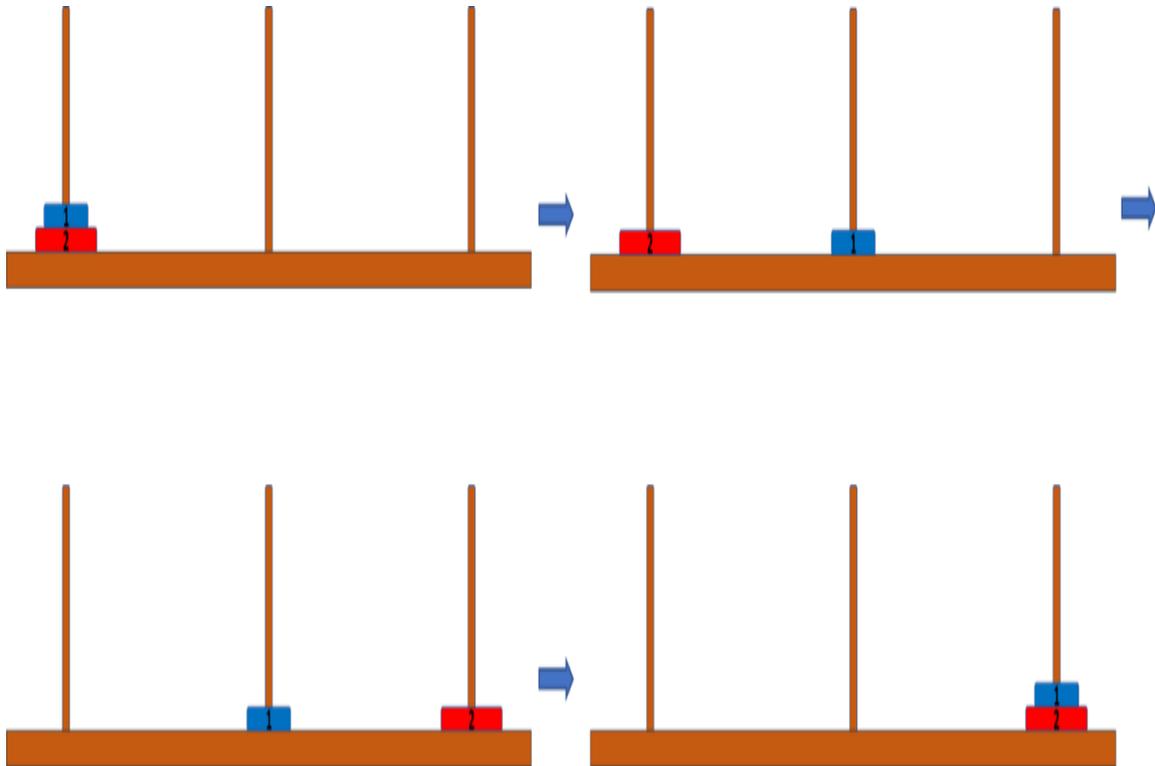


Fonte: Os Autores (2020).

Para 2 discos são necessários 3 movimentos:



Figura 3: Movimento com dois discos

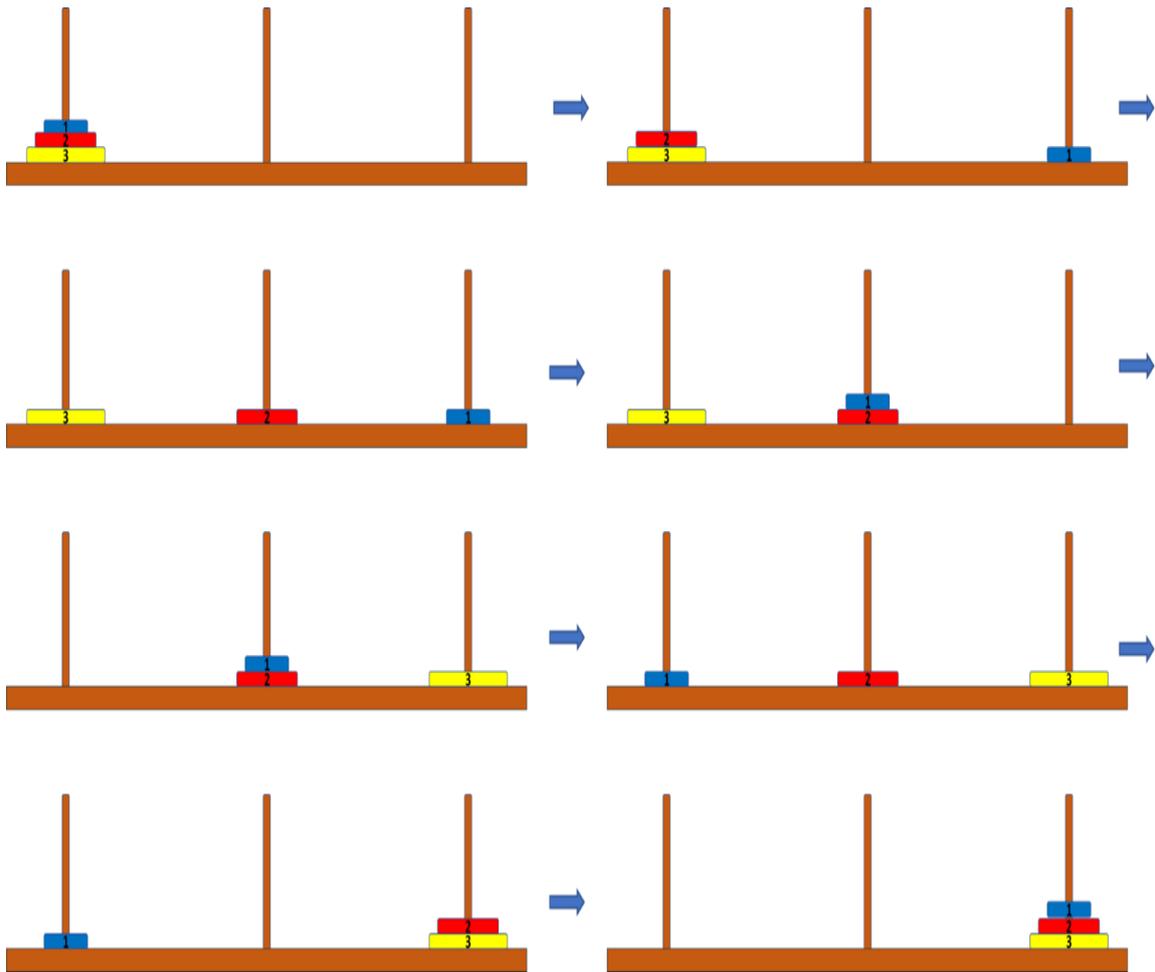


Fonte: Os Autores (2020).

Com três discos serão necessários sete movimentos.



Figura 4: movimento com três discos.

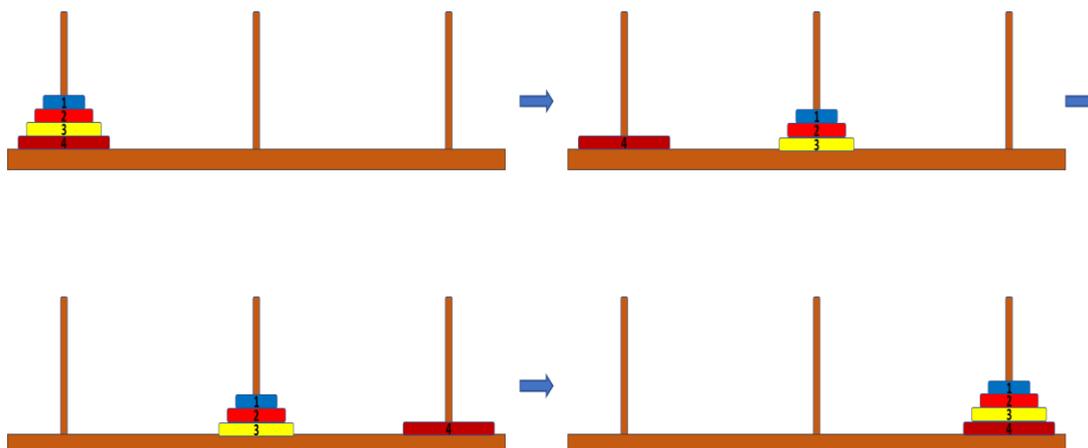


Fonte: Os Autores (2020).

Para movimentar quatro discos iremos fazer de forma diferente,



Figura 5: movimento com Quatro discos



Fonte: Os Autores (2020).

Sabemos que para mover o disco de maior diâmetro será necessário mover os três discos de diâmetro menor a ele, já sabemos que para movimentar três discos são necessário sete movimentos, então para que o disco maior fique livre serão necessários sete movimentos, para deslocá-lo será aplicado um movimento e para deslocar novamente os três disco serão aplicado mais sete movimentos. Aplicando a matemática temos que:

$$7+7+1=15$$

$$2*(7) +1=15$$

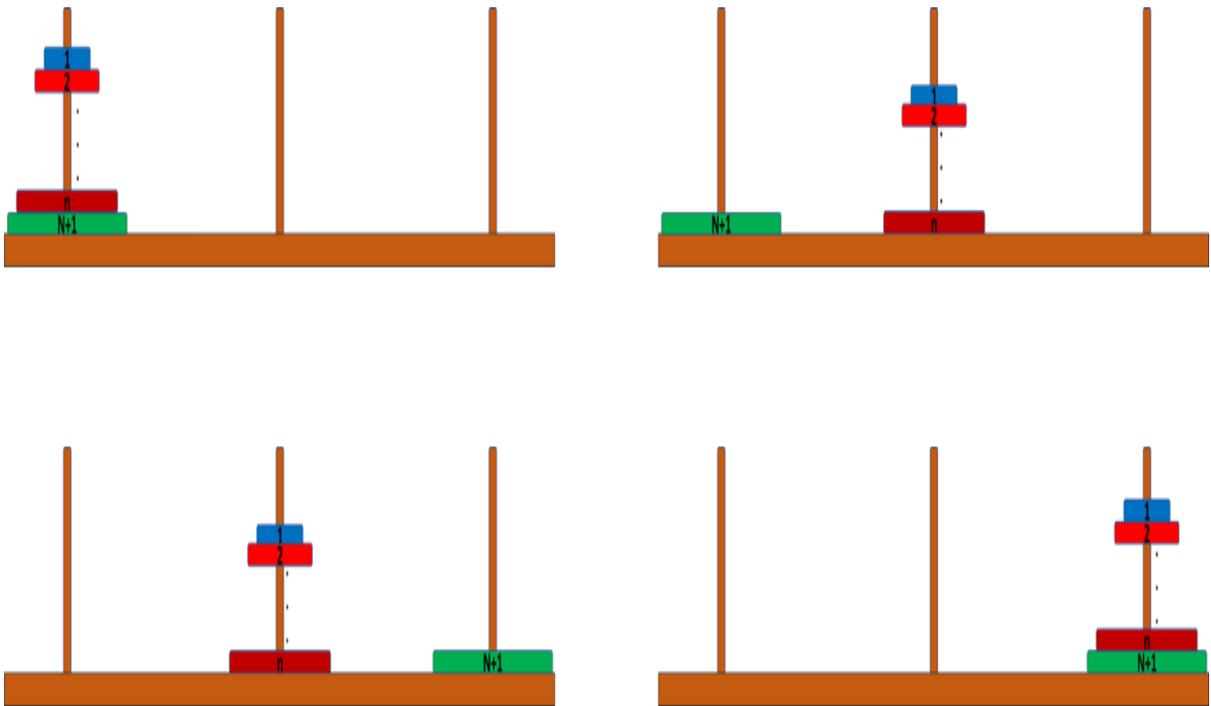
Assim, concluindo o desafio que é deslocar todos os discos de uma haste para outra com o total de quinze movimentos.

NÚMERO MÍNIMO DE DISCO

A partir dessa relação percebemos que para achar o número mínimo de disco de um disco sucessor ao disco de origem, onde já sabemos o número mínimo de movimentos para movimentá-lo, teremos sempre duas vezes os números de movimentos de discos antecessor a ele e mais um movimento.



Figura 4: movimentos para N discos.



Fonte: Os Autores (2020)

Usando a indução matemática, veremos que os conceitos apresentados com o uso do jogo torre de Hanói são válidos. Para demonstrar que essa relação é válida para um número qualquer de discos, utilizaremos o princípio da indução matemática, que seu teorema consiste basicamente em:

PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA

Com último postulado de Peano, foi desenvolvido o conceito de indução matemática, em que define e constitui os números naturais o PIM (princípio de indução matemática é praticamente entender os números naturais (Lima, 2007). A indução matemática é desenvolvida pela demonstração e muitas das vezes é analisado em cursos de álgebra, matemática discreta no nosso caso nos estudos da disciplina de teoria dos números, no qual possui várias aplicações em todas as áreas da matemática.

Princípio de indução matemática é uma ferramenta utilizada para demonstração de fatores referentes aos números naturais.

Seja $a \in N$ e seja $P(x)$ uma sentença em N , suponha que.

- I) $p(a)$ é verdade, e que.



II) $\forall n \geq a, pn \rightarrow p(n + 1)$ é verdade, então $p(n)$ é verdade para todo $n \geq o$.
seja $p(d) = 2^d - 1$ então temos que:

DEMONSTRAÇÃO

$$p(1) = 2^1 - 1 = 1$$

Suponha que $p(d)$ é verdade, isto é $p(d) = 2^d - 1$.

Vamos mostrar que $p(d + 1)$ é verdade, ou seja $p(d) = 2^d - 1$ então $p(d + 1) = 2^{d+1} - 1$

Por hipótese de indução temos que:

$$\begin{aligned} p(d) &= 2^d - 1 \\ p(d + 1) &= 2(p(d)) + 1 \\ P(D + 1) &= 2(2^d - 1) + 1 \\ p(d + 1) &= 2^{d+1} - 2 + 1 \\ p(d + 1) &= 2^{d+1} - 1 \end{aligned}$$

Logo $p(d + 1)$ é verdade e, portanto, pelo princípio da indução matemática temos que $p(n)$ é verdade para $n \geq 1$. Portanto, podemos afirmar que o jogo torre de Hanói é válido para qualquer número de discos.

Uma das formas mais simples de associar uma relação dos movimentos com uma determinada ação, é através de uma função matemática. A função matemática é a relação entre dois conjuntos de elementos onde estão relacionados por uma lei de formação, ou seja, para cada elemento X estará relacionado com um valor $F(X)$ onde $F(X)=Y$.

Seja os números de movimentos (NV) dos discos então temos que.

$$MV(N+1) = ND(N)+1+ND(N)$$

$$MV(N+1) = 2ND(N)+1$$

Tendo em vista que para $MV(N+1)$ irá ser sempre uma P.G. de razão dois, logo temos que.

$$D1=1$$

$$D2=2(D1) + 1$$

$$D3=2(D2) + 1$$

$$D4=2(D3) + 1$$

$$D5=2(D4) + 1$$



Para achar o número mínimo de movimentos para D5 iremos utilizar este mesmo raciocínio.

$$D5=2(D4) +1$$

$$D5=2(2(D3) +1) +1$$

$$D5=4(2(D2) +1) +3$$

$$D5=8(2(D1) +1) +7$$

$$D5=16+8+7$$

$$D5=2^{5-1}+2^{5-2}+2^{5-2} - 1$$

$$D5=2^{5-1} + 2(2^{5-2}) - 1$$

$$D5=2^{5-1} + 2^{5-1} - 1$$

$$D5=2(2^{5-1}) - 1$$

$$D5=2^5 - 1$$

$$D5=31$$

Percebemos que, para achar o número mínimo de movimentos de cada disco será sempre na fórmula de uma função exponencial dada na seguinte fórmula: seja D o número de discos, então temos que $D=2^D - 1$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conclui-se que, para que o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de matemática, baseado em jogos com princípio da torre de Hanói e que tenha uma aprendizagem significativo para o discente, é fundamental que toda prática seja conduzida e analisada pelo professor na sua execução. De acordo com Shimorra e Sobreira (2015), a união da utilização do jogo com o conteúdo trabalhado em sala de aula provoca uma motivação instigada pelo jogo, formulando-se uma ponte entre o prazer e o aprender, possibilitando, assim, novas vertentes e pensamentos dos estudos trabalhados em sala de aula.

Ao utilizar jogos matemáticos, o professor deve fazer como que a compreensão dos pensamentos matemáticos evolua com o passar do tempo, fazendo com que os estudantes desenvolvam habilidade e um nível de abstração, permitindo com que ele estabeleça relação com métodos de aprender matemática de forma prazerosa.

Portanto, esta pesquisa nos norteia ao observar uma linha de raciocínio mais didática e dinâmica para resolução do jogo a partir da movimentação que ocorre para mover os discos de uma haste

para outra, e utilizando o axioma de indução, demonstrar que essa linha de raciocínio é válida para qualquer número de discos.

REFERÊNCIAS

AMARAL, R. R. D. **Preserve: um estudo sobre jogos digitais na educação básica no contexto do ensino de Física.** 2019. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2019.

ARAUJO, N. M. S.; RIBEIRO, F. R.; SANTOS, S. F. D. **Jogos pedagógicos e responsividade: ludicidade, compreensão leitora e aprendizagem.** *Bakhtiniana, Rev. Estud. Discurso* [online]. 2012, vol.7, n.1, ISSN 2176-4573.

BARBOSA, S. L. P.; CARVALHO, T. O. Jogos matemáticos como metodologia de ensino aprendizagem das operações com números inteiros. **Projeto de Intervenção Pedagógica na Escola apresentado ao Programa de Desenvolvimento Educacional.** UEL-Londrina. 2008.

CABRAL, M. A. **A utilização de jogos no ensino de matemática.** Trabalho de Conclusão de Curso de Matemática – Habilitação em Licenciatura Departamento de Matemática Centro de Ciências Físicas e Matemáticas Universidade Federal de Santa Catarina. 2006.

COSTA, L. N.; DA SILVA, V. L. L.. Torre de Hanoi. **Semana da Matemática do Instituto de Matemática**, n. 3, 2019.

CALLOIS, R. **Os jogos e os homens: a máscara e a vertigem.** Trad. De José Garcez Palha. Lisboa: Edições Cotovia. 1990.

D'AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje. **Temas e Debates. SBEM. Ano II**, v. 2, 1989.

DE LARA, I. C. M. **Jogando com a Matemática de 5^a a 8^a série.** 2004.

GRANDO, R. C. et al. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.** 2000.

LIMA, A. R. S. et al. **A MATEMÁTICA ALÉM DO QUADRO E GIZ: O Ensino e a Aprendizagem da Matemática por meio dos jogos.** 2020.

LIMA, E. L. **Indução matemática.** Disponível em: www.obm.org.br/eureka/artigos/inducacao.doc. Acesso em: 8 out. 2019

MANZO, A. J. **Manual para la preparación de monografias:** una guía para presentar informes y tesis. Buenos Aires: Humanitas, 1971.

MACHADO, N. J. **Matemática e educação: alegorias, tecnologias e temas afins.** São Paulo: Cortez, 1995.

MOURA, M. O. de. **A série busca no jogo: do lúdico na matemática.** A Educação Matemática em Revista, nº 3. 1994

SHIMORRA, C; SOBREIRA, E. Criando Jogos Digitais para a aprendizagem de matemática no ensino fundamental I. In: **Anais do Workshop de Informática na Escola**, 2015.

SILVA, B. A. **Números de Fibonacci e números de Lucas**. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo, Martins Fontes, 1 edição 1987.