



# O USO DE CONCEITOS DE TRIGONOMETRIA NA CONSTRUÇÃO DE TELHADOS

José Ferreira Guedes Filho

*Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, jose.ferreiratf@gmail.com*

**Resumo:** A matemática surgiu a milhares de anos como uma ferramenta utilizada pelo homem na resolução dos mais diversos problemas, proporcionando uma variedade de informações e servindo como recurso no alcance de diversos objetivos. Uma das áreas mais antigas e importantes da matemática é a trigonometria, área que estuda as relações entre ângulos e lados de um triângulo. Uma das áreas da sociedade moderna onde diariamente surgem problemas com potencial de serem solucionados por meio da matemática é a da construção civil, um exemplo desse tipo de problema são os cálculos envolvendo dimensionamento e orçamento de materiais e estruturas, como, por exemplo, o cálculo da quantidade de material necessário para se construir um telhado. Com isso, o objetivo deste trabalho é se utilizara de conceitos importantes da trigonometria na resolução de um problema prático da construção civil: o cálculo da quantidade de madeira necessária para se construir um telhado. Para o desenvolvimento dos modelos, inicialmente foi feito uma revisão de literatura, acerca dos conceitos empregados e da estrutura de um telhado. Em seguida, os modelos matemáticos foram desenvolvidos utilizando-se o teorema de Pitágoras e as relações trigonométricas no triângulo retângulo. Em seguida, após o desenvolvimento dos modelos, estes foram testados em uma situação prática, onde ocorreu a comparação entre o resultado obtido com os modelos e o cálculo manual realizado por um profissional da área. Com essa comparação, foi possível constatar uma boa aproximação entre ambos os resultados, concluindo assim que os modelos desenvolvidos podem ser aplicados em situações práticas reais.

**Palavras-chave:** Trigonometria, Aplicação, Telhados.

## INTRODUÇÃO

Desde seus primórdios, a matemática tem sido utilizada pelo homem como um dos principais meios empregados na resolução de problemas práticos, sendo os conhecimentos das diversas áreas da matemática ferramentas facilitadoras do entendimento de diversas situações, até mesmo nos dias atuais surgem diariamente diversos problemas que necessitam de conhecimentos matemáticos para serem resolvidos ou simplificados. Partindo disso, pode-se dizer que a matemática proporciona uma variedade de informações, atendendo a diferentes necessidades (CONCEIÇÃO, 2016). Uma das áreas mais antigas da matemática, e também uma das mais utilizadas, é a trigonometria (com estudos datados de IV a.C.).

A palavra trigonometria vem do grego *trigonos* (triângulos) mais *metrum* (medida), cujo objetivo principal é o estudo das relações entre os lados e os ângulos de um triângulo, tendo surgido em tempos antigos como resposta a problemas de astronomia e da navegação (UBERTI, 2003). Além de suas utilizações iniciais, os conceitos de trigonometria são aplicáveis em diversas áreas do conhecimento, sendo uma importante aliada do mundo moderno.

Uma das áreas onde mais surgem diariamente diversos problemas com potencial de serem solucionados por meio de métodos matemáticos é a construção civil. Um exemplo prático desse tipo de situação envolvendo a matemática no ramo da construção é a realização de orçamentos e quantificação de materiais a serem utilizados na realização de uma obra antes de se iniciar a construção da mesma, uma atividade que evita imprevistos e que permite a obtenção de uma estimativa do custo final. Entretanto, realizar tal tarefa leva um tempo que muitas vezes não está disponível, já que muitas das etapas construtivas não possuem fórmulas prontas para se quantificar quanto material será empregado. Uma dessas etapas é a construção de telhados de madeira. Ficando a tarefa do desenvolvimento do orçamento da quantidade de madeira a cargo do carpinteiro responsável, o que demanda mais tempo para a sua realização, já que quanto mais profissionais estiverem envolvidos no cálculo do orçamento, mais tempo deverá ser dedicado a esta tarefa.

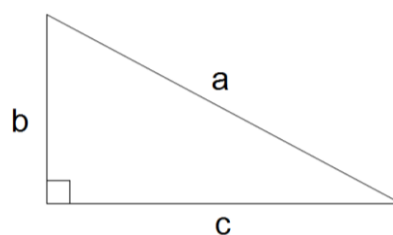
Portanto, o intuito deste trabalho é apresentar uma utilização prática da trigonometria na resolução de um problema de construção civil, desenvolvendo um modelo matemático para o cálculo da quantidade de madeira necessária para se construir um telhado. Antes disso, será feita uma pequena revisão dos conceitos matemáticos empregados e dos conhecimentos básicos da construção de telhados.

## TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

O triângulo é uma figura geométrica que possui três lados e seu nome faz referência aos três ângulos internos localizados em cada um dos seus vértices. Já o triângulo retângulo é aquele em que um dos seus ângulos internos é igual a  $90^\circ$ . Um dos principais teoremas envolvendo triângulos é o Teorema de Pitágoras, que diz que num dado triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa equivale a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

Na Figura 1 tem-se um triângulo retângulo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , cujo ângulo entre  $b$  e  $c$  vale  $90^\circ$ . Aplicando-se o teorema de Pitágoras ao triângulo da Figura 1, temos que  $a^2 = b^2 + c^2$ , onde  $a$  é a hipotenusa e  $b$  e  $c$  são os catetos.

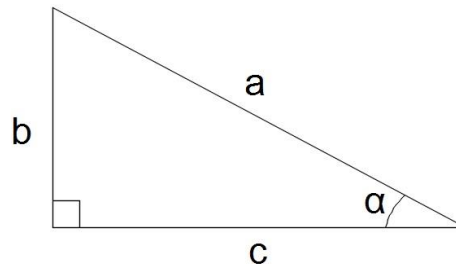
Figura 1 – Triângulo retângulo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ .



Fonte: Autoria própria.

Outros conceitos muito importantes para a compreensão deste trabalho são as razões trigonométricas no triângulo retângulo, ou seja, o seno, o cosseno e a tangente. Considerando o triângulo retângulo da Figura 2, também de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  e com um ângulo interno  $\alpha$ .

Figura 2 – Triângulo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , com ângulo interno  $\alpha$ .

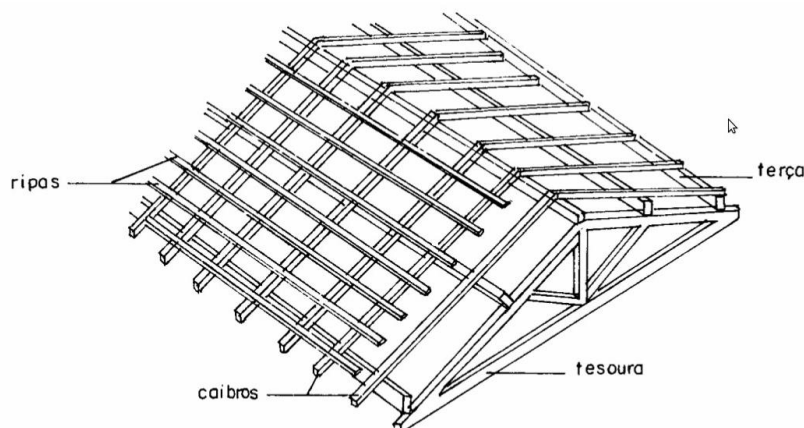


Fonte: Autoria própria.

## TELHADOS DE MADEIRA

No ramo da construção civil existem diversos tipos de coberturas, dentre as mais comuns estão os telhados, utilizados principalmente em residências e cujos principais materiais constituintes são a madeira (usada na estrutura) e as telhas (usadas para a vedação). A estrutura do telhado pode ser dividida em duas partes, a armação e a trama. A armação é a parte estrutural do telhado, constituída por tesouras, cantoneiras, pontaletes, etc. A trama, por sua vez, é a estrutura inclinada de sustentação e fixação das telhas constituída por ripas, caibros e terças, que se apoiam na armação (MILITO, 2009). Na Figura 3 é ilustrada a estrutura de um telhado, sendo indicada a tesoura, onde se apoiam as terças, caibros e ripas.

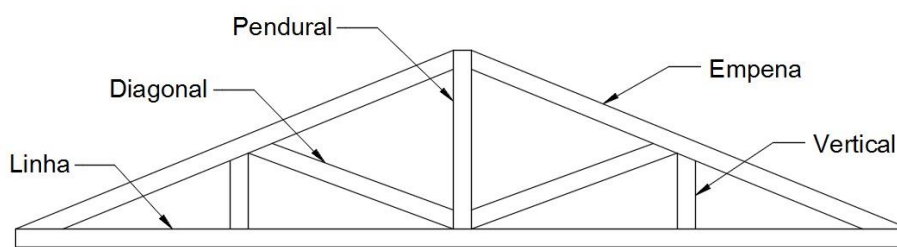
Figura 3 – Estrutura de um telhado.



Fonte: MILITO (2009).

Existem diferentes tipos de tesouras empregadas na armação de um telhado, mas no Brasil o tipo de tesoura mais utilizado é a tesoura tipo Howe, também chama de tesoura inglesa. A tesoura ilustrada na Figura 4 é uma Howe simples, recomendada para casas de 6 a 10 metros de largura. Na figura também estão indicados os nomes de cada um dos elementos da tesoura.

Figura 4 – Tesoura tipo Howe



Tesoura tipo Howe

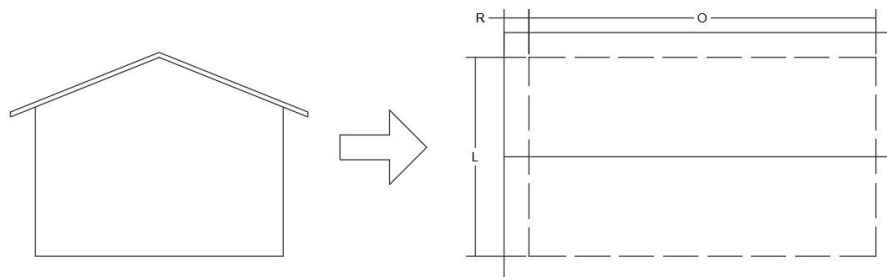
Fonte: Autoria própria.

Ressalta-se que para os cálculos realizados neste trabalho, foi utilizada uma representação em duas dimensões de todos os componentes do telhado, já que a quantidade de madeira utilizada se dá em metros, ou seja, não é necessário que seja levada em conta a profundidade das peças.

## METODOLOGIA

Para o desenvolvimento deste trabalho, inicialmente foi realizada uma pesquisa bibliográfica na literatura acerca do problema analisado, primeiro buscou-se informações sobre os processos construtivos e elementos componentes de um telhado e, em seguida, dos conceitos básicos de trigonometria empregados. Depois de coletadas todas as informações, definiu-se um tipo de telhado que seria a base para o desenvolvimento dos modelos matemáticos. O tipo escolhido foi um telhado comum de duas águas (Figura 5), cuja armação é formada por duas tesouras.

Figura 5 – Habitação com telhado de duas águas (vista frontal e planta de cobertura)



Fonte: Autoria própria.

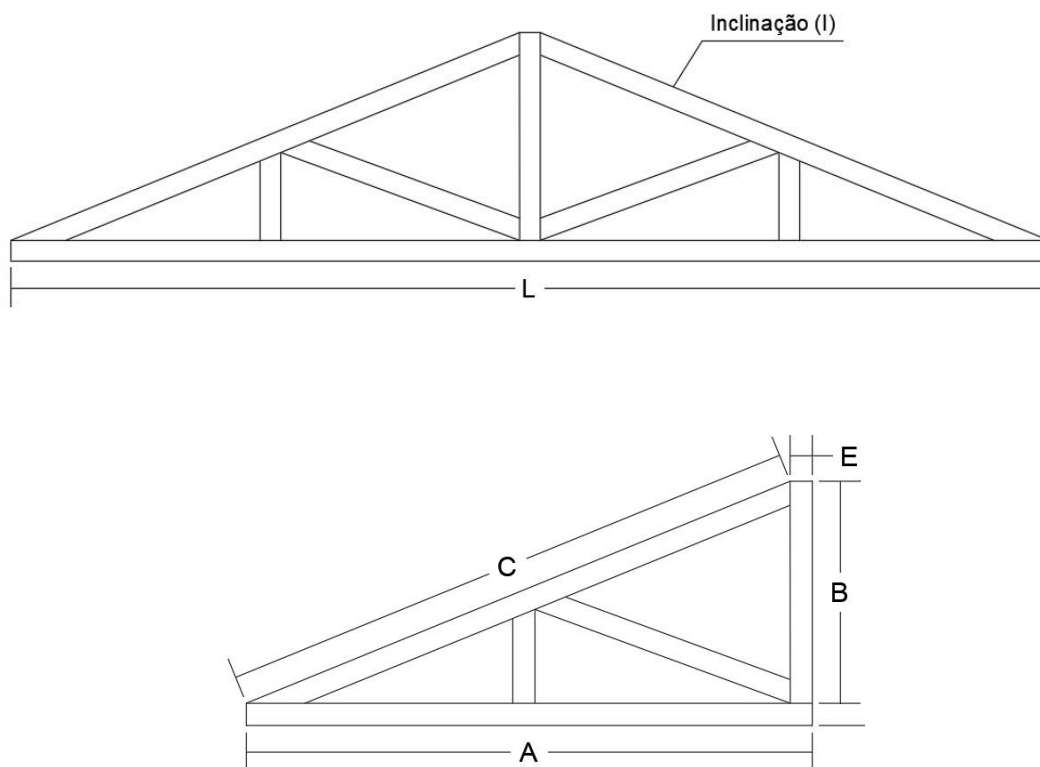
Após a definição do tipo de telhado a ser utilizado, iniciou-se o desenvolvimento de equações que auxiliassem na quantificação da quantidade de madeira para a construção do telhado, onde as variáveis são: a inclinação do telhado (I), a largura da habitação (L), o comprimento da habitação (O), o beiral (R) e a espessura da madeira a ser utilizada (E).

Deve-se observar que a madeira utilizada na produção da armação tem espessuras diferentes daquela utilizada na trama, sendo que cada um dos elementos da trama (ripas, caibros e terças) possuem espessuras diferentes entre si, logo o objetivo final é a obtenção de quatro equações, uma para cada metragem de madeira referente a cada espessura.

## RESULTADOS

Inicialmente, será gerada uma equação para a quantidade de madeira usada na armação, ou seja, a quantidade de madeira necessária para a produção das duas tesouras. Considerando-se a tesoura abaixo (Figura 6). Iremos inicialmente calcular a metragem de madeira necessária para produzir os elementos A, B e C, em função de I, L e E:

Figura 6 – Modelo de tesoura empregado, juntamente com identificação de cada um dos elementos dimensionados.



Fonte: Autoria própria.

Onde:

- I = Inclinação do telhado (razão entre a altura H e a metade da largura L);
- L = Largura da habitação/tesoura;
- E = Espessura das peças de madeira.

Determinando o elemento A:

$$A = \frac{L}{2} + \frac{E}{2} = \frac{L + E}{2}$$

Determinando o elemento B, sabendo que a altura do telhado pé igual a inclinação vezes a largura:

$$B + E = A \cdot I$$

$$B = \left(\frac{L + E}{2}\right) \cdot I - E$$

Determinando o elemento C utilizando o teorema de Pitágoras, já que A e B estão posicionados de tal forma que forma:

$$C^2 = (A - E)^2 + B^2$$

$$C^2 = \left(\frac{L + E}{2} - E\right)^2 + \left[\left(\frac{L + E}{2}\right) \cdot I - E\right]^2$$

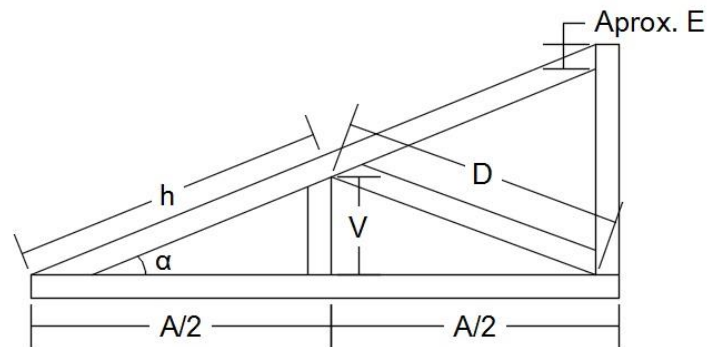
$$C^2 = \left(\frac{L - E}{2}\right)^2 + \left(\frac{L + E}{2}\right)^2 \cdot I^2 - 2 \cdot E \cdot \left(\frac{L + E}{2}\right) \cdot I + E^2$$

$$C^2 = \left(\frac{L - E}{2}\right)^2 + \left(\frac{L + E}{2}\right)^2 \cdot (I^2 - 2 \cdot E \cdot I) + E^2$$

$$C = \sqrt{\left(\frac{L - E}{2}\right)^2 + \left(\frac{L + E}{2}\right)^2 \cdot (I^2 - 2 \cdot E \cdot I) + E^2}$$

Após a determinação dos elementos A, B e C, iremos determinar a madeira necessária para produzir os elementos D e V (Figura 7), utilizando as relações trigonométricas e o teorema de Pitágoras, ambos em função de A, B, C e E:

Figura 7 – Elementos internos da tesoura (D e V).



Fonte: Autoria própria.

Sendo  $h$  a hipotenusa cujo um dos catetos é  $V$  e  $\alpha$  o ângulo formado entre  $A$  e  $C$ , podemos determinar  $V$  por meio das relações trigonométricas. Logo:

$$\cos(\alpha) = \frac{\frac{A}{2}}{h}$$

$$h \cdot \cos(\alpha) = \frac{A}{2}$$

$$h = \frac{\frac{A}{2}}{\cos(\alpha)}$$

$$h = \frac{A}{2 \cdot \cos(\alpha)}$$

Temos que  $V$  é:

$$\sin(\alpha) = \frac{V}{h}$$

$$h \cdot \sin(\alpha) = V$$

$$V = \sin(\alpha) \cdot \left( \frac{A}{2 \cdot \cos(\alpha)} \right)$$

$$V = \tan(\alpha) \cdot \left( \frac{A}{2} \right)$$

$$V = \left( \frac{B}{A - E} \right) \cdot \left( \frac{A}{2} \right)$$

$$V = \frac{AB}{2A - 2E}$$

E que D é:

$$D^2 = V^2 + \left(\frac{A}{2} - E\right)^2$$

$$D^2 = \left(\frac{AB}{2A - 2E}\right)^2 + \left(\frac{A - 2E}{2}\right)^2$$

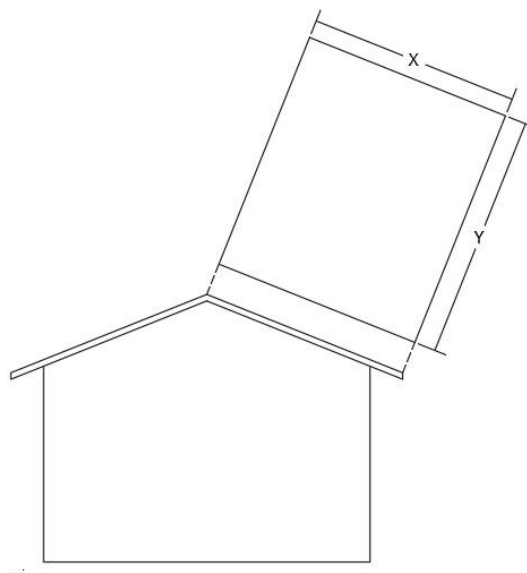
$$D = \sqrt{\left(\frac{AB}{2A - 2E}\right)^2 + \left(\frac{A - E}{2}\right)^2}$$

Agora que as equações para todos os elementos foram obtidas, pode-se obter um modelo para a determinação da quantidade de madeira necessária para se construir uma tesoura:

$$M_T = L + B + 2D + 2V + 2C$$

As quantidades de ripas, caibros e terças serão determinadas em função dos comprimentos horizontal e vertical dos planos inclinados do telhado, no caso, sendo um desses planos inclinados representado abaixo (Figura 8):

Figura 8 – Representação do plano inclinado de uma das águas do telhado



Fonte: Autoria própria.





Sendo:

- $O$  = Comprimento da residência;
- $R$  = Beiral do telhado;
- $X$  e  $Y$  = Comprimentos horizontal e vertical do plano inclinado do telhado.

O comprimento de  $X$  é dado por:

$$X^2 = \left(\frac{L}{2} + R\right)^2 + \left[\left(\frac{L}{2} + R\right) \cdot I\right]^2$$

$$X^2 = \left(\frac{L + 2R}{2}\right)^2 + \left[\left(\frac{L + 2R}{2}\right) \cdot I\right]^2$$

$$X^2 = \left(\frac{L + 2R}{2}\right)^2 \cdot (1 + I^2)$$

$$X^2 = \left(\frac{L^2 + 4LR + 4R^2}{4}\right) \cdot (1 + I^2)$$

$$X = \sqrt{\left(\frac{L^2 + 4LR + 4R^2}{4}\right) \cdot (1 + I^2)}$$

E o comprimento de  $Y$  é:

$$Y = O + 2R$$

As quantidades de ripas ( $Q_1$ ), caibros ( $Q_2$ ) e terças ( $Q_3$ ) vão ser dadas pela divisão dos comprimentos  $X$  (ripas e terças) e  $Y$  (caibros) pela distância entre esses elementos mais um (já que sempre deve existir um desses elementos no início e fim de cada um dos lados do plano inclinado). Assim, temos que:

$$Q_1 = \frac{X}{D_1} + 1$$

$$Q_2 = \frac{Y}{D_2} + 1$$

$$Q_3 = \frac{X}{D_3} + 1$$

Ressalta-se que valores decimais devem ser arredondados até o número inteiro, por exemplo, 5,42 deve ser arredondado para 5 e 5,67 deve ser arredondado para 6.

Como cada ripa e terça tem comprimento igual a  $Y$  e cada caibro tem comprimento igual a  $X$ , temos:

$$M_1 = Q_1 \cdot Y$$

$$M_2 = Q_2 \cdot X$$

$$M_3 = Q_3 \cdot Y$$

Onde  $M_n$  é a metragem de madeira a ser utilizada na confecção das peças a serem utilizadas em um dos planos inclinados, para os dois planos, basta dobrar o resultado. Com isso, foram obtidas todas as equações necessárias para o cálculo da quantidade de madeira para qualquer telhado cujo tipo seja do mesmo utilizado aqui.

### EXEMPLO PRÁTICO

Para testar a qualidade dos modelos desenvolvidos, foi utilizada uma situação prática real, na qual se necessita calcular a quantidade de madeira necessária para produzir um telhado de duas águas com os dados da Tabela 1.

Tabela 1 – Dados para a determinação da quantidade de madeira a ser utilizada.

Dados para realização da quantificação	
Inclinação do telhado (I)	30%
Dimensões da habitação (L x O)	6 metros x 10 metros
Beiral (R)	0,5 metros
Espessura da madeira da tesoura (E)	0,15 metros
Distância entre ripas ( $D_1$ )	0,3 metros
Distância entre caibros ( $D_2$ )	0,5 metros
Distância entre terças ( $D_3$ )	1,5 metros

Fonte: Autoria própria.

A quantidade de madeira foi obtida de duas formas, a primeira utilizando-se as equações desenvolvidas neste trabalho e a segunda foi realizada por um profissional da área, que não teve acesso as equações e só recebeu os dados da tabela para a realização dos cálculos. Os resultados obtidos estão apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Resultados do cálculo da quantidade de madeira

Quantidade de material calculada (em metros)				
Método	Armação ( $M_T$ )	Ripas ( $M_1$ )	Caibros ( $M_2$ )	Terças ( $M_3$ )
Modelo	17,44910 m	286 m	168,08906 m	66 m
Profissional	20 m	295 m	175 m	70 m

Fonte: Autoria própria.

Com base nos dados da Tabela 2 é possível ver que os modelos desenvolvidos tiveram uma boa aproximação do que foi calculado manualmente. As melhores aproximações foram nos elementos da armação, o que pode ser atribuído ao cálculo destes ser mais simples em relação à armação. A maior diferença da metragem de madeira, que ocorreu no cálculo da armação, bem como as menores diferenças dos demais elementos, pode ser atribuída a experiência do profissional da área, que considera as perdas de material na execução da obra, sempre optando por comprar mais material do que o necessário.

## CONCLUSÃO

O intuito deste trabalho foi o desenvolvimento de um modelo matemático, formado por um conjunto de equações cujo objetivo era a medição da quantidade de madeira necessária para se construir um telhado. Após a elaboração do modelo, ele foi testado em uma situação prática real e comparado com o cálculo de um profissional da área.

Com o teste, foi possível concluir que o modelo pode sim ser aplicado em situações reais, desde que o tipo de telhado seja analisado previamente, podendo as equações aqui desenvolvidas serem facilmente adaptadas e usadas como base para o cálculo de estruturas em diferentes tipos de telhados com duas ou mais águas. Além disso, recomenda-se que, caso as equações aqui sejam aplicadas em uma situação, seja utilizada uma quantidade de madeira com adição de 5% ao resultado obtido, que seria uma média para a quantidade de material que seria perdida na realização de cortes.

Com isso, comprova-se a importância e aplicabilidade de conceitos matemáticos, neste caso a trigonometria, como meios eficientes para resolução de problemas práticos no cotidiano da sociedade moderno, algo que muitas vezes não é considerado.



## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Prof. Kissia Carvalho por seu auxílio no desenvolvimento deste trabalho.

## REFERÊNCIAS

CONCEIÇÃO, F. H. G. et al. Importância da Aplicabilidade da Matemática no Cotidiano: Perspectiva do aluno Jovem e Adulto. In: II ENCONTRO CIENTÍFICO MULTIDISCIPLINAR, 2., 2016, Aracaju. **Anais...** . Aracaju: Fama, 2016. p. 94 - 104.

GAIESKI, R. V. **Trigonometria e Aplicações**. 2014. 51 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2014.

MILITO, J. A. de. **Técnicas de Construção Civil**. 2009. Disponível em: <<http://demilito.com.br/apostila.html>>. Acesso em: 25 jul. 2018.

PFEIL, W.; PFEIL, M. **Estruturas de Madeira**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003. 224 p.

UBERTI, G. L. **Uma Abordagem das Aplicações Trigonométricas**. 2003. 53 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

AYMONE, J. L. F. Geometria Descritiva, Matemática e Computação Gráfica para o Cálculo da Área de Telhados. **Revista de Ensino de Engenharia**, [s.l.], v. 34, n. 2, p.45-52, 3 dez. 2015.