A ÁLGEBRA E A SUA AXIOMATIZAÇÃO

Andréa Maria Ferreira Moura

Universidade Federal Rural do Semi-Árido, andreamfm@ufersa.edu.br

RESUMO
Neste trabalho, realizamos um breve levantamento histórico com o intuito de descrevermos o caminho trilhado pela álgebra até sua axiomatização, algo que só aconteceu no início do século XIX. A relevância do tema se apresenta pelo fato de a geometria ter sido axiomatizada quase simultaneamente ao nascimento da matemática como ciência, enquanto a álgebra demorou quase dois mil anos para se axiomatizar. Como consequência dessa realidade, os conhecimentos algébricos, para serem validados, tiveram que se subordinar aos geométricos, visto que essa era a única forma de verificação de verdade matemática aceita. No presente trabalho, apresentamos exemplos dessa subordinação, expondo a demonstração geométrica do quadrado da soma e um método para resolver equações do segundo grau via geometria. Diante do exposto, a pesquisa tem por objetivos: compreender os principais fatores que contribuíram para que a álgebra fosse axiomatizada tão tardiamente, explicar as mudanças que ocasionaram a superação dos obstáculos a axiomatização da álgebra e elucidar a importância da axiomatização nas áreas de conhecimento que compõem a matemática. Embora não seja um dos seus objetivos, a pesquisa oportuniza também a compreensão da construção da matemática como ciência, algo que se inicia com os gregos, com a criação do método axiomático dedutivo. Essa concepção de matemática iniciada pelos gregos está no centro da problemática que envolve a dificuldade de construção de um modelo axiomático para a álgebra. Portanto, essa dificuldade irá perdurar até o início do século XIX, quando a necessidade da legitimação de uma nova concepção para a matemática torna-se algo vital ao desenvolvimento dessa ciência. Finalmente, com a adoção da atual concepção de matemática como ciência formal, todos os obstáculos para axiomatização são transpostos.

PALAVRAS-CHAVE: Axiomatização, Álgebra, Geometria.

INTRODUÇÃO

A álgebra foi reconhecida como uma área da matemática independente da Geometria e da Aritmética apenas depois da sua axiomatização, algo que só ocorreu no século XIX, embora existam registros de conhecimentos algébricos desenvolvidos por povos da Antiguidade, como por exemplo, métodos de resolução de equações do primeiro e segundo grau desenvolvidos por povos antigos.

Para compreendermos essa longa jornada trilhada pela álgebra até sua axiomatização, algo que durou quase 2.000 anos, precisamos compreender quais os fatores ocasionaram essa demora. Para alcançarmos o pretendido, optamos por subdividir a pesquisa em três momentos. No primeiro momento, dedicamo-nos a entender a importância da axiomatização nas áreas de conhecimentos que compõem a matemática. Para tanto, iniciamos o estudo da matemática realizada pelos povos primitivos e avançamos até a criação do método axiomático dedutivo pelos gregos, por volta do século III a.C.

Em um segundo momento, explicamos os motivos da subordinação do conhecimento algébrico em relação ao geométrico e exemplificamos essa subordinação por meio de demonstrações geométricas de resultados algébricos.

Por fim, dedicamo-nos a elencar as descobertas que incitaram uma nova forma de pensar e de ser fazer matemática que possibilitaram a queda das barreiras que impediam a axiomatização algébrica.

No intuito de obter o conhecimento necessário para a realização da pesquisa, foi feita uma análise bibliográfica em livros e trabalhos científicos que abordam acontecimentos históricos relacionados ao tema. Portanto, a metodologia adotada foi uma pesquisa bibliográfica de cunho histórico.

A IMPORTÂNCIA DA AXIOMATIZAÇÃO

Para que possamos perceber o quanto a axiomatização é importante para as áreas de conhecimento que compõem a matemática, vamos iniciar estudando os primeiros registros matemáticos da humanidade.

A matemática produzida pelas primeiras civilizações, tais como a babilônica, a suméria e a egípcia, denominada por alguns autores como civilizações pré-gregas, se caracteriza pelo forte caráter prático. A matemática pré-grega era desenvolvida basicamente em torno da necessidade de resolução de problemas agrários, comerciais e questões astrológicas ligadas à localização. Portanto, podemos dizer que os aspectos motivadores para o surgimento da matemática na Antiguidade estão diretamente relacionados a resoluções de problemas do cotidiano. O trecho que segue, retirado da obra de Eves, resume muito bem o cenário matemático dessas civilizações.

> Assim, pode-se dizer que a matemática primitiva originou-se em certas áreas do Oriente Antigo primordialmente como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e à engenharia. Essas atividades requeriam o cálculo de um calendário utilizável, o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para ser empregado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos, a criação de métodos de agrimensura para a construção de canais e reservatórios e para dividir a terra e a instituição de práticas financeiras e comerciais para o lançamento e a arrecadação de taxas e para propósitos mercantis. (EVES, 2011, p. 57)

Portanto, não é possível atribuir a essas civilizações que se desenvolveram antes da grega o nascimento da matemática como ciência nos moldes como a entendemos hoje. Pois não existia até então uma necessidade de entender a matemática além do prático. Nessas civilizações não existia a preocupação com a generalização, as situações eram trabalhadas de forma particularizada, o importante era apenas descrever o processo para se obter um resultado, ou seja, entender como se faz.

Fossa (2004), em seu trabalho intitulado "Dois momentos notáveis na vida da matemática: o nascimento e a maioridade", chama a matemática praticada pelos povos antigos de *protomatemática*, pelo fato de sua existência estar atrelada, até então, somente à dependência humana para resolução de problemas rotineiros e não ter ligação nenhuma com sua existência por si só. No entanto, ele não considera que essa matemática seja menos importante, apenas chama a atenção para o fato de ser uma matemática simples e rudimentar. Portanto, podemos classificá-la como a precursora da ciência matemática que surgiria séculos depois com os gregos.

Nos últimos séculos do segundo milênio a.C, ocorreram mudanças políticas e econômicas que criaram um ambiente propício para o crescimento comercial em toda a região do Mediterrâneo, principalmente onde se desenvolveu a civilização grega. Todos esses avanços propiciaram o surgimento de um ambiente de racionalismo crescente, e os filósofos, principalmente os gregos, começaram a fazer indagações importantíssimas em torno do conhecimento matemático. Eles começaram a levantar questionamentos que iam além do como, algo suficiente até então. Agora, o que mais intrigava os pensadores da época eram indagações de tipo por quê. Os filósofos não mais se contentavam com explicações do tipo "faz assim, depois faz assim", queria-se saber o porquê de se fazer assim para alcançar o objetivo desejado. Essa mudança de postura frente ao conhecimento matemático é registrada por Eves da seguinte forma:

> Pela primeira vez na matemática, como em outros campos, o homem começou a formular questões fundamentais como "*Por que* os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?" e "*Por que* o diâmetro de um círculo divide esse círculo ao meio?". Os processos empíricos do Oriente antigo, suficientes o bastante para responder questões na forma de *como*, não mais bastavam para as indagações mais científicas na forma de *por que*. Algumas experiências com o método demonstrativo foram se consubstanciando e se impondo, e a feição dedutiva da matemática, considerada pelos doutos como sua característica fundamental, passou ao primeiro plano. Assim, a matemática, no sentido moderno da palavra, nasceu nessa atmosfera de racionalismo e em uma das novas cidades comerciais localizadas na costa oeste da Ásia Menor[1]. (EVES, 2011, p. 94)

Com essa mudança de atitude frente ao conhecimento matemático, surgiu a necessidade da criação de um modelo no qual se pudesse provar, de forma clara, que as respostas dadas aos problemas práticos eram verdadeiras e tinham uma justificativa sólida que as embasasse. Esse

[1] Hoje, conhecida como território asiático da Turquia. Chamada pelos gregos de Anatólia, banhada pelos três mares da região, Negro, Egeu e Mediterrâneo. Uma península situada entre os continentes Europeu e Asiático.

modelo é o que hoje conhecemos como método axiomático dedutivo, e para uma corrente de historiadores matemáticos a criação do método dedutivo pelos gregos é apontada como o nascimento da matemática como ciência. Fossa (2004) defende esse ponto de vista ao definir a matemática como sendo as áreas de investigação que validam suas proposições através do método axiomático. Nesse mesmo trabalho, o autor reforça ainda mais essa ideia ao apresentar a seguinte constatação:

> [...] parece que não houve uma só disciplina identificada como “matemática” até a época dos pitagóricos. Houve, sim, uma multiplicidade de práticas inter-relacionadas, mas, independentes umas das outras: [...] São inter-relacionadas pelo fato de que era o conhecimento de número e das operações aritméticas que era necessário para lidar com estas práticas. Mas, foi possível vê-las como uma única disciplina – a matemática – somente quando várias dessas práticas foram transformadas pela adoção do método axiomático. (FOSSA, 2004, p. 3)

É atribuído a Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C.) o crédito de ter sido o responsável por desenvolver o método axiomático dedutivo. O método aristotélico consistia em criar afirmações tidas como verdades absolutas e que fossem autoevidentes, e essas afirmações inquestionáveis denominadas de premissas seriam a base para se demonstrar todo e qualquer conhecimento matemático. Ainda sobre a criação do método axiomático dedutivo, encontramos em Fossa (2001, p. 111) a seguinte explanação. Para esse autor, o método

> Baseia-se na seguinte reflexão: é impossível demonstrar toda proposição verdadeira porque toda demonstração apela a outras proposições (premissas) que encerram a evidência para a proposição a ser demonstrada. Portanto, para demonstrar uma proposição precisamos mostrar que todas as suas premissas são verdadeiras que, por sua vez, acarretam novas premissas, e assim por diante. Para evitar, de um lado, um círculo vicioso e, por outro lado, um regresso ao infinito é necessário pressupor algumas proposições sem demonstrá-las. Chama-se estas proposições de axiomas ou postulados e, segundo Aristóteles, elas devem ser tão evidentes que todo mundo consentiria em aceitá-las. (FOSSA, 2001, p. 111)

A criação do método axiomático dedutivo possibilitou uma ampliação dos conhecimentos matemáticos, pois a partir dele a matemática perde o caráter de apenas uma ferramenta dos problemas cotidianos e começa a se edificar como ciência.

Nessa estruturação da matemática como ciência, o empírico, característica que a acompanhava até então, não perde seu papel de destaque. Na verdade, passa a ser um fator determinante, pois é muito mais fácil obter verdades autoevidentes quando não se é um ramo matemático abstrato, como é o caso da álgebra, e sim, um ramo prático e ligado ao mundo físico, como é o caso da geometria.

Portanto, o modelo dedutivo aristotélico, no qual se exige que os axiomas sejam afirmações verdadeiras e autoevidentes, fez com que a geometria fosse a primeira área da matemática a ser axiomatizada, visto que trata diretamente com conhecimentos palpável e manipulável, conhecimentos empíricos ligado ao mundo físico. Em contrapartida, a álgebra é o ramo da matemática que generaliza a aritmética, consequentemente não trata de assunto diretamente relacionado à vida prática, logo, torna-se difícil construir axiomas com característica de autoevidência para a álgebra.

Com a criação do método axiomático, inaugurou-se um modelo de se fazer matemática no qual tudo deve ser demonstrado tendo por base algumas verdades primeiras. Nesse contexto, a geometria demonstrativa por ser a única área axiomatizada ganha a posição de verificadora do rigor e verdade matemática. Essa conclusão pode ser reforçada com as seguintes palavras de Fossa (2008, p. 144): “[...] os gregos, especialmente com a descoberta da axiomatização, radicalizaram esse procedimento e fizeram com que a apresentação de resultados algébricos fosse feita através da geometria. De fato, em relação a demonstrações matemáticas, a geometria foi norma”.

Portanto, diante da ausência de um sistema axiomático para a álgebra, seus conhecimentos para serem validados, tinham que ser comprovados por meios geométricos, uma vez que essa era a única forma de comprovar a veracidade de um resultado matemático.

Diante do exposto, fica claro que todo ramo da matemática, para ser independente, tem que ser axiomatizado, e que da forma como a matemática nasce como ciência não houve espaço para a álgebra se constituir como área da matemática independente da geometria, pois a autoevidência não é uma característica inerente à álgebra.

A SUBORDINAÇÃO DA ÁLGEBRA A GEOMETRIA

A necessidade de todos os resultados matemáticos terem que ser justificados geometricamente acarretava limitações ao desenvolvimento da matemática. Um exemplo claro dessa limitação é a não aceitação da existência dos números negativos, uma vez que estes não podem ser conceituados geometricamente. Portanto, tínhamos um método muito restrito na forma de pensar a matemática naquela época, acabando por subjugar as demais áreas à geometria. Reforçando esse pensamento, Fossa (2001, p. 107) diz:

> Da época clássica da Grécia até aproximadamente o início do século XVII, a matemática ocidental[2] era principalmente a geometria. E era principalmente a geometria não somente porque o maior esforço dos matemáticos deste longo período era dedicado à resolução de problemas geométricos, mas também porque o desenvolvimento dos outros ramos da matemática – especialmente a aritmética e a álgebra – foi condicionado pela geometria. Demonstrações de proposições eram sempre feitas demonstrando as proposições geométricas equivalentes e a interpretação dos conceitos matemáticos era sempre feita em termos geométricos.

Para melhor compreender como os resultados algébricos eram demonstrados antes da sua axiomatização, apresentaremos alguns exemplos de demonstrações geométricas para resultados algébricos.

DEMONSTRAÇÃO DO QUADRADO DA SOMA

Diante da impossibilidade de demonstrar o quadrado da soma apenas realizando as manipulações algébricas como fazemos hoje, os gregos analisavam o problema de uma forma geométrica, ou seja, relacionavam os entes matemáticos em questão a uma forma geométrica. Por exemplo, o termo x^2 em termos geométricos representa um quadrado de lado desconhecido x e área igual a x², como mostra a figura abaixo:

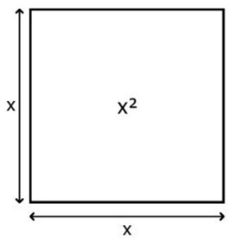

Imagem 1

Assim, o quadrado da soma $(a+b)^2$, para os gregos, nada mais era do que calcular a área de um quadrado de lado $x = a + b$, uma vez que esta seria a $x^2 = (a+b)^2$, em que a e b são medidas conhecidas. Dentro desse quadrado de lado $x = a + b$ é sempre possível construir dois quadrados menores de áreas a^2 e b^2, já que ambos esses quadrados têm lados a e b menores que

[2] Em 395 d.C., o Império Romano foi dividido em duas partes: o Império Ocidental e o Império Oriental. Como parte da região que envolvia a Grécia e outras cidades em seus arredores faziam parte do lado do Império Ocidental, tem-se a denominação “matemática ocidental”.

$a+b$, e quando colocados lado a lado temos exatamente o lado do quadrado maior de lado $a+b$, como podemos verificar na imagem abaixo:

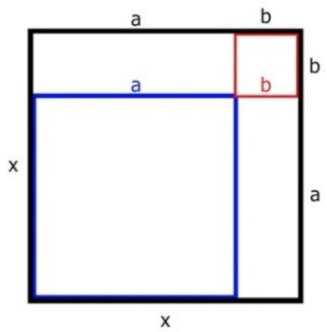

Imagem 2

Continuando o raciocínio, observa-se que os espaços que sobram depois dessa construção são dois retângulos de áreas $a \cdot b$. Portanto, o quadrado de área $x^2 = (a+b)^2$ pode ser decomposto na soma de cada uma das partes menores que o compõem, ou seja, dois quadrados, um de área a^2 e outro de área b^2 e dois retângulos de áreas $a \cdot b$, obtendo assim a seguinte identidade algébrica conhecida atualmente como um dos produtos notáveis.

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot b.$$

EQUAÇÕES DO 2º GRAU – MÉTODO DO RETÂNGULO

Para encontrar as raízes da equação do segundo grau do tipo $x^2 - ax + b = 0$ por meios geométricos, iniciamos construindo um retângulo de comprimento a, e com altura desconhecida x. Em seguida, devemos formar um quadrado de lado x inscrito neste retângulo e ajustar o valor de x, de modo que a diferença entre o retângulo maior, de área ax, e o quadrado de área x^2 seja igual a b, ou seja, a área do retângulo $x(a-x)$ tem que ser igual a b. A figura abaixo ilustra o comentado:

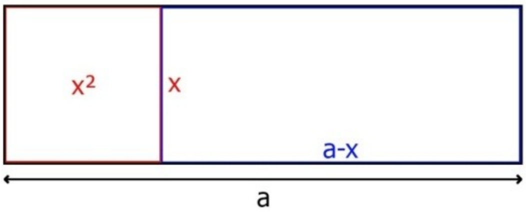

Imagem 3

Quando temos $x(a-x)=b$, x será uma das raízes da equação e $(a-x)$ será a outra.

É importante ressaltar ainda que era desenvolvido um método para a obtenção da resolução de cada tipo particular de equação do segundo grau, não era conhecida ainda uma fórmula geral de resolução como conhecemos hoje, e essa ausência se justifica em parte pela necessidade de adequação da álgebra à geometria.

DESCOBERTAS QUE LEVARAM À AXIOMATIZAÇÃO DA ÁLGEBRA

Vimos até o momento que a matemática se constitui como ciência embasada na concepção de que tudo deveria ser analisado e justificado dentro dos limites do universo real (geometria euclidiana); caso contrário, corria-se o risco de ser taxado de maluco por defender ideias impossíveis de serem demonstradas. Portanto, a autoevidência é uma caraterística que caminhou lado a lado com a história da matemática, e como já comentado, foi devido a ela que a álgebra teve que se subordinar por quase dois mil anos aos conhecimentos geométricos.

Porém, com o passar dos séculos, foram acumulando-se descobertas matemáticas que, embora consistentes, esbarravam no entrave da autoevidência, ou seja, não eram aceitas, pois não era possível justificá-las geometricamente. Entre essas, podemos citar a problemática sobre a existência dos números negativos, algo conhecido já na Antiguidade; a descoberta de métodos de resolução de equações de terceiro e quarto grau por Girolamo Cardano (1501-1576), no século XVI; a descoberta dos imaginários, por Rafael Bombelli (1526-1572) neste mesmo século; o fato de a matemática dos séculos XVII e XVIII ter se desenvolvido essencialmente em torno do estudo dos infinitesimais, que posteriormente deram origem ao cálculo diferencial e integral, desenvolvido por

Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried W. Leibniz (1646-1716). Todos esses avanços contribuíram para a construção de uma atmosfera racional entre os matemáticos, o que culminaria na busca de uma nova concepção para a matemática.

A partir de agora apresentaremos os principais acontecimentos que proporcionaram uma reviravolta na forma de enxergar a matemática e que, consequentemente, possibilitou a separação da álgebra da geometria.

AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS E A QUEDA DA AUTOEVIDÊNCIA

O quinto postulado de Euclides, também conhecido pelo postulado das paralelas[3], teve papel crucial no desencadear dos acontecimentos que proporcionaram a axiomatização algébrica. Devido à particularidade de não ter caráter autoevidente claro, como os quatro anteriores, diversos pensadores indagavam se esse postulado realmente deveria ser caracterizado como um postulado. Cogitava-se rebaixá-lo a teorema, ou então substituí-lo por outro equivalente, no qual a autoevidência fosse mais perceptível.

As discussões relacionadas ao quinto postulado surgiram com a sua criação e perduraram por vários séculos. Por diversas vezes foram apresentadas demonstrações para o quinto postulado, mas foi mostrado posteriormente que todas eram, na verdade, equivalentes ao próprio postulado. Foi somente por volta do século XVIII, por meio dos estudos de Girolamo Saccheri (1667-1733), que surgiu a primeira investigação realmente científica do quinto postulado de Euclides. Saccheri, na verdade, tentava mostrar que a única possibilidade para os ângulos D e C de um quadrilátero ABCD, com ângulos A, B retos e lados AD e BC iguais, era que esses ângulos fossem retos. Com isso ele teria uma demonstração para o quinto postulado. Para fazer isso, Saccheri iniciou traçando as diagonais do quadrilátero e, utilizando regras de congruência, mostrou facilmente que os ângulos D e C são iguais, podendo ser agudo, reto ou obtuso. O passo seguinte era descartar a possibilidade de ser agudo ou obtuso, utilizando a ideia de redução ao absurdo. Ao invés de obter êxito na sua

[3] O quito postulado de Euclides que enuncia: "É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos". Também conhecido pelo postulado das paralelas, foi o postulado mais discutido no meio acadêmico da época devido a sua carência no quesito de autoevidência.

tarefa, Saccheri conjecturou diversos teoremas presentes no que chamamos hoje de geometria não euclidiana. Tais teoremas foram obtidos principalmente na tentativa de descartar a possibilidade de o ângulo ser agudo.

Posteriormente, foram publicados diversos trabalhos que reforçavam as hipóteses dos ângulos sugeridas por Saccheri. Mas, o real embasamento necessário para as descobertas de Saccheri partiu do alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), do russo Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856) e do húngaro Janos Bolyai (1802-1860). Embora atualmente se acredite que Gauss foi o primeiro a obter conclusões pertinentes sobre as hipóteses dos ângulos, o mérito da descoberta da existência de geometrias não euclidianas foi dado a Bolyai e Lobachevsky, pois Gauss não publicou nada sobre o assunto na época. A explicação para Gauss resistir em publicar suas descobertas embasava-se justamente na impossibilidade de enquadramento dessas descobertas ao modelo de matemática existente. Eves (2011, p. 545) retrata muito bem essa situação no seguinte trecho: “Foi o desejo de evitar os protestos dos ‘beócios’ que impediu Gauss de publicar seus pontos de vista sobre a geometria não euclidiana”.

Tanto Bolyai como Lobachevsky refinaram a forma de enxergar a problemática em torno da hipótese dos ângulos por meio de novas considerações e possibilitou uma forma mais eficiente de condensar toda a hipótese, criando assim uma nova geometria, que não mais precisava dos postulados euclidianos para se sustentar.

A defesa da existência dessas novas geometrias apoiava-se, entre outras coisas, no fato de que a teoria desenvolvida não possuía regras autoconflitantes, ou seja, era uma teoria consistente. Esse pensamento fez nascer uma nova vertente para se analisar a matemática, na qual não era mais necessário restringir-se às fronteiras do real, mas sim, criar modelos que seriam embasados em regras que não gerassem conflitos entre cada uma delas, ou seja, que possuíssem consistência interna. Esse pensamento é retratado por Eves (2011), no trecho que segue, no qual ele relata sobre as consequências do advento das geometrias não euclidianas:

> Despedaçou-se uma convicção secular e profundamente arraigada de que apenas uma geometria era possível e abriu-se caminho para a criação de muitos outros sistemas geométricos. Os postulados da geometria tornaram-se, para os matemáticos, meras hipóteses cuja veracidade ou falsidade físicas não lhes diziam respeito; o matemático pode tomar seus postulados para satisfazer seu gosto, desde que eles sejam consistentes entre si. As características de “autoevidência” e “veracidade” atribuídas aos postulados desde os tempos dos gregos deixaram de ser consideradas pelos matemáticos. (EVES, 2011, p. 544)

O surgimento das geometrias não euclidianas e, consequentemente, o início do desligamento entre a matemática e o mundo físico fez com que, finalmente, a necessidade de autoevidência para um postulado perdesse força no universo matemático. Esse novo cenário passou a encorajar os demais pensadores da época a não terem que se preocupar em serem chamados de malucos, caso suas teorias não tivessem explicações no mundo físico, ou seja, a necessidade de adequar suas premissas a um conjunto de leis limitadas a nossa percepção estava diminuindo.

A AUTONOMIA ALGÉBRICA

Com a descoberta das geometrias não euclidianas garantiu-se aos estudiosos um livre-arbítrio, até então não vivenciado no mundo matemático, permitindo assim o aparecimento de novos estudos inovadores que acabariam por derrubar de uma vez por todas a necessidade de autoevidência. Entre esses estudos destacamos o conjunto de descobertas que possibilitou a concepção da álgebra em termos de estrutura abstrata. Entre essas, destacamos os trabalhos desenvolvidos por William Hamilton (1805-1865), Hermann Grassmann (1809-1877) e Arthur Cayley (1821-1895), sobre álgebras que satisfazem leis estruturais diferentes daquelas obedecidas pela álgebra usual, por exemplo, as álgebras não comutativas e álgebras não associativas, como é caso das álgebras de Jordan e álgebras de Lie.

Outro nome que não pode ser esquecido na construção dessa nova concepção de matemática é o de George Boole (1815-1864). Ele é o responsável por dar continuidade aos estudos sobre o tratamento científico dos princípios fundamentais da álgebra. Para Fossa (2004, p. 6) “[...] a partir de Boole, a matemática passa a ser vista como sendo completamente abstrata e de natureza formal, envolvendo questões de verdade e falsidade somente em suas aplicações”.

Portanto, o surgimento das geometrias não euclidianas e o fortalecimento da álgebra abstrata por meio de inúmeros estudos realizados a partir do enfraquecimento, eliminação ou substituição de um ou mais postulados da álgebra usual por outros, de modo que a teoria gerada fosse ainda consistente, reflete o novo caminho que a matemática estava trilhando. Caminho este no qual prevalece a generalização e a abstração.

Para finalizar, não podemos deixar de mencionar a relevância da discussão em torno da legitimação dos números negativos e imaginários. A concepção de matemática iniciada pelos gregos impossibilitava a existência desses números, e descartá-los, como defendiam alguns, não era a melhor solução. Dessa forma, toda a problemática a esse respeito é vista como mais um aspecto impulsionador da busca por uma nova concepção de matemática. A importância dessa problemática na construção dessa nova concepção é destacada por Nagel (1935). Fossa interpretando este autor, afirma que ele

> [...] destaca o surgimento dos números negativos e imaginários – os assim chamados "números impossíveis" - como o principal responsável pela mudança na definição de Matemática. Com o aparecimento destes números houve a necessidade, segundo o referido autor [Nagel], de conceber a Matemática num sentindo mais amplo ao que se entendia anteriormente; nesse sentido essa ciência não poderia ser vista unicamente como ciência dos números e das magnitudes (definição ainda encontrada em certos livros). Essa responsabilidade recai sobre os números imaginários, pois para que eles fossem verdadeiramente estabelecidos fez-se necessária uma revisão da noção tradicional concebida por Matemática. (FOSSA, 2007, p. 62)

Após toda a resistência imposta à álgebra, ela inicia sua axiomatização com os estudos de George Peacock (1791-1858) sobre os princípios fundamentais desse ramo matemático, o que culminou com a publicação, em 1830, de *Treatise on Algebra*, no qual Peacock procurou dar à álgebra um tratamento lógico semelhante ao dado à geometria por Euclides em *Os Elementos.*

Com a independência da algébra, a matemática avança muito rapidamente nos séculos seguintes, e atualmente vivenciamos o verdadeiro espírito da matemática, o da abstração.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o surgimento das geometrias não euclidianas e a queda da autoevidência, a matemática passa a ter uma abordagem diferente com relação ao método dedutivo. Antes, era necessário partir de premissas tidas como verdades e autoevidentes para se construir uma teoria; agora, o intuito é criar axiomas que necessitam apenas de que os resultados derivados deles tenham consistência interna. O que acabou abrindo novos horizontes para a álgebra, de modo que deixasse de ser tratada simplesmente como aritmética simbólica, como acontecia até então, e que ganhasse o status de área de estudo puramente hipotética dedutiva e formal, completamente independente.

Nessa nova concepção, os conhecimentos matemáticos não precisam ser interpretados no mundo físico, são apenas abstrações, e a matemática passa a ser concebida como uma ciência formal.

REFERÊNCIAS

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5ª. ed. Campinas- SP: Editora da Unicamp, 2011.

FOSSA, J. A. A história da geometria e a epistemólogia da matemática. In: FOSSA, J. A. **Ensaios sobre a Educação Matemática**. Belém: EDUEPA, 2001. p. 105-122.

______. **Dois momentos nótaveis na vida da matemática:** o nascimento e a maioridade. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife: SBEM. 2004. p. 1-11.

______. O Triângulo dos Algebristas e a Idade Áurea da Matemática. In: FOSSA, J. A. **Cabelos negros, olhos azuis e outras feições das matemáticas puras e aplicadas**. Natal: EDUFRN, 2007. p. 59-71.

______. A Álgebra de Cardano a Vieté. In: (ORG.), I. A. M. **Matemáticas da Época de Andrea Palladio**. Natal: EDUFRN, 2008. p.141-194.