



**UM ESTUDO SOBRE O PROBLEMA DOS QUADRADOS A PARTIR DE  
INTERPRETAÇÕES DE IMAGENS GEOMÉTRICAS: UM MOMENTO DE  
CONSTRUÇÃO DE SABERES**

**Formação de Professores e Educação Matemática (FPM) – GT8**

MARCOS ANTONIO HELENO DUARTE

Secretaria de Educação de Pernambuco

*marcosduartte@yahoo.com.br*

**RESUMO**

O artigo relata a construção de saberes a partir de um problema de natureza geométrica apresentada aos professores cursistas do curso de Pós-graduação em Matemática da Universidade de Pernambuco em Garanhuns-PE, nas aulas da disciplina de avaliação e currículo. A referida atividade teve início com apresentação do problema dos quadrados, que teve como propósito inicial fazer a composição de quadrados com vários outros de mesma dimensão, visando-se obter a formação de novos quadrados. Nesse sentido, um dos principais objetivos foi o de perceber regularidades entre as figuras que foram se formando e, com isso identificar as várias habilidades e competências que poderiam ser trabalhadas, tanto no campo das observações quanto das deduções. Com isso foi possível perceber conceitos referentes a: sequências numéricas e de figuras, lei de formação de uma sequência, generalização da fórmula da soma dos quadrados e indução matemática entre outros conceitos.

Palavras-chaves: saberes matemáticos, formação de professores, educação matemática

**1. Introdução**

Uma das preocupações iniciais do trabalho foi a de descobrir formas de estratégia de ensino, no intuito de refletir que o ensinar deve começar sempre com o resgate dos saberes matemático que todo aluno possui e que, novos conceitos vão sendo introduzidos na medida em que as discussões são enriquecidas pelos professores de matemática, que transformam esses saberes em algo novo. Isso porque professores e alunos na maioria das vezes possuem uma relação assimétrica em relação ao saber. Para minimizar isso, é esperado que na relação didática seja fortalecida essa aproximação visando a mudar o quadro inicial do aluno face ao saber. Um dos caminhos é conferir ao professor um papel fundamental nessa relação didática, que segundo Brousseau (1996) é o de propiciar ao aluno um novo saber científico através de viabilização de situações de ensino. Diante desses aspectos relativos à relação didática se estabeleceu a construção de situação didática na qual o professor elenca como forma de propiciar a construção de conceitos pelos alunos. Nesse contexto, pode-se destacar a importância dos elementos pertencentes ao estudo do campo geométrico, tanto na avaliação da aprendizagem como na avaliação de larga escala no Brasil. Sistemas de avaliações como:



SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), SAEPE (Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco), PROVA BRASIL dentre outros, apresentam nos seus resultados de desempenhos um déficit considerável quando a questão se trata de domínios de um conjunto de habilidades no campo geométrico em conexão com os campos numéricos e algébricos. Estas questões nos remetem ao objetivo maior do trabalho desenvolvido que foi o de perceber regularidades entre figuras formadas e, com isso identificar as várias habilidades e competências no tocante aos campos geométricos e numéricos e algébricos: sequências numéricas e de figuras, lei de formação de uma sequência, generalização de fórmula da soma dos quadrados, indução matemática dentre outros.

A criação e mobilização de saberes por meio de situações didáticas criadas é uma das condições que contribuem para a prática docente do professor no exercício de suas funções, associado a sua prática diária, que passa a desenvolver saberes específicos gerados no seu próprio meio, que brotam dessas experiências e são por ela validados, incorporando-se experiências individuais e coletivas sob a forma de hábitos e habilidades, de saber fazer e de saber ser. Tudo isso faz parte do que pode ser chamado de saberes experienciais ou práticos, que surgem como elementos constitutivos da prática do docente Tardif (2005). Trata-se de saberes que para Chakur (2001), são desenvolvidos pelos próprios professores em sua prática profissional. Por assim serem, são considerados como fator educativo com condicionantes no sistema de interação real e não abstrato. A partir dessas situações de interação do aluno com o objeto de estudo começa a surgir de forma natural um conjunto de habilidades e competências que norteiam a prática do professor.

Nessa direção é fato que o saber Matemático, em particular, o campo geométrico, integrado aos campos numéricos e algébricos, passam a ser objetos de nosso estudo e, está presente nos currículos escolares, por isso deve ser considerado como um campo científico, extenso, diversificado e contrariamente ao que se pensa em muitos segmentos da sociedade, um campo em permanente evolução nos dias atuais. Não podendo ser considerado um repertório de conhecimentos antigos e petrificados, assim, pode ser visto como uma fonte de modelos gerados que permitem nas mais diversas áreas: conceitos, relações entre conceitos, procedimentos e representações simbólicas e numéricas. Nessa direção, aprofundar conhecimento sobre situações criadas fortalece a contribuição dentro do próprio contexto Matemático, como também para outras áreas e novos campos do conhecimento.

Os saberes que servem de base para o ensino escolar, tais como são vistos pelos professores, não se limitam a conteúdos bem circunscritos que dependem de um conhecimento especializado. Eles abrangem uma grande diversidade de objetos, de questões, de problemas que estão todos relacionados com seu trabalho. Além disso, os saberes dos professores parecem ser plurais, compósitos, heterogêneo, pelo fato de trazerem à tona no próprio exercício do trabalho, conhecimentos e manifestações do saber fazer e do saber ser bastante diversificados, provenientes de fontes das mais variadas, as quais podem ser de naturezas diferentes.

Para Brousseau (1996), uma situação didática é formada pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre o professor, o aluno e o saber com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para o ensino e para aprendizagem de um conteúdo específico.

## 2. Metodologia

É importante destacar que o trabalho foi desenvolvido com um universo de vinte e quatro professores cursistas do curso de Pós-graduação em Matemática da UPE, campos Garanhuns em Pernambuco nas aulas da disciplina de avaliação e currículo, a qual possui na sua ementa do curso um conteúdo voltado que visa a situar o currículo no contexto da escolarização, na perspectiva de significação e ressignificação da prática pedagógica.

Para o desenvolvimento do trabalho tivemos os seguintes procedimentos: Inicialmente, foi solicitado que os alunos cursistas de forma individual observassem e registrassem informações a partir das apresentações de imagens de quadrados mostradas pelo professor da disciplina nos slides com auxílio Power Point. O intuito das apresentações das imagens dos quadrados foi o de gerar nos participantes a busca pela descoberta de regularidades que existissem nas formações não só do primeiro quadrado como da composição de vários outros e, com isso gerar discussões e análises acerca da percepção da natureza geométrica em conexão com a numérica e algébrica contida nas figuras.

As apresentações dos slides no Power Point feita pelo professor que continham as imagens dos quadrados foram apresentadas da seguinte forma: foi sugerido que fosse feito a leitura da imagem inicial de um único quadrado como o que está representado na figura 1 abaixo. Posteriormente, foi feita a partir da apresentação da imagem a seguinte pergunta: **quantos quadrados vocês estão vendo nesta figura?**



Fig.1

Para essa imagem apresenta da a resposta dada pelos professores foi de imediato um quadrado. Logo após esta resposta, é apresentado o segundo slide com a 2ª figura, e a mesma pergunta foi feita, ou seja, quantos quadrados vocês estão vendo nesta figura?

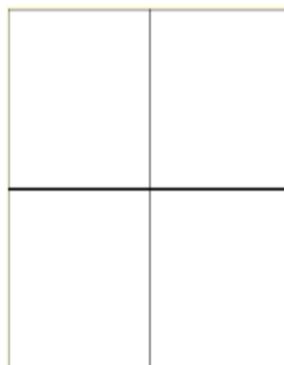
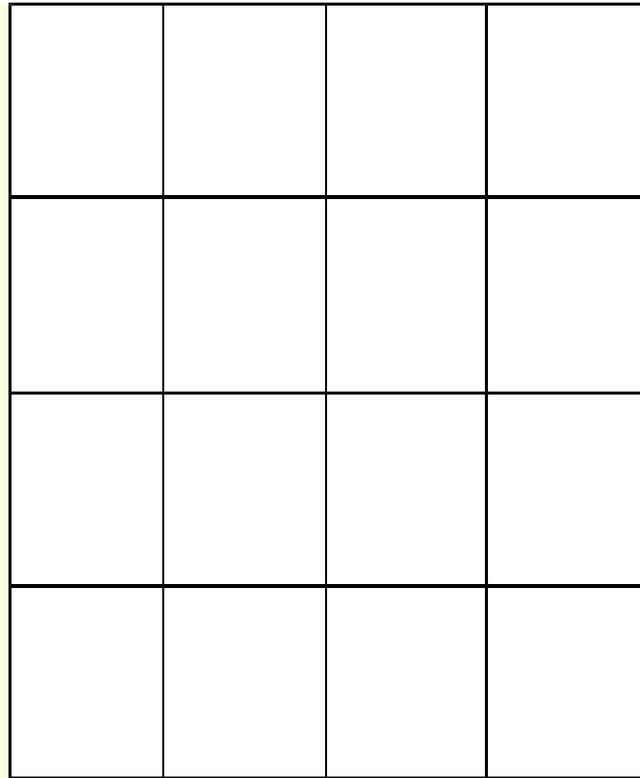


Fig. 2

Foi possível perceber que na resposta dada pelos professores no segundo slide continha grau de dificuldade maior com relação a primeira apresenta, mas deixaram claro que não existia complicação alguma respondendo cinco. Foi pedido que dissessem como chegou e argumentaram que foi levado em consideração não só os quatro quadrados, mas também o maior.

Na sequência, foi apresentado um terceiro slide com 3ª figura, e a mesma pergunta: quantos quadrados vocês estão vendo nesta figura?

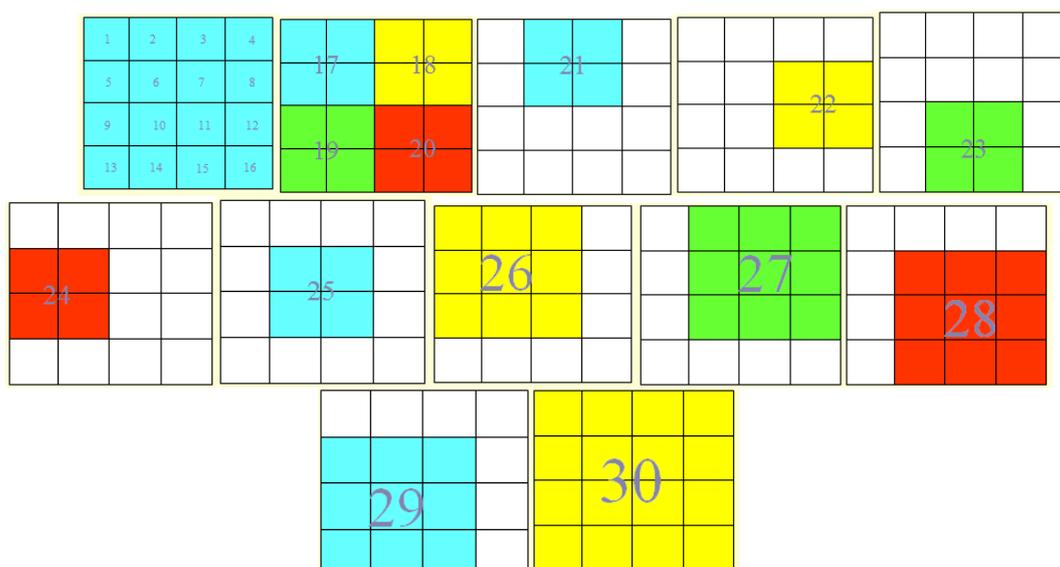


As respostas dadas de imediato foram que tinham dezesseis e dezessete quadrados, alegando que na lógica que se apresentaram as duas figuras anteriores, a conclusão foi evidente ou seja, dezesseis no total com o maior dezessete. Com essas afirmações cada aluno sentiu a necessidade de querer comentar com o colega próximo a ele sobre o que tinha encontrado. Alguns diziam que encontraram dezoito, outros diziam dezanove, vinte, vinte um, vinte dois, vinte três, dentre outras respostas que apareceram, como também registros envolvendo elementos novos na discussão. Nesse momento o professor mediando a situação registrou todas as respostas dadas. Foi percebido que no registro individual realizado pelos cursistas, continham observações bem diversificadas a respeito não só de sequência geométrica, mas, também numéricas e lei de formação, caracterizando assim a parte algébrica.

A partir dos cursistas observarem a diversidade de respostas registradas no quadro, foi lançado um novo questionamento pelo professor da disciplina: como poderíamos promover o ensino a partir da situação apresentada?

Para o novo questionamento lançado foi pedido que dentro do universo de vinte e quatro professores, formasse seis grupos de quatro pessoas, como o propósito de discutirem num grupo maior suas respectivas observações e análises construídas. Nesse momento foi possível perceber as conjecturas e as defesas pela argumentação que cada um tinha pelas evidencias chegadas. Como também discussões sobre hipóteses, dos testes dessas hipóteses e elaboração de contraexemplos, tudo isso forma espontânea promovendo a ideia de que, um problema gerador pode ocasionar mudanças nas relações entre os participantes do processo, sejam eles: professor, alunos e os saberes construídos.

Na discussão dos grupos formados foi possível perceber que professores sugeriram a possibilidade do uso de uma malha quadriculada no intuito de auxiliar a construção das figuras obtidas a partir da 3ª figura. Ao ser feito a construção na malha quadriculada, eles chegam a uma resposta que deixava claro como o total de quadrado sendo trinta. E foi apresentada a seguinte comprovação explicitada a seguir:

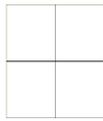


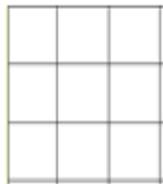
Após comprovação pela sistematização com a malha quadriculada, foi promovido um novo questionamento do tipo: qual (is) conceito(s) matemático(s) e suas relações estão em foco?

Esse questionamento tinha o propósito de ir mais além no sentido de formalizar conhecimentos nos campos geométrico, numérico e algébrico. Frente ao questionamento, os professores começaram a traçar relações entre as possíveis respostas que poderiam ser dadas. Para alguns professores no que diz respeito ao quadrado e suas divisões fracionárias, foi observado que o número de quadrados tem uma relação importante no conceito de potência de acordo com o número de lados desse quadrado. Os números naturais diferentes de zero, elevado ao quadrado, somando os seus resultados em uma seqüência é exatamente o número de quadrados de  $n$  lados.

Exemplificaram da seguinte forma:

Para o quadrado de lado 1, temos:  =  $1^2 = 1 \times 1 = 1$  quadrado.

Para o quadrado de lado 2, temos:  =  $2^2 = 4$  quadrados, logo, temos 1 quadrado que somado com quatro quadrados =  $1 + 4 = 5$  quadrados.

Para o quadrado de lado 3, temos:  =  $3^2 = 9$  quadrados,

Com essa linha de raciocínio os professores chegaram à seguinte conclusão:  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots$ , é uma seqüência composta por  $\{1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$ . Demonstrando com isso que a situação disparadora, o *problema dos quadrados*, possibilitou ampliar a construção de outros conceitos, podendo ser: números quadrados perfeitos, potência, além de promover noção de visão geométrica e algébrica, dentre outros. Possibilitando trabalhar habilidades no campo numérico, geométrico, algébrico e raciocínio lógico, bem como área e unidades de medidas.

A solução encontrada para seqüência de quadrados como sendo  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots$ , permitiu gerar um aprofundamento maior quando a intenção passou a ser a de encontrar uma expressão geral para representar a soma de todos os termos da seqüência, ou seja, um termo geral, o qual expressaria o número total de quadrados apresentados na 3ª figura.

Acredita-se que dessa maneira, estaríamos promovendo a ampliação das capacidades para estabelecer inferências e conexões lógicas, tomar decisões, abstrair significados e idéias de maior complexidade, para argumentar expressando ideias e pontos de vista com maior clareza. Contudo, os professores conjecturaram que a expressão que permite calcular a soma dos termos da sequência  $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$  obtida a partir do estudo do problema do quadrado não é explorada em nível de ensino médio, pois autores como Iezzi (2013), utilizam dessa sequência para obter a expressão  $a_n = n^2$ , lei de formação ou termo geral da sequência (1,4,9,16,25,...). No entanto, não apresenta lei de formação que representa soma dos termos para o problema dos quadrados aqui objeto de nosso estudo.

Diante das conjecturas apresentadas pelos professores, mesmo sem fazer referência a autores como Hefez (2009) que apresenta através do princípio de indução matemática uma validação para a lei de formação que representa a soma de termos da referida sequência como está representada abaixo no extrato retirado do livro, tiveram importância nesse estudo por trazer elementos que podem ser inseridos também na discussão.

Queremos validar a fórmula

$$P(n) : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Figura A - Extrato retirado do livro de Hefez, página 11

Contudo, diante da existência da fórmula, os professores procuraram comprovar o resultado referente ao total de quadrados (trinta) explicitados na sequência apresentado na malha quadriculada com a fórmula substituindo o “n” por quatro, ficando:  $p(4) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = [4(4+1)(2 \cdot 4 + 1)] / 6 = 30$ .

### 3. Resultados

Diante da exploração do problema dos quadrados, foi possível perceber que outras estratégias para introdução de conceitos de sequências, lei de formação de uma sequência, indução finita, conceitos de área na malha quadriculada, dentre outros, podem ser introduzidos fazendo uso de estratégias diversificadas a partir de imagens formadas com o recurso do Power Point, como foi o caso do problema dos quadrados. Acreditamos que o recurso associado a uma boa situação didática proposta pode ser um facilitador pelo fato de possibilitar trabalhar situações de simulações com imagens de forma simultâneas, que ficaria mais difícil se fosse usado só quadro e giz. Outro aspecto considerado diz respeito a parte lúdica em que se apresentou o problema dos quadrados, mas que pela riqueza das discussões levantadas a partir de observações e análises feitas pelos alunos, foi permitido

chegarmos a conclusões do tipo: o princípio de indução matemática como geralmente é explorado nos livros do ensino médio, não costuma discutir situações que sejam semelhantes a soma dos quadrados propostas aqui no nosso estudo, como também dedução da fórmula. Sendo comum usar sequência para obter a expressão  $a_n = n^2$ , lei de formação ou termo geral da sequência (1,4,9,16,25,...). Nesse sentido, podemos destacar Lorenzato (2006), que se refere a experimentação como sendo o melhor modo para se conseguir a aprendizagem com significado, uma vez que ela realça o “porque”, valorizando assim a explicação e a compreensão. Contudo, recaímos na discussão proposta por Pais (2001) referente ao saber científico e o saber escolar, o primeiro associado à vida acadêmica, criado nas universidades e, nos institutos de pesquisas, mas que não está necessariamente vinculado ao ensino básico, com natureza diferente do saber escolar (o segundo), que representa o conjunto de conteúdos previsto na estrutura curricular das várias disciplinas escolares valorizados no contexto da história da educação.

Nesta discussão proposta temos o processo de ensino que leva finalmente ao saber ensinado que é aquele registrado no plano de aula do professor e que não coincide necessariamente com a intensão prevista nos objetivos programados, colocando em evidência os desafios das estratégias e metodologias de ensino.

#### 4. Referências

BROUSSEAU, G. **Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques**. In :Didactique des Mathématiques, BRUM, J.(org). Lausanne- Paris: Delachaux, 1996.

CHAKUR, C. **Desenvolvimento Profissional Docente**: Contribuições de uma leitura piagetiana. Araraquara/SP: JM. 2001.

HEFEZ, A. **Indução Matemática**. Niterói, OBMEP,2009.

IEZZI, G. **Matemática ciência e aplicação**. 7ª Ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2013. Volume 1 (Ensino Médio).

LORENZATO, S. **Para aprender Matemática**. Campinas, Autores Associados. 2006. Coleção Formação de Professores

PAIS, L. C. **Tendências em Educação Matemática**: Didática da Matemática – Uma análise da influencia francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

TARDIF, M; LESSARD, C. **O trabalho docente**: elementos para uma teoria da docência como profissão de interações humanas. Petrópolis: Vozes, 2005.