

**UMA ANÁLISE QUANTITATIVA DOS PROBLEMAS QUE ENVOLVEM O
RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO EM LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA
DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio – GT 10

Pablo Egidio Lisboa da SILVA
Universidade Federal de Pernambuco
pabloegidio@gmail.com

Cristiane Azevedo dos Santos PESSOA
Universidade Federal de Pernambuco
cristianepessoa74@gmail.com

RESUMO

O objetivo da pesquisa apresentada no presente artigo foi fazer um levantamento e analisar a frequência com que são explorados os problemas que envolvem o raciocínio combinatório em livros didáticos de matemática destinados aos anos finais do Ensino Fundamental que foram aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) para o ano de 2014.. Nas sete coleções de Matemática analisadas, os tipos de problemas que tiveram maiores frequências absolutas foram a Permutação e o Produto Cartesiano. Não houve uma boa variação das representações simbólicas utilizadas, e os autores não trabalharam de alguma forma as propriedades invariantes do conceito de Combinatória, nem chamaram a atenção do professor sobre os diferentes significados envolvidos. Para um trabalho mais efetivo em sala de aula, os livros didáticos poderiam explorar mais e melhor os diferentes aspectos da Combinatória.

Palavras- chaves: Raciocínio Combinatório, Livro Didático, Campos Conceituais de Vergnaud.

1. INTRODUÇÃO

Em pesquisas recentes feitas no campo da Educação Matemática encontram-se estudos bastante consistentes relacionados ao livro didático, estudos que tentam descrever qual é seu principal papel dentro da sala de aula (VALENTE, 2008), se contribui ou não como uma ferramenta de constante apoio para professores e alunos dos anos iniciais e anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

O livro didático, um material pedagógico de longa data, é ainda hoje um recurso privilegiado nos processos de seleção e de comunicação dos conhecimentos escolares. Sua trajetória e permanência na rotina escolar o apresentam como um componente fundamental do sistema educacional sobre o qual recai uma grande parte das aprendizagens promovidas pelos projetos curriculares.

Conforme o Programa Nacional do Livro Didático - PNLD (BRASIL, 2014) o livro didático contribui para o processo de ensino-aprendizagem como um interlocutor que dialoga com o professor e com o aluno. Ressalta também que o livro didático é apenas um recurso auxiliar nesse processo, não podendo ocupar o papel dominante sobre a aprendizagem.

Uma atenção especial tem sido reservada ao tema Combinatória que inclui atividades de contagem de coleções e estimativas sobre contagens, e que, associada ao campo da Estatística e da Probabilidade, é cada vez mais relevante seu estudo e consequentemente seu aprendizado, pois consiste basicamente em escolher e agrupar os elementos de um conjunto sem ter que contar todos, usando métodos sofisticados.

Pesquisas anteriores feitas por Pessoa e Borba (2009) e a de Schliemann (1988), mostram que alunos, do Ensino Fundamental como também aqueles recém-aprovados no vestibular, possuem dificuldades em resolver problemas que envolvem o raciocínio combinatório.

Partindo do pressuposto de que essa realidade de dificuldade em relação ao estudo da Combinatória possivelmente também esteja relacionada com a maneira que os livros didáticos de Matemática têm abordado a Combinatória, e se abordam esse conteúdo, é de suma importância verificar nos livros didáticos se há, de forma elucidativa, indícios para verificar esta hipótese.

É pertinente também citar que os Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio do Estado de Pernambuco – PCE (PERNAMBUCO, 2012) trazem em sua redação quais as expectativas de aprendizagem são pretendidas para cada ano de escolarização e nesse contexto, afirma que a etapa final do Ensino Fundamental precisa ser vista como um avanço, ampliação e consolidação das aprendizagens já proporcionadas anteriormente. Por outro lado, considerar as aprendizagens anteriores como definitivamente construídas, pode fazer com que os estudantes e professores não mais atribuam significado aos novos conhecimentos, criando barreiras epistemológicas preocupantes (PERNAMBUCO, 2012).

Nesse mesmo documento, encontram-se referências sobre a Combinatória no eixo temático Números e Operações, enfatizando que a contagem de elementos de coleções no 9º ano é estudada com a expectativa de ser consolidada, criando assim condição para o prosseguimento em etapas posteriores de escolarização (PERNAMBUCO, 2012).

Vergnaud (1986) tem insistido constantemente que os conceitos relevantes para a formação matemática devem ser abordados desde o início da escolarização básica, justificando que a formação de um conceito acontece no decorrer de um longo período de tempo, devendo se integrar a um conjunto de outros conceitos por meio de relações, propriedades e representações simbólicas e por esse fato defende que um conceito é constituído dentro de *Campos Conceituais*.

Para um maior esclarecimento sobre as questões levantadas acima, o presente artigo analisou, a partir da teoria proposta por Vergnaud (1986), sete coleções de livros didáticos, escolhidas por conveniência, que foram aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático do Ministério da Educação brasileiro em 2013 para os anos finais do Ensino Fundamental, com um olhar mais específico para os problemas que envolvem o raciocínio combinatório que é o principal objetivo desse artigo.

2. A FORMAÇÃO DE CONCEITOS E A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Vergnaud (1986) afirma que a Didática das Matemáticas possui uma identidade própria, que se faz necessário haver uma caracterização mais ampla e enfatiza que os problemas de ensino não se resolvem apenas por definições. Conseqüentemente, as concepções erradas dos alunos só podem mudar verdadeiramente se entrarem em conflito com situações que elas não permitem tratar. Acredita também que estudar os processos de transmissão e apropriação dos conhecimentos matemáticos é de fundamental importância para a ciência atualmente porque há uma concepção interativa na formação dos conhecimentos, levando em consideração que as concepções criadas pelos alunos são modeladas pelas situações com que eles se deparam.

Quando se quer entender como ocorre o processo que vai desde as concepções prévias de cada aluno sobre um determinado conceito até suas representações sobre como

aqueles conceitos irão proporcionar uma apropriação a um determinado conhecimento, é indispensável perceber esse desenvolvimento ocorrendo dentro de estruturas denominadas de Campos Conceituais. Segundo Vergnaud (1986), um campo conceitual pode ser definido como um conjunto de situações cujo domínio, que o sujeito precisa ter, requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão.

Quando, na definição de Campo Conceitual, Vergnaud (1986) cita a palavra *conceitos*, ele está se referindo a um tripé de conjuntos: (S) o conjunto de *Situações* que dão sentido ao conceito; (I) o conjunto de *Invariantes* que comporta todas as propriedades do conceito e o (R) que é o conjunto de todas as *representações simbólicas* que podem ser utilizadas na representação desses conceitos.

3. COMBINATÓRIA

Para Pessoa (2009) o raciocínio combinatório é uma forma de pensar que permite que sejam levantadas possibilidades e sejam analisadas as combinações das mesmas e auxilia também na compreensão de conteúdos pertencentes a outras áreas do conhecimento.

Diariamente os alunos estão sujeitos a se deparar com situações desafiadoras que irão exigir o conhecimento e a utilização de alguns conceitos que já foram adquiridos, proporcionando o desenvolvimento de novos saberes. Estas situações podem aparecer na escola ou fora dela, mas podem proporcionar reflexões para auxiliar o desenvolvimento conceitual dos alunos. Vergnaud (1986) acredita que alguns conceitos somente se desenvolvem em um longo período de tempo. Para ele, o saber forma-se, tanto nos aspectos práticos quanto nos teóricos, a partir de problemas a serem resolvidos, ou seja, de situações a serem dominadas.

Para Merayo (2001), Combinatória é a técnica de saber quantos objetos há em um conjunto sem realmente ter que contá-los, porque essa técnica não necessita listar ou enumerar todos os elementos que formam o conjunto.

Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) expressam que é necessário estimular o desenvolvimento psicoevolutivo do raciocínio combinatório por meio de uma instrução adequada por constituírem um excelente meio para que os alunos passem para uma fase que os permita realizar atividades como modelização e representação, por exemplo. Para eles, Bernoulli traz uma definição sobre Combinatória que é bastante esclarecedora quando afirma que é a arte que nos ensina a enumerar todos os modos possíveis em que certo número de objetos pode ser misturado e combinado sem que seja omitido nenhum.

Este trabalho terá como referência a definição única dos *significados* (tipos de problemas combinatórios) pertencentes à Combinatória, elaborado por Pessoa e Borba (2009) que são os seguintes, com seus respectivos invariantes de escolha e ordem:

Produto Cartesiano (1) Dados dois (*ou mais*) conjuntos distintos, os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto. A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado; (2) a ordem dos elementos poderá ou não gerar novas possibilidades.

Permutação (1) Todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição); (2) A ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Arranjo (1) Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais, ou seja, de um grupo maior, serão formados subgrupos; (2) A ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Combinação (1) Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... p elementos, com $0 < p < n$, p e n naturais, ou seja, de um grupo maior, serão formados subgrupos; (2) A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

4. METODOLOGIA

Os aspectos metodológicos da pesquisa em pauta dão conta de que se trata de um estudo descritivo no qual foram analisados sete, dentre as dez coleções de livros de

Matemática aprovadas para os anos finais do Ensino Fundamental que foram aprovados pelo PNLD (2014) com o propósito de identificar se abordam e de que forma essa abordagem é feita sobre problemas que necessitam do conhecimento de raciocínio combinatório¹.

Arelada a essa análise feita no livro do aluno, foi feita também uma que buscou identificar no manual que cada livro traz para consulta permanente do professor, se as orientações são satisfatórias no que se referem ao raciocínio combinatório.

As coleções analisadas neste trabalho serão citadas como Coleção A, Coleção B, Coleção C, Coleção D, Coleção E, Coleção F e Coleção G.

5. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS DADOS

Coleção A

O Guia do Livro Didático (BRASIL, 2014), destaca a grande diversidade de situações contextualizadas que esta coleção apresenta, misturando a Matemática com as práticas sociais, criando articulações inclusive com outras áreas do conhecimento.

Esta obra tem como metodologia a apresentação de problemas antecedendo a conceitualização do tema que será estudado, porém para o Guia, essa estruturação é feita de modo que os alunos não tenham muitas oportunidades de tirar conclusões, estabelecer relações ou fazer generalizações.

Coleção B

Conforme o Guia do Livro Didático (BRASIL, 2014), esta coleção prioriza demasiadamente tópicos muitas vezes dispensáveis nessa fase de escolaridade e negligencia tópicos relevantes como, por exemplo, as noções básicas trazidas no campo da *Estatística e Probabilidade*.

¹ Consideramos como problemas que necessitam de conhecimento que envolve o raciocínio combinatório, aqueles em que, implícita ou explicitamente se pode fazer uso de estratégias de contagem, sejam elas formais ou informais.

A distribuição dos campos da Matemática, segundo o Guia, é feita de maneira irregular como, por exemplo, o campo *Números e Operações* é trabalhado excessivamente no 6º ano, assim como a *Álgebra* aparece excessivamente no 8º e 9º anos.

Coleção C

Conforme o Guia do Livro Didático (BRASIL, 2014), esta obra caracteriza-se pelo equilíbrio na abordagem de conceitos, algoritmos e procedimentos que proporciona o desenvolvimento da autonomia intelectual do aluno. Os assuntos são retomados constantemente, e de forma gradativa são ampliados e aprofundados possibilitando que os conhecimentos ganhem novos significados e favoreçam o aumento do rendimento escolar.

Nesta obra também, o desenvolvimento de competências, tais como generalizar e visualizar, é bastante estimulado por meio de desafios, problemas e oportunidades para que o aluno se posicione acerca do conteúdo que está sendo trabalhado. Possui também uma forma de contextualizar os conhecimentos com base nas práticas sociais atuais e na História da Matemática, além de proporcionar discussões importantes para a construção da cidadania.

Coleção D

Nesta obra, segundo o Guia do Livro Didático (BRASIL, 2014), há uma ótima conexão entre os campos matemáticos, sem falar que as articulações entre os conhecimentos que estão sendo abordados e os que já foram apresentados anteriormente são bastante eficazes.

Como um ponto negativo, o Guia aponta a atenção excessiva a procedimentos, algoritmos e fórmulas não oferecendo ao aluno a oportunidade de pensar e formular suas conclusões, pois logo após a apresentação de poucos exemplos, passa rapidamente à sistematização dos conteúdos, contribuindo assim apenas para uma boa memorização do que está sendo estudado.

Coleção E

Segundo o Guia do Livro Didático (BRASIL, 2014), esta obra oferece uma boa contextualização dos conteúdos matemáticos ao fazer uso de textos que exploram temas

interdisciplinares, possibilitando ao aluno fazer uma reflexão acerca de condutas éticas nas diversas situações sócio-ambientais e culturais. Os assuntos são freqüentemente revisados ao longo de cada livro, mas nem sempre são feitos de forma mais aprofundada que o anterior, impossibilitando que ampliações sejam possíveis, ficando apenas em repetições. O Guia destaca ainda que o trabalho feito com o tratamento da informação é o mais explícito e cuidadoso porque os conceitos são estudados com apoio em exemplos que abordam contextos atuais.

Coleção F

Nesta obra, segundo o Guia do Livro Didático (BRASIL, 2014) os conteúdos primeiramente são apresentados de forma teórica, com o cuidado de trazer exemplos resolvidos que facilitem o entendimento, seguidos de exercícios propostos que possibilitem a aplicação da teoria explanada. Esses conteúdos são retomados ao longo do percurso de forma ampliada, porém com contextos diferenciados.

Em cada volume são apresentadas sugestões de atividades utilizando *softwares* gratuitos, no entanto esses *softwares* são mais voltados para a exploração do campo da Geometria, nos quais são abordados conceitos e propriedades de figuras geométricas.

Coleção G

Os conteúdos são abordados por meio de explanação da teoria, seguida de exemplos resolvidos e propostos, que conforme o Guia do Livro Didático (BRASIL, 2014), essa metodologia não favorece a aquisição do conhecimento, já que não traz autonomia aos alunos. Ainda conforme o Guia, esta coleção é muito extensa pelo fato de trabalhar todos os tópicos indicados para os quatro anos escolares de maneira bastante detalhada, destacando em cada ano escolar um campo específico da Matemática como, por exemplo, no 6º ano é explorado mais o campo *Números e Operações*, no 7º *Álgebra* e nos 8º e 9º anos, *Geometria e Álgebra*.

5.1 TIPOS DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS APRESENTADOS

De modo geral, como se pode observar na Tabela 1, foram encontrados problemas que abordam os quatro significados da Combinatória em quatro das sete coleções

analisadas. As demais deixaram de explorar um ou dois tipos de problemas. O significado que apareceu com maior frequência foi o de Produto Cartesiano, seguido pelo da Permutação.

Tabela 1: Tipos de problemas por Coleção

	Produto Cartesiano	Permutação	Arranjo	Combinação	Total
Coleção A	11	10	1	7	29
Coleção B	10	4	0	0	14
Coleção C	3	2	0	3	8
Coleção D	4	10	1	3	18
Coleção E	8	2	1	3	14
Coleção F	7	0	3	0	10
Coleção G	7	3	0	0	10
Total	50	31	6	16	

Uma possível explicação para essa frequência com que os problemas de Produto Cartesiano foram explorados é certamente o fato de os autores atenderem a exigência contida nos PCN (BRASIL) quando cita que nos 6º e 7º anos deve ser explorada a *“resolução de problemas de contagem, incluindo os que envolvem o princípio multiplicativo, por meio de estratégias variadas, como construção de esquemas e tabelas”* (1998, p.72).

Ainda na Tabela 1, é possível identificar que o *Arranjo* possui a menor quantidade entre os problemas analisados. O fato de os problemas de *Arranjo* serem pouco abordados pelos autores pode ser justificado pelo fato de que esse significado da Combinatória apresenta uma maior complexidade, exigindo do aluno um maior conhecimento e domínio do *invariante* da ordem. Com exceção do *Arranjo* e da *Combinação* que não foram encontrados em algumas coleções, e o significado da *Permutação* que não foi identificado

em uma coleção, o significado que envolve o raciocínio combinatório – *Produto cartesiano* – aparece em todas as coleções.

A Tabela 2² mostra a frequência com que cada tipo de problema está presente nas coleções analisadas. Na leitura dela percebe-se que os problemas de produto cartesiano estão sendo mais destacados nos livros do 6º e 7º anos, talvez por possibilitar a utilização de um maior número de estratégias como *tabelas*, *árvore de possibilidades*, *listagens* e *esquemas* em sua resolução, pois nesses dois anos escolares os alunos precisam aprender a utilizar o princípio multiplicativo.

Tabela 2. Frequência dos tipos de problema por ano escolar

	6º Ano				7º Ano				8º Ano				9º Ano			
	P.C	P	A	C	P.C	P	A	C	P.C	P	A	C	P.C	P	A	C
Coleção A	3	3	1	2	2	-	-	-	1	3	-	4	5	4	-	1
Coleção B	5	2	-	-	4	1	-	-	-	-	-	-	1	1	-	-
Coleção C	3	1	-	2	-	-	-	-	-	-	-	1	-	1	-	-
Coleção D	1	1	-	2	-	-	-	-	3	9	1	1	-	-	-	-
Coleção E	2	2	-	-	5	0	1	2	1	-	-	-	-	-	-	1
Coleção F	2	-	-	-	5	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Coleção G	7	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
TOTAL	23	12	1	6	16	1	4	2	5	12	1	6	6	6	0	2

Legenda: P.C (Produto Cartesiano), P (Permutação), A (Arranjo), C (Combinação)

Percebe-se ainda na Tabela 2, levando em consideração a coleção como um todo, que a quantidade de problemas envolvendo o raciocínio combinatório vai diminuindo após o 6º ano, ao invés de aumentar, levando-nos a inferir que haverá a dificuldade de existir uma maior aquisição de conhecimentos, prejudicando a formação adequada dos conceitos,

² Todo esse quantitativo de questões foi levantado no livro do aluno, pois no manual do professor não foi identificadas nenhuma questão voltada para o estudo da Combinatória.

indo, dessa forma, de encontro ao que defende Vergnaud em sua Teoria dos Campos Conceituais na qual defende que um conceito é formado durante um longo período de tempo.

6. CONSIDERAÇÕES

Deve-se buscar desenvolver em sala de aula um trabalho articulando diferentes dimensões dos conceitos de modo que sejam promovidos aprendizados mais significativos. Quanto ao conceito de Combinatória, considera-se que a variedade de situações que foram exploradas pelas coleções em questão possibilita a aquisição, ou pelo menos, indica um caminho coerente para o aprendizado desse conceito, faltando ainda uma explanação mais eficaz sobre os *invariantes* da ordem e da escolha que influenciam, sobretudo no entendimento e na diferenciação dos problemas de arranjo e combinação. É importante desenvolver propostas de trabalho que busquem explorar variados significados, propriedades e representações simbólicas dos conceitos, sobretudo os que envolvem o raciocínio combinatório, possibilitarão um maior desenvolvimento dos alunos.

Percebe-se que já há um número bastante considerável de situações envolvendo o raciocínio combinatório sendo exploradas pelos autores de livros didáticos, e que esses livros estão buscando cada vez mais se adequar às exigências dos Parâmetros Curriculares Nacionais no que se refere ao estudo da Combinatória. Sente-se falta, porém, de maiores instruções destinadas aos professores no manual específico para suas consultas e que estarão de acordo com a proposta metodológica do livro que foi adotado. Ainda falta esse diálogo para compor o processo de ensino e aprendizagem.

7. REFERÊNCIAS

BATANERO, C; GODINO, J; NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento Combinatorio**. Madrid: Editorial Síntesis, S.A., 1996.

BIANCHINI, E. Matemática, 6º ao 9º ano. ed. – São Paulo: Moderna, 2011.

BRASIL, MEC. **Guia de Livros didáticos: PNLD 2014**. Matemática. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2013.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 3º e 4º ciclos. Secretaria de Ensino Fundamental, Brasília, 1998.

CENTURIÓN, M. Matemática: teoria e contexto, 6º ao 9º ano. 1. ed. – São Paulo: Saraiva, 2012.

DANTE, L.R. Projeto Teláris: Matemática, 6º ao 9º ano – 1. ed. – São Paulo: Ática, 2012.

FISHBEIN, E; PAMPU, I; MINZAT, I. Effects of age and instruction on combinatory ability in children. *The British journal of Education Psychology*, n. 40, 1970.

IMENES, L. Matemática, 6º ao 9º ano. – 2. ed. – São Paulo: Moderna, 2012.

MERAYO, F. **Matemática Discreta**. Madri : Editora Thomson Paraninfo S.A., 2001.

MORI, I. Matemática: Ideias e desafios, 6º ao 9º ano. 17. ed.- São Paulo: Saraiva, 2012.

PERNAMBUCO. PCE 2012 : Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco. Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio do Estado de Pernambuco, 2012.

PESSOA, C. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio**. 2009, 267 páginas. Tese - Universidade Federal de Pernambuco. CE.

PESSOA, C.;BORBA, R. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª à 4ª série**. ZETETIKÉ – Cepem – FE – Unicamp, V.17, jan-jun, 2009.

PROJETO ARARIBÁ: matemática, 6º ao 9º ano – 3. ed.- São Paulo: Moderna, 2010.

SCHLIEMANN, A. **A compreensão da análise combinatória**: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. In: Carraher, T.N; Carraher, d.w. e Schliemann, A. *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo: Cortez, 1988.

SOUZA, J. Vontade de saber matemática, 6º ao 9º ano –2. ed. – São Paulo: FTD, 2012.

VALENTE, W. **Livro didático e educação matemática**: uma história inseparável. In: ZETETIKÉ- FE – Unicamp- v. 16 – n.30 – jul./dez. – 2008.

VERGNAUD, G. **Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das Matemáticas**. *Um exemplo: as estruturas multiplicativas*. *Análise Psicológica*,1, 1986, p. 75-90.