



ANÁLISE COMBINATÓRIA NO CONTEXTO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio – GT 10

Adriano Alves da SILVEIRA
Universidade Estadual da Paraíba - UEPB
adriano.exatas@hotmail.com

Roger Ruben Huaman HUANCA
Universidade Estadual da Paraíba - UEPB
roger@uepb.edu.br

RESUMO

A presente pesquisa teve como foco o ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória, através da Resolução de Problemas. Assim, este trabalho teve o objetivo de investigar, por meio de dois questionários, aplicados aos estudantes e professores, as estratégias e dificuldades encontradas pelos alunos do 2º ano do Ensino Médio, como também as percepções dos professores sobre o estudo dessa temática. O nosso propósito era responder as seguintes questões: Qual foi o suporte que os alunos tiveram nos anos iniciais sobre os primeiros conceitos da Análise Combinatória? Quais justificativas dos professores em deixar o estudo da Análise Combinatória de lado? Quais as dificuldades encontradas pelos alunos no estudo da Análise Combinatória? Será que esse conteúdo está sendo abordado na forma que os documentos oficiais orientam? Com isso, elegemos como sujeitos da pesquisa seis turmas do 2º ano do Ensino Médio distribuídas nos Municípios de Alagoinha - PB, Mulungu - PB e Rio Tinto - PB.

Palavras-chaves: Análise Combinatória, Resolução de Problemas, Ensino Médio.

1. Introdução

A temática em foco aparece no cenário escolar como um tema desafiador devido sua complexidade e importância. Na verdade, é comum se deparar com situações que necessitam do conhecimento da Análise Combinatória em nosso cotidiano e que, ao longo do tempo, foi preciso de um estudo mais aprofundado dessa temática.

A Análise Combinatória é um dos conteúdos que vem se destacando com relação aos demais. Acredito que a maior importância se deva ao fato desse conteúdo está diretamente ligado a situações do nosso dia-a-dia, pois trabalha dentro da linha de resolução de problemas. Que hoje é uma forte tendência metodológica. Outro fator importante diz respeito à dimensão do estudo da Análise Combinatória como conteúdo que possibilita o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo matemático.

Os documentos oficiais de Matemática apresentam a Análise Combinatória como conteúdo obrigatório que compõem a estrutura curricular do Ensino Médio. A Análise

Combinatória pertence ao bloco Análise de dados e probabilidade que deve ser discutido durante todos os anos de escolaridade do Ensino Básico. No entanto, este conteúdo se desenvolve ainda muito timidamente, no ambiente escolar, apesar de sua potencialidade, ao trabalhar de forma eficaz com algumas competências exigidas nos PCN+ (BRASIL, 2002) de Matemática, tais como: representação, leitura, investigação e compreensão, capacidade de enfrentamento e resolução de situações problemas, dentre outras.

Assim, um fator que deve ser levado em consideração é que o estudo da Análise Combinatória deveria ser contemplado de uma forma mais eficaz no Ensino Fundamental.

No decorrer dos primeiros ciclos do Ensino Fundamental os alunos devem ser levados a desenvolver a familiarização com a contagem de agrupamentos, de maneira informal e direta, fazendo, por exemplo, uma lista de todos os agrupamentos possíveis para depois contá-los. (BRASIL, 1999, p. 52)

No entanto, o ensino da Análise combinatória só começa a ser discutido na maioria das instituições escolares a partir do 2º ano do Ensino Médio, tornando assim uma aprendizagem sem alguns suportes para determinada etapa. Porém, o problema é mais preocupante do que parece, pois existem muitas escolas que não trabalham com o estudo da Análise Combinatória em seu currículo. Este fato pode ocorrer pela insegurança do professor de Matemática no conteúdo de Análise Combinatória e também por achar que, ao discutir tal temática, seus alunos vão ter muita dificuldade em aprender os conceitos deste tópico.

2. Referencial teórico

Segundo Onuchic e Huanca (2013), fundamentar a Resolução de Problemas é implementar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, onde exige do professor e dos alunos, novas posturas e atitudes com relação ao trabalho em sala de aula. O professor precisa preparar ou escolher problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir, precisa deixar de ser o centro das atividades, passando para os alunos a responsabilidade pela aprendizagem que pretendem atingir. Os alunos, por sua vez, devem entender e assumir essa responsabilidade. Esse ato exige de ambos, portanto, mudanças de atitude e postura, o que nem sempre é fácil conseguir.

Os autores dizem também que o aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de conhecimento, ou seja levando o aluno a pensar. Nesse instante o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário.

Nessa metodologia os problemas são importantes não somente como um meio de se aprender matemática mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso. Uma situação-problema é apresentada com o propósito de se construir novos conceitos e novos conteúdos e a compreendê-los. Essa compreensão da matemática, por parte dos alunos, envolve a ideia de que entender é essencialmente relacionar. Como afirma Onuchic (1999, p. 208),

[...] esta posição baseia-se na observação de que a compreensão aumenta quando: o aluno é capaz de relacionar uma determinada ideia matemática a uma grande variedade de contextos; o aluno consegue relacionar um dado problema a um grande número de ideias matemáticas implícitas nele; o aluno consegue construir relações entre as várias ideias matemáticas contidas num problema.

Cai (2003) ressalta, entretanto, que embora ainda se saiba pouco sobre como os alunos dão sentido e aprendem matemática através da resolução de problemas, muitas ideias associadas com esta abordagem – mudança no papel do professor, seleção e elaboração de problemas, aprendizagem colaborativa, entre outras – têm sido intensamente pesquisadas, oferecendo respostas a várias questões frequentemente levantadas sobre essa forma de ensino.

Segundo (BRASIL, 2006, p 94), no ensino médio, o termo “combinatória” está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Na verdade é importante trabalhar com problemas que desenvolva o pensar matemático dos alunos e que o enunciado seja de fácil entendimento, onde eles possam enumerar todas possibilidades, vale ressaltar que os problemas não precisam ser necessariamente fácil.

Segundo Silva e Filho (2008, p 498) a Análise Combinatória é o ramo da Matemática que tem por objetivo resolver problemas que consistem, basicamente, em escolher e agrupar elementos de um conjunto.

E tem como ponto de partida o princípio da contagem, que é o alicerce primordial desta área, envolvendo o princípio multiplicativo e aditivo.

Com o estudo da Análise Combinatória podemos resolver muitos problemas que estão relacionados ao nosso cotidiano, como por exemplo: de quantos modos diferentes Ana pode se vestir para ir à festa, sabendo que ela tem 4 saias e 6 blusas? Quantas placas diferentes de automóveis, formadas por três letras e quatro algarismos, podem existir? Quantas maneiras diferentes você pode escolher seis entre sessenta números para jogar a mega - sena? Quantas senhas de quatro algarismos você pode obter com os algarismos de 1 a 9? Em uma classe de trinta alunos, quantas são as possíveis escolhas para três representantes de sala?

A Análise Combinatória se desenvolveu ao longo do tempo com diversos problemas que necessitava de métodos de contagem adequados. A partir da ideia de organização numérica surgiu um novo ramo da Matemática, a Análise Combinatória na qual vamos abordar alguns acontecimentos que mostram como se deu o desenvolvimento dessa temática. A história da matemática nos possibilitou inúmeras situações envolvendo o conteúdo de Análise Combinatória, ao se determinar as possíveis soluções de resolver tantos problemas envolvendo situações planas como em situações tridimensionais, como é o caso do problema das Sete pontes que veremos a seguir.

Segundo Dante (2010, p 274), a Análise Combinatória se desenvolveu ainda na Antiguidade, quando o matemático grego Arquimedes de Siracusa (287 a.C. -212 a.C.) propôs um problema geométrico que se tornou famoso, chamado Stomachos (palavra derivada do grego Stomachos; em português, “estômago”), que consistiam em determinar de quantos modos poderiam ser reunidas 14 peças planas, de diferentes formatos e tamanhos, para formar um quadrado. Conta a história que alguns estudiosos da época atribuíram o nome Stomachos pelo grau de dificuldade do jogo, no qual dava dor de estômago em quem jogava. Este exemplo é um dos primeiros registros da necessidade do estudo de combinações para resolver situações matemáticas na antiguidade. Abaixo apresentamos uma das soluções do Stomachion:

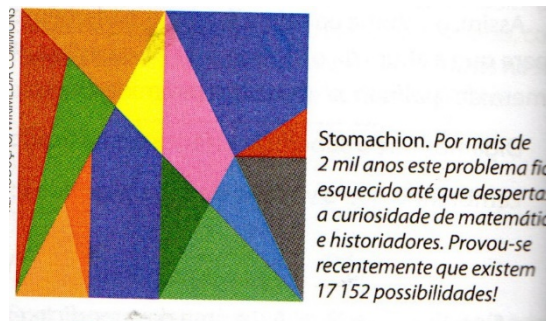


Figura 1 – Stomachion

Em 1736, ainda segundo Dante (2010, p 274), outro matemático que também utilizou os conhecimentos de combinatória para resolver um famoso problema da época foi o matemático suíço Leonhard Euler (1707 - 1783). Este matemático resolveu o problema que havia surgido na cidade de Königsberg, na Prússia (atual Kaliningrado, Rússia), conhecida por suas sete pontes, das quais cinco ligavam o continente a uma ilha. Denominado: *As sete pontes de Königsberg*, o problema consistia em descobrir se era possível caminhar ao redor de toda cidade passando sobre cada ponte uma única vez: *Partindo-se de uma das ilhas, é possível ir pelas demais ilhas e voltar ao ponto de partida, nisso cruzando-se cada uma das pontes uma única vez?* Mais tarde, este matemático resolveu esse problema, dando origem ao estudo da teoria dos grafos, no qual tem grande aplicação na ciência da computação atualmente.

Ainda segundo Dante (2010, p 274), entretanto, o grande desenvolvimento da Análise Combinatória se deve aos jogos de azar (jogos de cartas, dados ou moedas), por serem instigantes e desafiadores.

Atualmente a Análise Combinatória é alicerce na teoria dos grafos, probabilidades, topologia, além de outras áreas do conhecimento.

Princípio fundamental da contagem (PFC)

O conceito mais importante que acompanha a discussão de combinatória é apresentado por Souza (2010, p 217), como sendo o Princípio Fundamental da contagem (PFC), assim definido por ele:

Se um acontecimento **A** pode ocorrer de **n** maneiras distintas, e para cada uma dessas maneiras, um acontecimento **B** pode ocorrer de **m** maneiras distintas, então a quantidade de possibilidades de ocorrência dos acontecimentos **A** e **B** é dada pelo produto **n x m**.

Um recurso que é utilizado para resolver diversos problemas de contagem é o diagrama de árvores.

Segundo (BRASIL, 2006, p 79), a utilização do diagrama de árvores é importante para clarear a conexão entre os experimentos compostos e a combinatória, pois permite que visualizemos a estrutura dos múltiplos passos do experimento.

Para um conjunto que existem muitas possibilidades, esse recurso se torna limitado, porém contribui de forma significativa para o entendimento do Princípio Fundamental da Contagem.

De forma geral todo problema de contagem pode, ser resolvido por um processo de contagem, pelo menos na teoria. No entanto, na prática, a resolução de alguns desses problemas pode se tornar muito complicado. Assim existem técnicas de contagem que facilitam a resolução de muitos problemas como, por exemplo, arranjos simples, permutações simples e combinações simples.

Um dos grandes problemas do estudo da Análise Combinatória no ambiente escolar é perceber que tipo de agrupamento a questão está trabalhando, desta forma podemos destacar alguns questionamentos que estão bem presentes na sala de aula, tais como: é arranjo ou combinação? Que fórmulas utilizar?

De acordo com Hariki (1996), problemas envolvendo combinatória são usualmente considerados difíceis pela maioria dos alunos e professores de Matemática. Talvez a principal dificuldade seja a da conexão correta entre o problema dado e a teoria matemática correspondente. É difícil determinar se o problema combinatório dado é um problema de arranjo, de permutação ou de combinação, ou então se é suficiente usar diretamente o Princípio Fundamental da Contagem.

Um exemplo de aplicação de combinatória agregada ao uso de tecnologia no ensino é o *software Combinat*. Este aplicativo, a princípio, tem a função de uma calculadora para

resolver problemas de arranjo, combinação e permutação, porém, quando bem explorado, pode ser utilizado para fixar de forma eficaz as definições de arranjo simples, combinação simples e permutação simples.

A Resolução de problemas pode ser uma metodologia eficaz no Ensino de combinatória no ambiente escolar, no qual proporciona que os alunos desenvolvam o raciocínio lógico-dedutivo, pois permite que eles resolvam problemas do seu cotidiano sem a ajuda do professor.

3. Metodologia

Esta seção tem como finalidade descrever os procedimentos metodológicos utilizados no presente estudo. O objetivo fundamental da pesquisa é descobrir respostas para os problemas na qual se justifica a realização da mesma. Deste modo, apresentamos, a seguir, o tipo de estudo bem como os participantes e a metodologia aplicada, segundo o objetivo e à análise de dados.

A metodologia de pesquisa pode ser caracterizada, segundo seus objetivos, como um estudo descritivo e exploratório, elaborado a partir da investigação e de materiais publicados sobre a temática em questão.

Quanto à análise de dados, este estudo se caracteriza por ser do tipo estudo de caso com apenas uma interação. O estudo de caso pode ser compreendido segundo Oliveira (2007), como um estudo profundo de uma temática. Quanto aos instrumentos de pesquisa, utilizaremos um questionário semiestruturado composto por questões abertas sobre o estudo da Análise Combinatória na sala de aula.

Para alcançar os objetivos da pesquisa, elegemos como sujeitos do estudo, os professores e alunos do 2º ano do Ensino Médio das Escolas Públicas dos Municípios de Alagoinha - PB, Mulungu - PB e Rio Tinto - PB. A metodologia de ação será estruturada em duas etapas: aplicação do questionário e a verificação dos resultados obtidos.

A primeira etapa da pesquisa visa conhecer os estudantes e professores participantes, bem como identificar as dificuldades encontradas pelos alunos no Estudo da Análise Combinatória. Neste momento, desejamos também investigar como os professores das instituições trabalham a Análise Combinatória no ambiente escolar. Desta forma, utilizamos dois questionários, um elaborado para os professores, que abordava as seguintes questões: 1 -

Qual a importância da familiarização dos alunos nos anos iniciais, sobre os primeiros conceitos da Análise Combinatória? 2 - Quais as dificuldades encontradas pelos alunos no estudo da Análise Combinatória? 3 - Quais são as principais estratégias utilizadas pelos alunos para resolverem problemas envolvendo Análise Combinatória no ambiente escolar? 4 – Você costuma deixar o estudo da Análise Combinatória de lado? Se for sim, explique o porquê? E o outro para os estudantes: 1 - Daniela pretende ir à festa de São João na cidade de Alagoinha-PB. Considerando que ela tem 5 blusas e 4 saias. Determine quantos modos diferentes ela pode se vestir para ir à festa. 2 - Cinco cavalos disputam um páreo qual o número de possíveis resultados para as 2 primeiras colocações? 3 - De quantas maneiras uma família de 3 pessoas pode sentar se num banco de 3 lugares? 4 – Dezesesseis times se inscreveram em um torneio de futsal amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o grupo A. Em seguida entre os times do grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para o grupo A e a quantidade total de escolhas de times do jogo de abertura podem ser calculadas através de que tipos de agrupamentos?

Este instrumento é composto de duas partes: a primeira – identificar o perfil dos estudantes e professores das instituições investigadas; e a segunda – identificar as concepções dos docentes e estudantes sobre o conteúdo da Análise Combinatória.

A segunda etapa remete à verificação e à análise dos resultados baseados na teoria estudada. Neste momento, estamos interessados em investigar quais as principais dificuldades que os professores e estudantes tem acerca do Ensino e na aprendizagem da Análise combinatória.

4. Dados e Resultados

Tabela 1: Desempenho do questionário aplicado aos alunos do Município de Alagoinha.

Respostas dos alunos de Alagoinha – PB	Não sei	Resposta correta	Resposta parcialmente correta	Resposta incorreta	Total de alunos

1ª questão	3	42	0	8	53
2ª questão	2	0	0	51	53
3ª questão	2	26	0	25	53
4ª questão	47	0	1	5	53

Tabela 2: Desempenho do questionário aplicado aos alunos do Município de Mulungu.

Respostas dos alunos de Mulungu – PB	Não sei	Resposta correta	Resposta parcialmente correta	Resposta incorreta	Total de alunos
1ª questão	0	19	2	19	40
2ª questão	3	6	0	31	40
3ª questão	3	4	0	33	40
4ª questão	37	0	0	3	40

Tabela 3: Desempenho do questionário aplicado aos alunos do Município de Rio Tinto.

Respostas dos alunos de Rio Tinto – PB	Não sei	Resposta correta	Resposta parcialmente correta	Resposta incorreta	Total de alunos
--	---------	------------------	-------------------------------	--------------------	-----------------

1ª questão	1	35	0	5	41
2ª questão	6	0	1	36	41
3ª questão	3	4	1	33	41
4ª questão	38	0	1	2	41

De modo geral, podemos afirmar que os resultados obtidos com o questionário aplicado aos alunos foram preocupantes. Constatamos que os mesmos não tiveram qualquer aproximação com o estudo da Análise Combinatória.

Por outro lado, evidenciamos um ponto bastante positivo que é a facilidade de se trabalhar com o raciocínio combinatório, visto que a maioria dos alunos demonstraram possuí-la. Assim, cabe ao professor trabalhar com diversos problemas, os quais permitam aos alunos utilizarem alguns métodos de contagem. Daí, a importância de trabalhar os primeiros conceitos de Análise Combinatória, nos anos iniciais.

Em relação às estratégias utilizadas, percebemos que os alunos conseguiram resolver as questões propostas referentes aos diversos tipos de agrupamentos, utilizando o Princípio Fundamental da Contagem. Podemos relatar também que alguns alunos conseguiram utilizar o diagrama de árvore para resolução da questão proposta. O que é algo sensacional, pois até então, eles não haviam tido contato com este tipo de recurso e mesmo assim, foram capazes de utilizá-lo de modo adequado, confirmando o que os documentos oficiais orientam sobre diagrama de árvore.

1 - Daniela pretende ir à festa de São João na cidade de Alagoíinha-PB. Considerando que ela tem 5 blusas e 4 saias. Determine quantos modos diferentes ela pode se vestir para ir à festa.

Figura 2: Resposta do aluno

Nas questões propostas os alunos poderiam utilizar os conceitos referentes aos agrupamentos que a questão abordava e utilizar o (PFC); poderiam também enumerar todas as possibilidades para depois contar. E isso foi feito de modo intencional, visando que os alunos utilizassem as estratégias matemáticas que eles achassem adequadas.

Notamos que um dos principais equívocos cometidos pelos alunos foi em relação à retirada de dados dos problemas propostos. Este erro é bastante comum entre os educandos, visto que a maioria têm dificuldades de interpretação.

Com a análise do questionário, percebemos que a maioria dos professores estava ciente da importância dos primeiros conceitos da Análise Combinatória e destacaram que seria importante para o prosseguimento dos estudos.

Nesta perspectiva, o estudo da Análise Combinatória não deve ser deixado de lado, já que essa temática trabalha com diversas situações do nosso dia a dia. O professor deve ser cauteloso na escolha dos conteúdos a serem trabalhados e durante o seu planejamento não pode deixar essa temática de lado. Desculpas como: “o assunto está no final do livro didático” ou “é um assunto difícil para o entendimento dos alunos”, são inadmissíveis. Não devem ser levadas em consideração, pois ao conhecer as potencialidades dessa temática fica claro o quanto se faz necessária na vida dos alunos.

As estratégias utilizadas pelos alunos, mencionadas pelos professores foram: estimular a resolução de problemas envolvendo contagem através de modelos (diagrama de árvores, tabelas, agrupamentos, entre outros).

Percebemos com o questionário que os professores concordavam com a ideia de que a Análise Combinatória deveria ser trabalhada de forma mais intensa no Ensino Fundamental, isso facilitaria nos conceitos que seriam trabalhados mais adiante.

Uma proposta recomendável no ensino e na aprendizagem dos conteúdos matemáticos é ter como referência em sua prática os documentos oficiais. Por meio do questionário percebemos que os professores conheciam como trabalhar o conteúdo da Análise Combinatória.

5. Referências bibliográficas

BRASIL. Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (Matemática)*. Brasília: MEC/SEMT, 1999.

_____. Ministério da Educação. Secretaria da Educação. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*, Brasília: MEC/SEB, 2006.

CAI, J. What Research Tells Us about Teaching Mathematics through Problem Solving. In: Lester Jr. F.K. (ed.) *Teaching Mathematics through Problem Solving – Prekindergarten-Grade 6*. Reston/VA: NCTM, 2003.p.141-253.

DANTE, L.R. *Matemática contextos e aplicações*. São Paulo: Ática, 2010.

FILHO, B.B.; SILVA, J. *Matemática participação e contexto*. São Paulo: FTD, 2008.

HARIKI, S. *Conectar problemas: uma nova estratégia de resolução de problemas combinatórios*. Revista Educação e Matemática, nº37, 1º trimestre de 1996 (Portugal).

OLIVEIRA, M. M. *Como fazer pesquisa qualitativa*. Petrópolis, RJ: Vozes, 2007.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP, 1999. cap. 12, p.199-218.

ONUCHIC, L. R.; HUANCA, R. R. H. A Licenciatura em Matemática: O desenvolvimento profissional dos formadores de professores. In: Maria Clara Rezende Frota; Barbara Lutaif Bianchini; Ana Márcia F. Tucci de Carvalho. (Org.). *Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior*. 1ed. Campinas: Papirus, 2013, v. 1, p. 307-331.

SOUSA, J.R. *Novo olhar matemática*. São Paulo: FTD, 2010



**Desenvolvendo o Pensamento Matemático
em Diversos Espaços Educativos**

27 a 29 de Novembro

UEPB Campina Grande, Paraíba.



2014