VIII-epbem
Desenvolvendo o Pensamento Matemático
em Diversos Espaços Educativos
27 a 29 de Novembro
UEPB Campina Grande, Paraíba.
SBEM PB
2014

O USO DO PRINCÍPIO DE CAVALIERI NA ABORDAGEM DE VOLUME EM LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio – GT 10

Leonardo Bernardo de MORAIS
Instituto Federal do Sertão Pernambucano/Campus Salgueiro
leonardob.morais@gmail.com

Maria das Dores de MORAIS
Prefeitura Municipal de Jaboatão dos Guararapes
dora.pe@gmail.com

RESUMO

O presente artigo investigou a abordagem do princípio de Cavalieri nos livros didáticos de Matemática para o ensino médio. Usou-se como aporte teórico o modelo teórico de quadros propostos por Règine Douady e Perrin-Glorian (1989) para a conceituação de área como grandeza, o qual foi ampliado, neste artigo, para a grandeza volume. Foram analisadas as sete coleções de livros didáticos de Matemática do ensino médio aprovadas no PNLD 2012. Os dados analisados foram extraídos dos textos introdutórios e dos exercícios propostos e sugeridos nos referidos livros. Dentre os resultados, constatou-se que o princípio de Cavalieri é amplamente utilizado como subsídio para a introdução das fórmulas de volume dos sólidos geométricos, mas seu uso é praticamente abandonado nos exercícios propostos.

Palavras- chaves: Grandezas e Medidas, Princípio de Cavalieri, Volume.

1. Introdução

O campo das grandezas e medidas há mais de dez anos se destacou ao ser colocado como um dos quatro blocos de conteúdos para o ensino fundamental ao lado de números e operações, espaço e forma e tratamento da informação (BRASIL, 1997; 1998). No ensino médio, embora estejam articuladas ao eixo geometria e medidas, as grandezas são destacadas, conforme extrato seguinte:

> O estudo da *Geometria* deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. *<u>Esse estudo apresenta dois aspectos – a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes</u>* (grifo dos autores) (BRASÍLIA, 2006, p.75).

A atenção ao campo das grandezas e medidas acima mencionada tem se dado também pela sua relevância em atividades cotidianas, pela articulação com outros conteúdos matemáticos e com outras áreas do conhecimento. Em atividades práticas, por exemplo, são frequentes atividades em que o conhecimento de grandezas é requerido como na construção civil, com medições de terrenos e na determinação de areia necessária para um dado projeto. A articulação com outros campos matemáticos também é favorecida como a história da Matemática, onde a grandeza tempo se destaca, e a geometria, com a mensuração de comprimentos, áreas e volumes de objetos geométricos. A articulação com outras áreas do conhecimento pode ser explorada, por exemplo, com a Física na abordagem de grandezas como temperatura e velocidade.

Dentro do campo das grandezas e medidas, destacam-se as grandezas geométricas comprimento, área, volume e ângulo, pois as mesmas são contempladas desde a educação infantil, passando pelo ensino fundamental e médio. Juntam-se a isso a notória atenção dada pelos livros didáticos de Matemática se comparada com as demais grandezas (tempo e massa, por exemplo), bem como o desenvolvimento de pesquisas e o uso de conhecimentos empíricos em atividades cotidianas.

Morais (2013), em sua pesquisa de mestrado, investigou a abordagem da grandeza volume em livros didáticos de Matemática para o ensino médio. Nesse estudo, usou-se como aporte teórico a teoria dos campos conceituais (VERGNAUD, 1990) e o modelo teórico de quadros (DOUADY E PERRIN-GLORIAN, 1989) para a conceituação de área como grandeza, tendo como objetivo geral caracterizar a abordagem da grandeza volume nos livros didáticos de Matemática do ensino médio aprovados no PNLD 2012. A partir dos resultados dessa investigação, propusemos neste artigo analisar a o uso do princípio de Cavalieri nos referidos livros didáticos para a abordagem da grandeza volume.

2. Revisão da Literatura

Estudos recentes relativos à grandeza volume têm apontado que os alunos apresentam entraves na construção desse conceito. Figueiredo (2013) aponta que alunos do ensino médio têm dificuldades em representar um volume usando o par número/unidade de medida e no reconhecimento das fórmulas pertinentes para o cálculo de volume de sólidos. Anwandter-cuellar (2008) desenvolveu um estudo com alunos do ensino secundário francês[1] sobre a conceitualização de volume. Essa pesquisadora concluiu que os sujeitos investigados revelaram predominantemente uma concepção numérica de volume, ou seja, em que a grandeza é confundida com um número. Nesse sentido, Morais (2013) constatou que os livros didáticos aprovados no PNLD 2012 exploram exaustivamente exercícios cujo foco é calcular o volume de sólidos. Essa escolha pode favorecer a concepção apontada por Anwandter-cuellar (2008), além de limitar o desenvolvimento de aspectos da grandeza como a comparação e o uso de estratégias variadas, a exemplos do princípio de Cavalieri e de experimentos empíricos.

Conforme apontam alguns estudos e dada a importância de volume na formação do sujeito, seja para o meio social, profissional ou científico, estudos que favoreçam o ensino aprendizagem dessa grandeza são importantes. Diante disso, optamos por analisar os livros didáticos já mencionados, tendo em vista sua relevância para alunos e professores e, de um modo geral, para os leitores dessas obras.

A partir dos resultados apontados por Morais (2013), dentre eles o frequente uso do princípio de Cavalieri na construção das fórmulas para o cálculo de volume, optamos por investigar a abordagem de tal princípio nesses livros.

Sobre o uso dessa ferramenta, as OCN sugerem:

> Quanto ao trabalho com comprimentos, áreas e volumes, considera-se importante que o aluno consiga perceber os processos que levam ao estabelecimento das fórmulas, evitando-se a sua simples apresentação.
> (...) O Princípio de Cavalieri deve ser tomado como ponto de partida para o estudo de volumes de sólidos (cilindro, prisma, pirâmide, cone e esfera), permitindo ao aluno compreender o significado das fórmulas. (BRASÍLIA, 2006, p. 76).

Para abordagem da grandeza volume no ensino médio, as OCN destacam o princípio de Cavalieri como uma ferramenta importante para a compreensão das fórmulas que permitem calcular o volume dos sólidos geométricos prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas.

[1] Equivalente aos anos finais do ensino fundamental no Brasil.

3. Referencial teórico

Estudos anteriores têm defendido a conceitualização de volume como grandeza, que consiste em associar/dissociar o sólido, o número e a grandeza. Esse modelo foi inicialmente proposto por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989) para a construção do conceito de área, no qual estabelecem a distinção entre três quadros: quadro geométrico, quadro das grandezas e quadro numérico.

O quadro geométrico é composto pelas figuras geométricas espaciais, a exemplo de pirâmides, esferas, sólidos irregulares, entre outros. O quadro numérico é composto pelos números reais positivos como 4, 3,1245 ou $\sqrt{2}$. Por fim, o quadro das grandezas é constituído de classes de equivalência de sólidos de mesmo volume, as quais podem ser representadas pelo par número/unidade de medida como 7,5cm^3, 12 ml, 30L, etc.

Os quadros acima são independentes e por isso precisam ser distinguidos. Sólidos diferentes podem ter mesmo volume e mudança na unidade de medida provoca mudança nos valores numéricos sem alterar a grandeza. Ao variar a unidade de medida, a medida do volume muda, mas o volume é o mesmo. Considere, por exemplo, uma caixa cúbica: o objeto caixa pertence ao quadro geométrico, a medida de seu volume interno ao quadro numérico e as classes de equivalência dos sólidos, recipientes ou não, com o mesmo volume que a caixa dada pertencem ao quadro das grandezas.

Do mesmo modo em que esses elementos são independentes, eles podem ser articulados. Por exemplo, dada uma figura geométrica, é possível fazer corresponder a esse objeto um número real positivo, sua medida, a partir da escolha de uma unidade de mesma natureza que a grandeza a ser comparada. Isso permite associar o objeto geométrico, o número e a grandeza (MORAIS, 2013).

Nesse sentido, atividades relativas ao estudo dessa grandeza devem favorecer a passagem de um quadro para o outro e a dissociação/articulação entre o número, a figura e a grandeza.

Esse modelo foi adotado por várias pesquisas posteriores (LIMA, 1995; BALTAR, 1996) e sua abrangência foi ampliada para o estudo da conceituação de volume (OLIVEIRA, 2002; ANWANDTER-CUELLAR, 2008).

Princípio de Cavalieri

A enunciação do princípio de Cavalieri se baseia naquela proposta por Lima (2009), que requer a priori as seguintes definições: sejam A e B dois sólidos e □ um plano horizontal escolhido. Todos os planos paralelos a □ também serão ditos horizontais. Cada plano □ determina secções planas nos sólidos A e B, que chamaremos, respectivamente, de A_1 e B_1, que são as interseções do plano □ com os sólidos A e B dados. Se, para todos os planos horizontais □, a figura A_1 tem mesma área que a figura B_2, o princípio de Cavalieri afirma que o volume de A e o volume de B são iguais, conforme enunciado abaixo:

> Sejam A e B dois sólidos. Se qualquer plano horizontal secciona A e B segundo figuras planas com áreas iguais, então o vol (A) = vol (B) (LIMA, 2009, p. 68).

Segundo Lima (2009), esse princípio é um teorema e, portanto, pode ser demonstrado. Entretanto, será admitido aqui sem demonstração.

Recorrendo-se ao princípio de Cavalieri, conforme acima mencionado, as fórmulas de volume do prisma, pirâmide, cilindro, cone e da esfera podem ser demonstradas. A seguir, seguem as referidas fórmulas (LIMA, 2009):

- T_1 – O volume de um paralelepípedo é dado pelo produto da área da base pela altura;
- T_2 – O volume de um cilindro é dado pelo produto da área da base pela altura;
- T_3 – O volume de um cone é dado por um terço do produto da altura pela área da base;
- T_4 – O volume de uma esfera de raio *r* é dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Lima (2009) apresenta apenas os quatro teoremas acima, pois ele define prisma como sendo um sólido cilíndrico e pirâmide como um sólido cônico cujas bases são, respectivamente, polígonos. Na educação básica, essas definições não são usuais. Portanto, recorremos a Carvalho, Lima, Wagner e Morgado (1997), os quais apresentam mais dois teoremas:

- T_5 – O volume do prisma é dado pelo produto da área da base por sua altura.
- T_6 – O volume de qualquer pirâmide é dado por um terço do produto da área da base pela altura.

Os autores acima mencionados consideram o ensino médio um momento oportuno para demonstração dessas fórmulas, desde as mais simples (como no caso dos paralelepípedos não reto-retangulares) como as mais trabalhosas (prismas e pirâmides, por exemplo). Para tanto, o princípio de Cavalieri é uma ferramenta importante nesse processo. Além disso, esses autores sugerem ainda que se deve dedicar uma atenção maior ao estudo desse conteúdo por estabelecer relação com outros domínios matemáticos (geometria plana, por exemplo) e propor atividades que despertem o interesse e motivação dos alunos (MORAIS, 2013).

Vale salientar também que o referido princípio possibilita conceituar volume como grandeza, uma vez que favorece o uso de estratégias que permite explorar o modelo de quadros acima mencionado.

4. Metodologia da pesquisa

Foram analisadas as sete coleções de livros didáticos aprovados no PNLD 2102. Inicialmente, foi feito uma varredura inicial na qual se verificou os livros e respectivos capítulos em que volume é abordado como objeto de estudo. Feito isso, foi realizada uma análise minuciosa dos textos introdutórios e dos exercícios resolvidos e propostos, de onde foram extraídos os dados, cuja discussão é apresentada a seguir. As coleções serão identificadas por coleção A, coleção B, etc. e não serão explicitadas, uma vez que este artigo não é de ordem comparativa.

5. Dados e resultados

A Tabela 1 a seguir sintetiza os sólidos cujas fórmulas de volume são introduzidas a partir do princípio de Cavalieri.

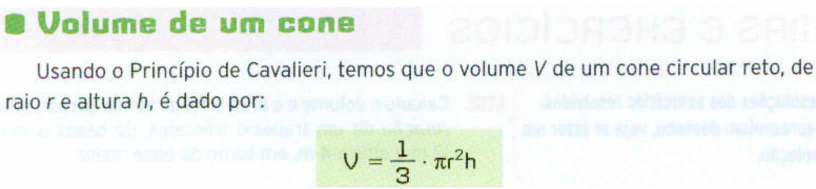
Tabela 1 - Fórmulas justificadas pelo princípio de Cavalieri

Coleção	Sólidos				
	Prisma	Pirâmide	Cilindro	Cone	Esfera
Coleção A	X	X	X	X	-
Coleção B	X	X	X	X	X
Coleção C	X	X	X	X	X
Coleção D	X	X	X	X	X
Coleção E	X	X	-	-	-
Coleção F	X	X	X	X	X
Coleção G	X	X	X	X	X

Fonte: Morais (2013)

Nota-se que tal princípio é bastante utilizado como ferramenta na construção das fórmulas de volume dos sólidos escolares contemplando, portanto, o que indicam os documentos de orientações curriculares (BRASIL, 2002; BRASÍLIA, 2006) e estudos citados na revisão de literatura (CARVALHO; LIMA; WAGNER E MORGADO, 1997; LIMA, 2009).

Dentre o conjunto das coleções, apenas a coleção E não justifica as fórmulas de volume para alguns sólidos, conforme indica a tabela 1, embora mencione o princípio de Cavalieri, como mostra a figura seguinte:



Volume de um cone

Usando o Princípio de Cavalieri, temos que o volume *V* de um cone circular reto, de raio *r* e altura *h*, é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$$

Figura 1 - Coleção E (2010, p. 303).

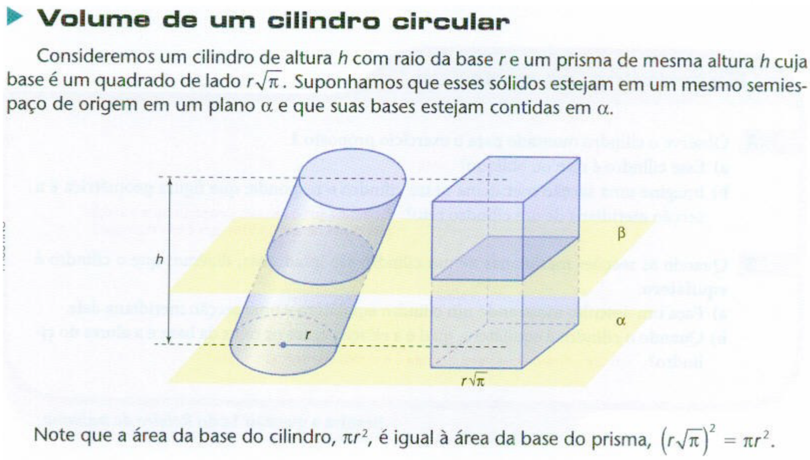
Consideramos importante fazer referência a esse princípio, mas entendemos que isso não é suficiente, uma vez que por si só ele não garante a validade dessa fórmula.

Os dados da tabela 1 evidencia a importância dada pelos livros didáticos em atribuir sentido às fórmulas de volume recorrendo ao princípio de Cavalieri.

Entretanto, três coleções não apresenta clareza na justificativa de algumas formulas, quando não distingue hipóteses do que se deseja provar.

A não distinção entre hipótese e tese pode comprometer a compreensão da fórmula em jogo, bem como a aplicabilidade do princípio de Cavalieri.

A coleção F justifica a construção da fórmula de volume do cilindro e do cone por meio do princípio de Cavalieri para uma situação particular apenas, como mostra a figura 2.


Volume de um cilindro circular

Consideremos um cilindro de altura h com raio da base r e um prisma de mesma altura h cuja base é um quadrado de lado $r\sqrt{\pi}$. Suponhamos que esses sólidos estejam em um mesmo semiespaço de origem em um plano α e que suas bases estejam contidas em α.

Note que a área da base do cilindro, πr^2, é igual à área da base do prisma, $\left(r\sqrt{\pi}\right)^2 = \pi r^2$.

Figura 2 - coleção F (2009, p. 242)

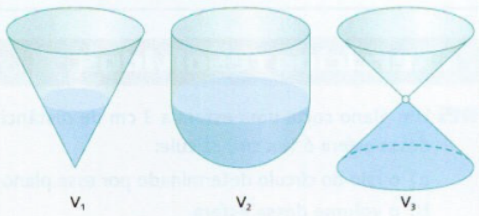
Diante disso, é possível que a estratégia acima remeta à questão: a fórmula ainda é se sustenta quando a base do prisma não é quadrada? Para tanto, essa coleção não oferece argumentos que podem, por exemplo, responder a esse questionamento (MORAIS, 2013).

Em se tratando do uso do referido princípio como recurso para a introdução das fórmulas de volume dos sólidos, observamos que o mesmo é efetivamente abordado na construção das fórmulas de volume em todas as coleções analisadas contemplando, portanto, as orientações dadas nos documentos curriculares brasileiros. Por outro lado, entendemos que ainda há avanços necessários quanto à abordagem desse princípio, uma vez que algumas coleções não justificam, por exemplo, a igualdade entre as áreas das seções, conforme já mencionado anteriormente.

Para o uso do princípio de Cavalieri como estratégia para a resolução de problemas, foram identificadas apenas quatro atividades em que o mesmo pode ser aplicado, conforme o exercício seguinte:

76 Junte-se a um colega e resolvam o exercício.

(ENEM) Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca. Neles, são colocados líquidos até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras.



Representando por V_1, V_2 e V_3 o volume de líquido em cada um dos recipientes, tem-se: b

a) $V_1 = V_2 = V_3$
b) $V_1 < V_3 < V_2$
c) $V_1 = V_3 < V_2$
d) $V_3 < V_1 < V_2$
e) $V_1 < V_2 = V_3$

Figura 3 - Coleção C (2010, p. 156)

No exemplo acima (figura 3), está em jogo a comparação não numérica de volume, o que pode remeter ao quadro geométrico. É possível também que sejam mobilizadas estratégias do ponto de vista algébrico. De todo modo, a não explicitação de medidas é um dado relevante, uma vez que as mesmas são demasiadamente recorrentes em situações de medição. Nessa atividade, a negação do princípio de Cavalieri pode ser utilizada como uma estratégia para resolver o problema.

O exemplo seguinte compara o volume de dois recipientes com bases e alturas iguais (de mesma área e mesmo comprimento, respectivamente).

16 Dois vasos de formas diferentes têm, internamente, a mesma altura H e bases planas de mesma área. Essas bases estão apoiadas sobre o mesmo plano horizontal de uma mesa, conforme mostra a figura. Colocando água em ambos até a mesma altura h (qualquer que seja h, com $0 < h \leq H$), verificamos que, nos dois vasos, a área da superfície da água é a mesma. Que relação existe entre os volumes internos desses dois vasos? Justifique sua resposta.

Os volumes são iguais pelo princípio de Cavalieri.

Figura 4 - coleção F (2009, p. 224)

Destaca-se nessa atividade, o uso do princípio de Cavalieri como justificativa para a igualdade dos volumes dos sólidos. Do ponto de vista do modelo de quadros (DOUADY E PERRIN-GLORIAN, 1989), esse exercício permite explorar que “sólidos diferentes podem ter mesmo volume”, conforme sugere Morais (2013).

O exemplo seguinte reforça a distinção entre o sólido e a grandeza, pois os prismas são qualitativamente diferentes e têm mesmo volume. O princípio de Cavalieri é uma estratégia em potencial, se o sujeito percebe que as alturas são iguais, o que pode ser verificado algebricamente através dos comprimentos. Por outro lado, a explicitação de medidas pode favorecer o uso da fórmula de volume de um prisma.

Nessa atividade, destacam-se a distinção entre a grandeza e sólido e o uso em potencial do princípio de Cavalieri como estratégia para resolver problemas.

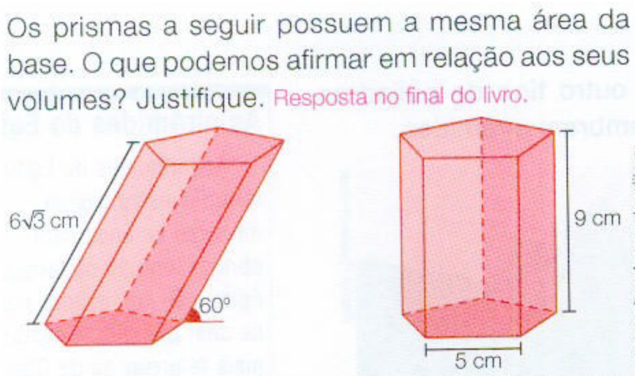


Figura 5 - coleção G (2010, p. 89)

As atividades anteriormente apresentadas se destacam essencialmente por duas razões: por favorecer o desenvolvimento de estratégias variadas para resolver o problema, dentre elas o uso do princípio de Cavalieri, e a distinção entre a grandeza, a medida o sólido. Na figura 3, por exemplo, é possível comparar os volumes dos sólidos a partir do campo geométrico e na figura 4 a partir do princípio de Cavalieri. Além disso, situações dessa natureza permitem explorar outras características da grandeza e sem necessariamente recorrer a procedimentos algébricos e/ou numéricos, que já são bastante enfatizados em situações de medição, conforme aponta Morais (2013).

Finalizando esse artigo, onde buscamos identificar as fórmulas de volume trabalhadas nos LDs e o uso ou não do princípio de Cavalieri, constatamos que no conjunto dos livros didáticos analisados, as fórmulas dos sólidos escolares prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera são contempladas. Verificamos também que para a construção dessas fórmulas, os LDs recorrem ao princípio de Cavalieri, conforme sugerem os textos curriculares. Por outro lado, tal princípio poderia ser mais enfatizado também nos exercícios propostos, dada a sua relevância seja como teorema, seja como estratégia, além de favorecer a distinção entre a grandeza e o sólido.

6. Referências

ANWANDTER-CUELLAR, N. Etude de conceptions d'élèves à propos du concept de volume. Mémoire de master - 2 HPDS (Histoire Philosophie et Didactique des Sciences) - Université Montpellier 2, 2008.

BARROSO, J. M. Conexões com a Matemática. Vol. 1, 2, 3. Ed. Moderna, 2011.

BALTAR, P. M. Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes : une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège. Tese de Doutorado. Université Joseph Fourier. Grenoble, 1996.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares para o Ensino Fundamental. Brasília, 1998.

_______. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. PCN+: Ensino Médio orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, 2002b.

_______.Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Guia de livros didáticos: PNLD 2012: Matemática / Brasília, 2011.

_______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Orientações curriculares para o ensino médio. Volume 2, 2006, p. 69 – 98.

CARVALHO, P. C. P.; LIMA, E. L.; WAGNER, E.; MORAGADO, A. C. O. A Matemática no Ensino Médio - volume 2. Publicação SBM, 1997.

DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações. Vol. 1, 2 e 3. São Paulo: Ática, 2010.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN. M.-J. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. In: Educational Studies in Mathematics. vol.20, n. 4, p. 387 424, 1989.

FIGUEIREDO, A. P. N. B. Resolução de problemas sobre a grandeza volume por alunos do ensino médio: um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Programa de Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Centro de Educação, UFPE, Recife, 2013.

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO, R., ALMEIDA, N. Matemática: ciência e aplicações. Vol. 1, 2 e 3. Ed. 6 – São Paulo: Saraiva, 2010.

LIMA, E. L. Medida e Forma em Geometria. 2ª Edição, Publicação SBM, 2009.

LIMA, E. L. & CARVALHO, P. C. P. & WAGNER, E. & MORGADO, A. C., A Matemática para o ensino médio, 9ª Edição, Publicação SBM, 2006.

LIMA, P.F. Considerações sobre o conceito de área. In: Anais da Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática. Recife, 1995.

MORAIS, L. B. Análise da abordagem da grandeza volume em livros didáticos de Matemática do ensino médio. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Programa de Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Centro de Educação, UFPE, Recife, 2013.

OLIVEIRA, G. R. F. Construção do Conceito de Volume no Ensino Fundamental: um estudo de caso. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2002.

PAIVA, M. Matemática – Paiva. Vol. 1, 2 e 3. Ed. – São Paulo: Moderna, 2009.

RIBEIRO, J. Matemática: ciência, linguagem e tecnologia. Vol. 1, 2 e 3. São Paulo: Scipione, 2010.

SMOLE, K. C. S., DINIZ, I. S. V. Matemática: ensino médio. Vol. 1, 2 e 3. 6 ed. – São Paulo: Saraiva, 2010.

SOUZA, J. R. Novo olhar matemática. Vol. 1, 2 e 3. 1 ed. São Paulo: FTD, 2010.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. Recherches em Didactique des Mathématiques – RDM, v. 10, nº 2, 3. pp. 133 – 170, Grenoble, 1990.