



## OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO E A COMPREENSÃO DE VOLUME POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio - GT10

Ana Paula Nunes Braz FIGUEIREDO  
Universidade Federal de Pernambuco  
*apnbf@yahoo.com.br*

Amanda Barbosa da SILVA  
Universidade Federal de Pernambuco  
*amanda\_mat123@hotmail.com*

### RESUMO

Este trabalho tem como objetivo identificar quais os principais registros de representação utilizados pelos alunos do terceiro ano do ensino médio e quais relações os alunos estabelecem entre o quadro numérico e geométrico ao resolver questões que abordam o conceito de volume. Aplicamos 51 atividades com alunos de escolas estadual, federal e particular. Adotamos como aporte teórico a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Constatamos que há uma falta de compreensão do volume como grandeza diante de situações de produção, pois os alunos não conseguiram produzir sólidos de volume menor ou igual ao sólido dado e por vezes confunde a grandeza volume com a figura geométrica, percebemos também lacunas e entraves com respeito às relações entre volume e outros conceitos como o de área. Dentre os resultados, constatou-se que os alunos não se apropriaram do conceito de volume e dão ênfase à medida.

Palavras- chaves: Volume, Grandezas e Medidas, Representações.

### 1. Introdução

Volume, assim como outras grandezas como massa, área, perímetro, tem um uso de grande significado social, pela presença em atividades do cotidiano. Torna-se relevante seu estudo dentro de um programa de matemática, não só por configurar aplicabilidade da disciplina na prática social, como também por possibilitar a integração entre os vários tópicos

programáticos (sistema de numeração, medidas, operações com números racionais, espaço e forma) e entre outras disciplinas como a física e a química.

A análise de pesquisas anteriores sobre o tema, como de Barros (2002) e de Oliveira (2002), revelou diversos tipos de erros associados à expressão “os alunos não compreendem o princípio de conservação de volume”. Além disso, mostra a persistência das dificuldades conceituais em torno do conceito de volume, da distinção entre volume e capacidade, e entre outras grandezas como massa e peso. Os autores supracitados também observaram que os alunos recorrem, na maioria dos casos, à utilização de fórmulas para calcular o volume.

Como referencial teórico utilizamos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, tal teoria nos fornece o suporte necessário para inserir nesse estudo exploratório a análise dos registros de representação semiótica. Segundo Raymond Duval (2011), a aprendizagem passa necessariamente pelo uso dos registros, em especial, o autor enfatiza a importância da variedade de representações de um mesmo objeto matemático e a atividade de conversão de registros.

Esta pesquisa objetivou analisar a compreensão de volume como grandeza por alunos do ensino médio por meio da análise da aplicação de atividades e entrevistas. Além dessa análise, investigamos na presente pesquisa como os alunos recorrem aos registros de representação semiótica para demonstrar sua compreensão das atividades e também como utilizam os registros para resolver as questões propostas. Assim, verificamos o uso dos registros figural e língua materna, também analisamos a conversão com esses dois registros.

## 2. Referencial Teórico

Como fundamentação teórica, recorreremos à teoria das representações semióticas de Raymond Duval. A presente pesquisa envolve o uso de dois registros, a língua materna (o enunciado das questões) a representação figural, ora apresentada na atividade e ora produzida pelos alunos. A teoria das representações semióticas defende que para a aquisição do conhecimento matemático é essencial a mobilização de ao menos dois registros, ou seja, é necessário reconhecer o mesmo objeto matemático em diferentes sistemas de representação.

A teoria das representações semióticas destaca o papel das representações para aprendizagem em matemática, de acordo com o pesquisador Duval (2009, p.29) “porque não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação.” As representações semióticas estão presentes na matemática de várias maneiras: figuras geométricas, gráficos, fórmulas algébricas e enunciados em língua natural, expostos em diversos materiais, até mesmo na tela do computador. Elas tem importante participação no aspecto cognitivo e não apenas em transmitir informações, pois como não temos acesso aos objetos matemáticos (ponto, retas, funções, números), é por meio das representações semióticas que temos acesso aos objetos matemáticos.

Duval (2011) afirma que os registros são sistemas semióticos que nos permitem ter acesso a objetos que são inacessíveis pela percepção. Além disso, Duval (2011) afirma que

Um registro é um sistema semiótico cognitivamente criador. Isso quer dizer que, para considerar um sistema semiótico como um registro, é preciso identificar as operações de produção de representações que ele permite executar de maneira original e específica. (DUVAL, 2011, p.83)

É importante destacar que a variedade de representações ressalta aspectos diferentes de um mesmo conteúdo. Portanto, dispor de várias representações semióticas para o mesmo objeto possibilita maior compreensão do mesmo, já que pode haver uma relação de complementaridade entre as diferentes representações. Segundo Duval, mais importante do que procurar a melhor representação para um objeto matemático, deve-se buscar a variedade de registros e, mais importante ainda, trabalhar a passagem de um registro para o outro. Só assim, afirma o pesquisador, reconhece-se um mesmo objeto matemático mesmo quando em diferentes representações, ou seja, realizar transformações de registros.

As transformações mencionadas são denominadas tratamento e conversão. O tratamento é uma transformação em que se permanece no interior do mesmo sistema semiótico.

As representações gráficas – desenhos, imagens gráficas, no papel ou na tela do computador – constituem-se em um registro de representações semióticas fundamental na matemática. A conversão é a transformação de um registro em outro. Por exemplo, quando, no discurso, usamos a palavra ‘triângulo’ e a associamos a um determinado desenho (de triângulo) estabelecemos uma conversão do registro da linguagem natural para o registro figural. No sentido oposto, quando temos um desenho e atribuímos a ele o termo ‘triângulo’ estamos convertendo o registro figural no registro da língua natural. O pesquisador francês adverte que, no caso citado neste parágrafo, não se trata de uma operação simples e localizada, redutível a uma mera associação ou codificação entre dois registros (Ver Duval, 2003, p. 16 e 17). Como se trata de conversões entre registros, toda a complexidade dessa operação poderia ser explorada, o que, segundo Duval, não tem sido feito no ensino usual.

### 3. Metodologia da Pesquisa

Devido à existência de poucos trabalhos sobre esse tema, optamos por realizar um estudo exploratório, no qual trabalhamos com um grupo de 51 alunos do ensino médio previamente selecionados, de uma escola da rede particular, uma escola da rede pública estadual e uma escola da rede pública federal de ensino da cidade de Recife-PE. As escolas foram selecionadas por serem de referência para o ensino médio nessa cidade, porém, na análise dos dados, todos os sujeitos são tratados indiscriminadamente por não haver intenção de comparar performances das escolas e sim, com o intuito de obter procedimentos de resolução diversificados.

O teste de sondagem permitiu observar como cada aluno, em situação individual e sem consulta, lida com problemas de diversos tipos, envolvendo volume, além de permitir uma confrontação com a análise a priori. As entrevistas, com dez alunos selecionados, objetivaram validar ou não as pistas e evidências sobre a construção do conceito do volume obtidas a partir da aplicação do teste de sondagem, para esclarecer as respostas dadas por eles no teste escrito, confirmando ou não a interpretação dada à resolução deles.

Além disso, verificamos nas resoluções dos alunos que tipos de registros eles utilizam e como podem indicar a compreensão ou não do problema proposto. Com esta análise é possível perceber inicialmente como os alunos interpretaram o atividade com o registro em

língua materna e com o registro figural. Com a entrevista foi possível obter maiores detalhes sobre o raciocínio dos alunos para interpretar as representações e também produzir suas representações.

Para construção do questionário, levamos em consideração o estudo de Anwandter-Cuellar (2008) a partir do qual refletimos a respeito das situações de produção, e como os alunos do ensino médio lidam com ela, lembrando que este estudo trata-se de um recorte da pesquisa mais ampla que contemplou os três tipos de situação.

O teste, do total de doze questões envolvendo as situações de volume, continha duas questões de situação de produção, ambas retiradas do trabalho de Anwandter-Cuellar (2008), conforme a seguir:

1) O empilhamento abaixo foi construído a partir de cilindros de  $2\text{cm}^3$ ,  $4\text{cm}^3$  e  $8\text{cm}^3$  respectivamente. Construa sólidos com  $\frac{1}{3}$  do volume deste empilhamento. Saiba que os cilindros têm a mesma altura mas apresentam variação de raios.

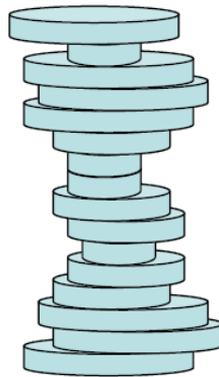


Figura 1 – Empilhamento apresentado na questão 1

Codificamos de Q1 a primeira questão. Alguns erros podem ser previstos para esta questão, como a contagem incorreta do volume do sólido a ser construído; ou construir 3 sólidos com a mesma quantidade de cilindros de mesmo volume presentes na questão, e considerar o volume final do sólido construído como sendo apenas a soma dos volumes dos cilindros que participaram da construção de cada sólido, desconsiderando os cilindros que restaram da distribuição. Esta forma de lidar com a divisão de números naturais refere-se à discretização da grandeza.

A segunda questão só foi alterada devido à tradução, para trocar o personagem de Luc para João. Codificamos de Q2a, a letra a desta segunda questão, de Q2b, a letra b e de Q2c, a letra c.

2) João possui 36 cubinhos de 1cm de aresta. Ele quer organizá-los de modo a formar um paralelepípedo retângulo.

a) Indique quantos paralelepípedos retângulos diferentes João poderá formar com os 36 cubinhos.

b) João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados possuem o mesmo volume. O que você acha?

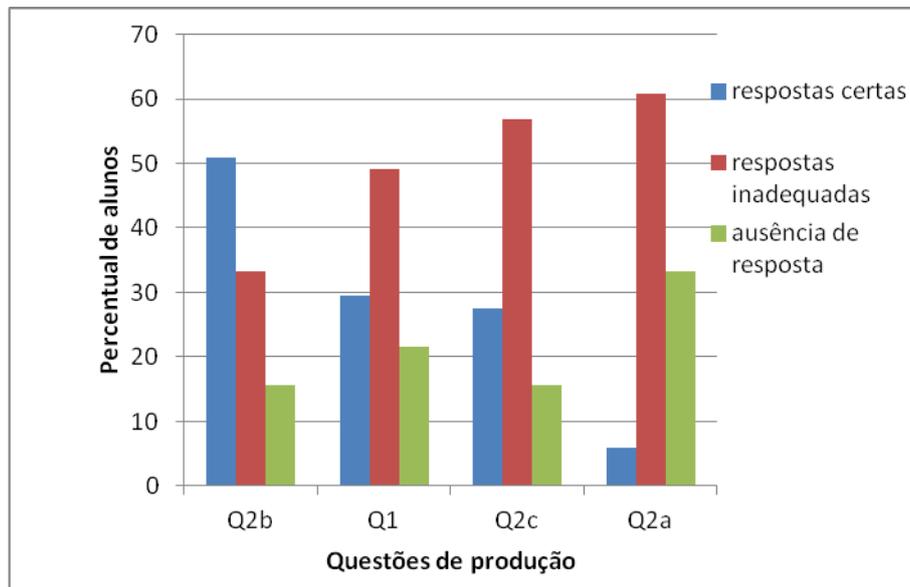
c) João acha que todos os paralelepípedos retângulos formados têm a mesma área pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele?

A segunda questão apresenta como objetivos: na letra a, observar se o aluno compreende a invariância do volume por decomposição e recomposição; na letra b, observar se o aluno compreende a invariância do volume por isometria; e na letra c, observar se o aluno compreende área e volume como grandezas distintas.

#### 4. Dados e Resultados

As situações de produção Q1 e Q2a obtiveram índices de acertos abaixo de 30%, e elevado índice de ausência de respostas, acima de 20%. Tais questões necessitavam da construção de um sólido. Portanto, nesse tipo de situação, os resultados apontam indícios de que os alunos não conseguem calcular o volume do sólido a ser construído e que os alunos não conseguem dissociar o sólido do volume, e construir sólidos diferentes do sólido dado. Observe o gráfico abaixo:

Gráfico 1- Resultado das Situações de produção



A Q1 trata-se de uma situação de produção que permite observar se o aluno mobiliza a ideia de independência do volume em relação ao objeto. Nesta questão, para o aluno alcançar o seu objetivo, deve construir sólidos diferentemente do sólido exposto, cujo volume é um terço do volume do sólido original. Deverá usar como estratégia a medida a partir da contagem dos volumes dos cilindros. Pode utilizar outro instrumento de medida que são os cilindros, para sua resolução e pode também construir outros sólidos diferentes dos cilindros dados, porém com seu volume correspondendo à terça parte do volume do sólido desenhado, o que mostra a independência do volume com a forma do sólido, considerando o volume como uma grandeza autônoma.

Apenas quinze alunos (29,41%) conseguem calcular o volume do sólido e construir o sólido com um terço do volume calculado; percentual bem abaixo do observado no trabalho de Anwandter-Cuellar (2008), que obteve 72%. Sete alunos que acertaram, construíram empilhamentos de cilindros, mostrando dependência do volume com a forma do objeto, assim como foi observado no estudo de Anwandter-Cuellar (2008).

Apenas um dos alunos construiu um cilindro, além de um paralelepípedo, demonstrando uma compreensão relativamente ampla da independência entre volume e o sólido. Observe o exemplo:

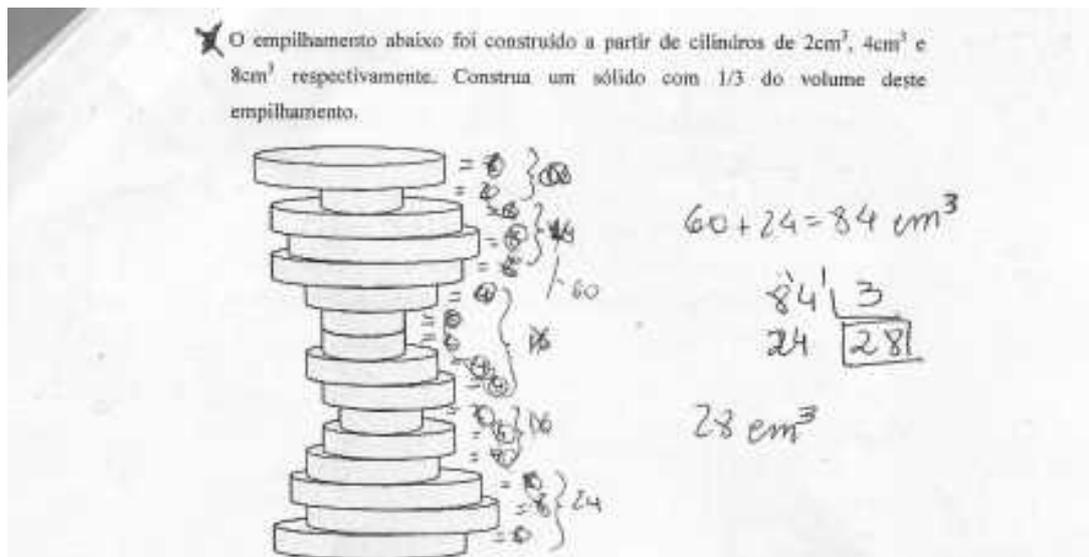


Figura 2- Extrato do protocolo de aluno JOR- Atividade Q1.

Observando a figura 1 acima, percebemos que o aluno conseguiu representar em dois sólidos o volume solicitado. Utilizando o registro figural o aluno demonstrou a compreensão de separar o conceito matemático em jogo (volume) de suas possíveis representações. Dialogando com a Teoria das Representações Semióticas, ao resolver a questão com duas figuras diferentes (ambas no registro figural), o aluno demonstrou que separa o objeto matemático (sólido) de seus atributos (medida do volume). Observamos também que o aluno JOR não se prendeu a representação do empilhamento para resolver a questão e interpretou corretamente o registro em língua materna (enunciado da questão), é importante salientar que o aluno justificou sua resolução com o registro figural e não com o registro em língua materna, o aluno recorreu também a algoritmo. Ao analisar os registros utilizados nas respostas, podemos afirmar que os alunos recorrem bastante ao registro figural e parecem se sentir mais à vontade para justificar seu raciocínio por meio de representações do que no registro em língua materna.

Três alunos calculam o volume do sólido a ser construído, utilizando a fórmula do volume do cone, já que o sólido da questão é constituído por um empilhamento de diversos cilindros, e acreditam que o sólido a ser construído é um cone, errando a questão. Observe abaixo:

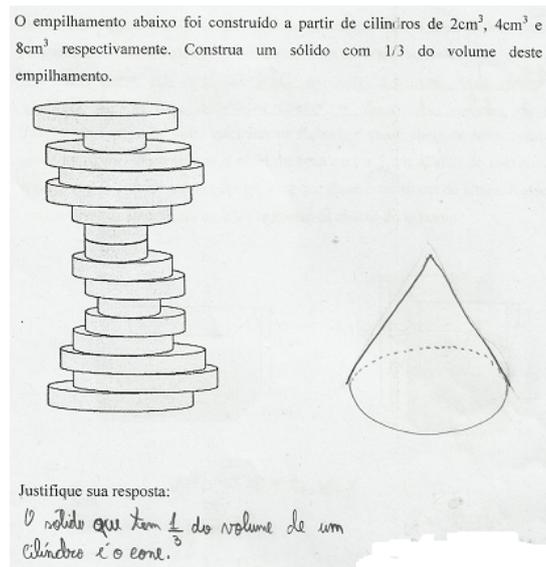


Figura 3- Extrato do protocolo de aluno CLA- Atividade Q1.

Na figura 2, é visível que o aluno recorre ao uso de fórmulas para resolver a questão, ele associa, erroneamente, que as formulas indicam a relação de um terço do volume. Como o volume de um cone pode ser escrito  $V = \frac{1}{3} (\pi r^2 h)$  e o volume de um cilindro pode ser escrito como  $V = \pi r^2 h$ , o aluno dá indícios em sua resposta de que recorreu a esses registros algébricos em vez de pensar em estratégias alternativas ao uso de fórmulas.

A questão Q2a, em que era dado o volume para serem construídos com cubinhos sólidos diferentes, foi a que mais obteve respostas inadequadas deste grupo de situações (55,78%), o que dá indícios de que os alunos tenham dificuldades em compreender a invariância do volume por decomposição e recomposição, ou seja, de ser capaz de produzir sólidos de mesmo volume com a mesma quantidade de cubinhos. Apenas três alunos realizaram a montagem dos sólidos corretamente. Ver figura abaixo.

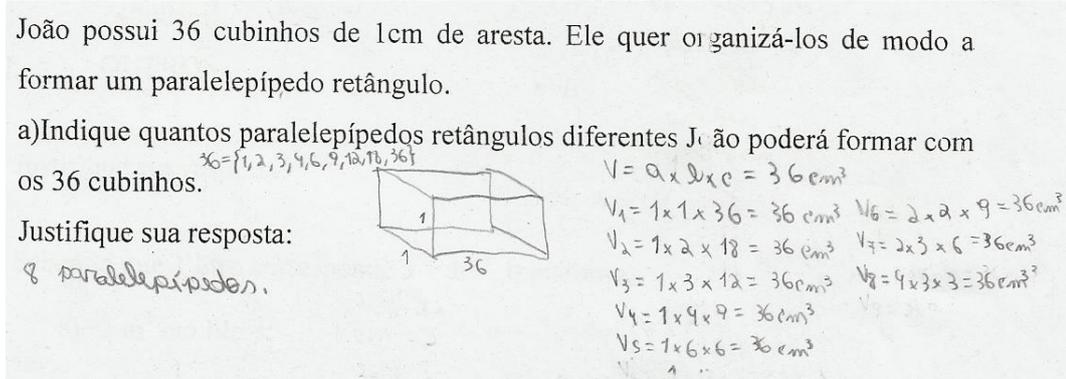


Figura 4 - Extrato do protocolo de aluno FLA- Atividade Q2a

Dos erros, treze alunos buscaram nos divisores as combinações possíveis, porém erraram na quantidade de combinações. Outros erros indicam que os alunos buscaram dividir em partes iguais os 36 cubinhos e acharam respostas diversas, como 3, 4, 6, 12 e 18 paralelepípedos, o que aponta para a interpretação incorreta do enunciado da questão.

Quanto aos registros, com a análise da figura 3, percebemos que o aluno utilizou o registro figural e o registro algébrico com a fórmula de volume, inclusive percebeu a invariância do volume em sólidos diferentes, porém errou na quantidade de combinações. A compreensão de diferenciar diferentes sólidos (objetos geométricos) de seus atributos (volume, área, perímetro) é muito importante para aprendizagem em matemática, assim como a compreensão de que com a mesma fórmula é possível obter o mesmo volume com sólidos diferentes.

De acordo com os resultados obtidos, podemos observar no gráfico 1 que a Q2b foi melhor compreendida pelos alunos, mostrando percentual de acertos igual a 50,98%, o que evidencia que os alunos compreendem volume como uma grandeza autônoma.

Na figura abaixo percebemos que o aluno não fez a diferenciação entre os possíveis sólidos e a conservação do volume, ou seja, para o aluno ao variar a representação do sólido (“sua forma”) o volume também seria outro. O raciocínio do aluno demonstra que não houve a compreensão de que diferentes registros (registro figural) podem representar o mesmo objeto ou conceito matemático, no caso, volume.

b) João acha que todos os paralelepípedos retângulos possuem o mesmo volume.  
O que você acha?

Acho que não, pois a quantidade de volume depende da forma que ele vai montar cada paralelepípedo, (com mais cubinhos na horizontal ou vice-versa)

Figura 5- Extrato do protocolo de aluno LMSB- Atividade Q2b.

A questão Q2c obteve um índice mais baixo de respostas certas, em relação à Q2b, por tratar da relação entre duas grandezas, volume e área. Os alunos podem ter mobilizado erroneamente que: “As superfícies de sólidos de mesmo volume tem a mesma área. Quanto aos registros utilizados na questão Q2c, os alunos que justificaram com o registro em língua materna demonstraram que não houve uma compreensão entre as grandezas, nesse caso, o aluno relacionou erroneamente as duas grandezas ao mesmo sólido sem diferenciar corretamente no objeto os atributos de área e volume. É possível que a presença de uma representação figural na questão Q2c poderia ter facilitado a compreensão dos alunos de que a superfície (face) se refere a área e os cubinhos nas três dimensões o volume.

c) João acha que todos os paralelepípedos retângulos têm a mesma área pois possuem a mesma quantidade de cubinhos. Você concorda com ele?

Sim, pois possuem a mesma quantidade de cubinhos

Figura 6- Extrato do protocolo de aluno RBM- Atividade Q2c

## 5. Referências

ANWANDTER-CUELLAR, N. *Étude de conceptions d'élèves à propos du concept de volume*. 2008. 96f. Dissertação (Mestrado)- Université Montpellier , França, 2008.

BALTAR, P. M. *Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surface planes: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège*. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) - Université Joseph Fourier, Grenoble, 1996.

BARROS, J. S. de. *Investigando o conceito de volume no ensino fundamental: um estudo exploratório*. Dissertação (Mestrado)- Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2002.

DUVAL, R. *Semiósis e pensamento humano: Registros Semióticos e aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 160p.

DUVAL, R. *Ver e ensinar a matemática de outra forma. Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semiótica*. São Paulo, Editora Proem, 2011, Vol. 1.

FIGUEIREDO, A. P. N. B. *Resolução de problemas sobre a grandeza volume por alunos do ensino médio: Um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais*. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.

OLIVEIRA, G. R. F. *Construção do Conceito de Volume no Ensino Fundamental: um estudo de caso*. 2002. 135 f. Dissertação (mestrado em educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2002.