UMA HISTÓRIA SOBRE O DESENVOLVIMENTO DA LINGUAGEM ALGÉBRICA: DA RETÓRICA À VERBAL.

História e Filosofia da Matemática e da Educação Matemática (HFEM) – GT 02

EMANUELLE CLAUDIA DA SILA
Universidade de Pernambuco – Campus Petrolina
manu.by@hotmail.com

JOÃO PAULO CARNEIRO BARBOSA[1]
Universidade de Pernambuco – Campus Petrolina
joao.barbosa@upe.br

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo montar uma pequena linha do tempo do desenvolvimento da linguagem algébrica, desde a fase retórica até a linguagem algébrica ou formal. Assim como a matemática precisou evoluir para atender as necessidades humanas, a linguagem algébrica teve que se modificar a fim de satisfazer necessidades da própria matemática. Durante esse desenvolvimento, a linguagem algébrica passou por três fases: retórica ou verbal, sincopada e algébrica ou simbólica. A fase verbal, como o próprio nome já diz, é a fase onde todos os problemas matemáticos eram resolvidos em linguagem corrente. Na fase sincopada, foram incluídos alguns símbolos e abreviações. A fase simbólica é a fase em que não se faz uso de linguagem corrente ou abreviações, apenas símbolos são suficientes para que resoluções matemáticas sejam compreendidas. Vários matemáticos contribuíram para que essa mudança na linguagem matemática acontecesse, como por exemplo, Diofanto de Alexandria, considerado o pai da álgebra, François Viète e René Descartes.

Palavras-chaves: História, Linguagem matemática, Álgebra.

1. Introdução

Este trabalho vem expor, de maneira breve, uma parte da história da matemática, mais precisamente sobre o desenvolvimento e formalização da linguagem matemática mais utilizada atualmente, a linguagem algébrica[2].

A linguagem algébrica pode ser facilmente identificada, pois faz uso de letras quando se tem a intenção de realizar operações de modo generalizado. "O processo de crescente

[1] Professor do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade de Pernambuco – campus Petrolina, orientador do presente trabalho de pesquisa.

[2] Álgebra é uma variante latina da palavra árabe al-jabr, usada no título do livro "Hisab al-jabr w'as-muqabahh", escrito em Bagdá, por volta do ano 825 pelo matemático Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi. A tradução literal do título do livro é "ciência da restauração (ou reunião) e redução", mas, ainda de acordo com Baumgart (1993), matematicamente seria melhor "ciência da transposição e cancelamento" ou simplesmente "a ciência das equações". (FERREIRA e NOGUEIRA, 2007, p.3)

algebrização ocorrido ao longo da história, [...] está associado à necessidade de generalização" (ALMEIDA, 2010, p.20)

A linguagem algébrica se modificou consideravelmente até chegar ao ponto em que conhecemos hoje. Durante seu desenvolvimento ela passou por três importantes fases: a fase retórica, a sincopada e, por fim, a simbólica, que é a linguagem utilizada hoje.

A fase retórica se caracteriza pela ausência de símbolos para representar números e operações, sendo as mesmas descritas por meio da linguagem corrente. O período sincopado é a fase "onde apesar de ainda operar verbalmente, são introduzidas algumas abreviações para termos ou operações utilizadas frequentemente" (ALMEIDA, 2010, p. 20). Teria surgido com Diofanto de Alexandria por volta de 250 d.C. e desenvolvida posteriormente por varias civilizações. E a fase formal é o período "em que o poder de síntese das expressões é transmitido pelos símbolos." (FERREIRA e NOGUEIRA, 2007, p.4)

Dentre os matemáticos que certamente contribuíram para o desenvolvimento da linguagem algébrica, podemos destacar dois: François Viète, que é tido como o responsável pela introdução da linguagem formal; René Descartes, que ao publicar o *Lá Geometrie* teria realmente formalizado a linguagem utilizada, transformando sua obra em um divisor de águas na historia da matemática. Sobre isto, Ferreira e Nogueira (2007, p.5) dizem:

> Viète introduziu o uso das letras para indicar números desconhecidos da forma como são utilizadas até hoje, escrevendo equações e estudando suas propriedades. Ele foi o primeiro a utilizar letras como coeficientes genéricos (positivos) aproximando a representação simbólica das equações à praticada atualmente. [...] Apesar do avanço proporcionado pelos estudos de Viète e da beleza da Álgebra elaborada por ele, esta ainda estava incompleta e a Álgebra de Descartes veio não apenas completá-la, mas também complementá-la, ao possibilitar a síntese entre Geometria e Álgebra, agora de uma maneira sistematizada e formal, transformando a Álgebra geométrica dos gregos, em uma Geometria algébrica, utilizando os principais objetos algébricos, as equações, para representar entes geométricos, como retas, curvas, planos, sólidos, entre outros. (FERREIRA E NOGUEIRA, 2007, P.5)

A história do desenvolvimento da linguagem algébrica vem esclarecer o surgimento de diversas coisas que hoje utilizamos tão naturalmente sem nos questionarmos o porquê, como por exemplo, o uso do X como representação de um valor desconhecido. Conhecer as reais causas que levaram a certa mudança pode ajudar a usar melhor as ferramentas que já são conhecidas.

2. Referencial Teórico

São inúmeros(as) os(as) autores(as) que afirmam que conhecer a história da matemática é descobrir o porquê da criação (desenvolvimento) de algum teorema ou conteúdo matemático. Aqui, conhecer a história da matemática significa conhecer o desenvolvimento de uma das ferramentas mais importantes de toda a matemática. Aquela que possibilitou, e possibilita até os dias atuais, o desenvolvimento dessa ciência: a linguagem algébrica formal.

Almeida (2010), na tentativa de auxiliar a reconstruir a história da linguagem algébrica, apresenta algumas das mais importantes contribuições do tratado de álgebra de John Wallis. Nesse texto encontra-se um pouco sobre a história da linguagem matemática que antecedeu John Wallis, dando um destaque também para a contribuição de matemáticos para o desenvolvimento da linguagem, como Viète e Descartes.

Ainda sobre o desenvolvimento da linguagem matemática, Ferreira e Nogueira (2007), Panossian (2008), Rosa e Orey (2013) e Teles (2004), abordam o tema de modo resumido, pois o foco desses trabalhos é ligado à inclusão ou utilização da história da matemática no ensino da mesma e sobre as dificuldades encontradas pelos professores ao ensinar a linguagem algébrica para os alunos.

Apesar do foco dos trabalhos citados acima não ser expor a história da linguagem matemática propriamente dita, foram bastante importante para a composição deste trabalho no sentido de apresentar a importância da história da matemática para a compreensão dos conteúdos matemáticos, ou, no caso deste artigo, para a compreensão o desenvolvimento da linguagem algébrica formal.

Ferreira e Nogueira (2007) falam um pouco em seu trabalho como se deu a origem da palavra álgebra e monta um pequeno histórico do desenvolvimento da linguagem algébrica no qual em seu texto resume a linguagem algébrica como simplesmente álgebra já que, antigamente, a álgebra se resumia nos estudo e métodos de resoluções de equações, como ele mesmo fala em seu trabalho.

Panossian (2008) contextualiza a história do desenvolvimento da linguagem matemática, falando um pouco sobre as necessidades que levaram a tais mudanças além de também nos dar conceitos importantes como por exemplo da aritmética, álgebra antiga e moderna.

Rosa e Orey (2013) desenvolveram um trabalho ligado a etnomatemática. Eles tratam do desenvolvimento da linguagem matemática com uma ênfase na fase retórica contextualizando com problemas matemáticos resolvidos por métodos retóricos babilônicos. Eles nos dão alguns exemplos de resoluções de problemas em linguagem retórica e também cita os famosos tabletes de argila muito usados antigamente para o registro dessas resoluções.

Teles (2010) nos traz uma breve síntese da história do desenvolvimento algébrico. Ela se preocupa em mostrar claramente como as “divisões” ou “separações” da matemática eram antigamente entre aritmética, álgebra e geometria e que os povos antigos não conseguiam ver sua ligação. Os *Elementos* Euclides é dado como um exemplo disto. “Os matemáticos gregos nunca chegaram a estabelecer uma ponte entre a Álgebra geométrica de Euclides e o cálculo numérico do valor de x.” (p. 7)

Garbi (2009) vem nos contar como a criação da geometria analítica influenciou a formalização da linguagem algébrica. A obra de Descartes veio concretizar a passagem da linguagem matemática da linguagem sincopada para a formal. A geometria analítica veio completar e complementar a linguagem formal já desenvolvido pelo francês François Viète.

3. Metodologia da Pesquisa

A pesquisa foi caracterizada como bibliográfica, de caráter documental. Logo a metodologia se resumiu a leitura e análise de livros, artigos científicos, materiais encontrados na internet, entre outros, desde que estivessem relacionados com o tema do artigo.

Foram retirados destes textos todo o conteúdo necessário para o desenvolvimento da pesquisa.

4. Dados e Resultados

A linguagem matemática pode ser facilmente definida como a representação do pensamento matemático que o homem desenvolveu ao longo do tempo, juntamente com seu próprio desenvolvimento. “[...] é precisamente o uso da linguagem que determina o pensamento teórico do homem.” (LEONTIEV apud PANOSSIAN, 2008, p.22)

O conhecimento matemático do homem não foi sempre como é hoje, amplo e exato, ele surgiu de maneira simples e foi sendo modificado através do tempo de acordo com as necessidades que apareciam. Tendo isso como verdade, podemos afirmar que a sua maneira de ser representada também passou por alterações.

A escrita matemática foi sofrendo modificações ao decorrer do tempo, de acordo com a necessidade de simplificar as representações de operações, pois, à medida que a matemática foi evoluindo, os cálculos foram aumentando e de certo modo dificultando a realização operações e do registro das mesmas.

Esse período de modificação da escrita matemática pode ser dividido em três momentos históricos:

> i) Retórico – Onde todas as proposições são apresentadas de forma verbal e com total ausência de sinais.
> ii) Sincopado – Onde apesar de ainda operar verbalmente, são introduzidas algumas abreviações para termos ou operações utilizadas frequentemente.
> iii) Simbólico – Que conta com uma linguagem simbólica independente de palavras. (ALMEIDA, 2010, p. 20)

Sobre esse processo de transformação da linguagem matemática, Almeida (2010) nos diz que "O processo de crescente algebrização ocorrido ao longo da história, [...] está associado à necessidade de generalização" (p.20).

A fase retórica ou verbal se caracteriza como uma etapa em que não se fazia uso de símbolos nem de abreviações para expressar o pensamento algébrico. A operações realizadas nessa época eram escritas passo a passo em linguagem corrente.

> A álgebra retórica era escrita somente com o emprego de palavras sem a utilização de símbolos matemáticos.No entanto, as soluções dos problemas resolvidos com a utilização desse tipo de linguagem podem revelar indícios de generalização embora essas resoluções sejam baseadas na exposição de ideias para a determinação da solução desses problemas. (ROSA e OREY, 2013, p. 86)

Garbi (2009) nos dá um exemplo de como os problemas matemáticos eram resolvidos nesse período.

> Seja o clássico problema: **"Em um terreiro existem cabras e galinhas, sendo 32 cabeças e 88 pés. Quantos animais de cada tipo existem em tal terreiro?"** Hoje chamaríamos de x e y, respectivamente, os números de cabras e galinhas, montaríamos em um sistema de duas equações do primeiro grau com duas incógnitas e encontraríamos as respostas. Como o recurso aos símbolos não estava ainda disponível, o problema era resolvido da seguinte maneira: **"Se todos os animais existentes no terreiro fossem galinhas, haveria um total de 2 vezes 32 pernas, ou seja, 64 pernas. Como o total de pernas é 88, a diferença 88 menos 64, ou seja, 24 pernas, deve vir das cabras. Como cada cabra contribui com duas pernas para tal diferença, existem 24 dividido por 2, ou seja, 12 cabras no terreiro. Como há 32 animais, o número de galinhas é 32 menos 12, ou seja, 20".** Como se vê, o problema foi resolvido sem o uso de símbolos, de uma forma que, atualmente, costuma-se chamar de **"Álgebra Retórica".**(GARBI, 2009, p. 67 – Grifos Autor)

Podemos observar através desse exemplo que eles não faziam uso de generalizações para solucionar problemas matemáticos, utilizavam apenas exposições de idéias. Rosa e Orey (2013) nos apresentam outra resolução de problema matemático utilizando a linguagem matemática retórica.

> De acordo com esse contexto, consideremos o problema constante no tablete[13] YBC 6967, que foi escrito em um dialeto acadiano por volta do ano 1500 a.C. Esse problema foi estudado e editado por Neugebauer e Sachs (1945) e estabelece que: O comprimento de um retângulo excede a sua largura em sete unidades. A área do retângulo é de 60 unidades quadradas. Determine o comprimento e a largura do retângulo.A solução retórica desenvolvida pelos babilônios (Joseph, 1991) pode ser verificada por meio da utilização de 6 (seis) etapas10:
> 1) Determine a metade do valor em que o comprimento do retângulo excede a largura.
> O resultado de 7 ÷ 2 é igual a 3,5.
> 2) Multiplique 3,5 por 3,5.
> O resultado é 12,25.
> 3) Adicione 60 e 12,25.
> O resultado é 72,25.
> 4) Determine a raiz quadrada de 72,25.
> O resultado é 8,5.
> 5) Agora, proceda da seguinte forma:
> Subtraia 3,5 de 8,5
> 6) Adicione 3,5 a 8,5
> O comprimento do retângulo é 12 unidades e a largura é 5 unidades. (ROSA e OREY, 2013, 87)

Euclides de Alexandria, matemático conhecido por ser autor da famosa obra *Elementos*, fez uso da linguagem verbal em sua obra. "Os resultados do livro II de Euclides que são comumente referidos como "álgebra geométrica" foram formulados de maneira retórica" (ALMEIDA, 2010, p.22)

De acordo com Teles (2004)

> [...] a obra Elementos, com treze livros, dos quais dois são dedicados à Álgebra: o livro II e o livro V. Na Álgebra de Euclides as quantidades desconhecidas eram representadas por figuras geométricas. Nos **Elementos**, Euclides realizava todas as construções utilizando somente régua não graduada e compasso, não fazia cálculos nem estabelecia medidas. Preocupava-se apenas com as relações que podia obter geometricamente. A Álgebra geométrica antiga não era um instrumento ideal, mas era eficaz (BOYER,1974 e STRUIK, 1989 apud TELES, 2009, p.6).

[3]Os registros matemáticos antigos eram feitos em argila cozida. "Para escreverem os problemas matemáticos em tabletes de argila cozida, os babilônios utilizavam cunhas compostas por caracteres específicos, que foram desenvolvidas para esse tipo de escrita e que ficaram conhecidas como cuneiformes." (ROSA e OREY, 2013, p.85)

Pouco conhecemos sobre sua vida já que existem poucos registros sobre ele. Acredita-se que Euclides viveu durante o reinado de Ptolomeu I Sóter do Egito (304-285 a.C.)

> Proclo (410-485 d.C.), que escreveu comentários sobre Os Elementos, foi obrigado a apresentar raciocínios de plausibilidade para afirmar que Euclides viveu durante o reinado de Ptolomeu I Sóter do Egito (304-285 a.C.). Ele diz ainda que Euclides precedeu Arquimedes (287-212 a.C.), pois Arquimedes cita Os Elementos, que foi posterior a Eudoxo e Taeteto, pois os trabalhos destes foram incorporados ao livro Os Elementos

Vamos agora apresentar um exemplo retirado da obra *Elementos*:

> Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada. Seja a reta limitada dada AB. É preciso, então, sobre a reta AB construir um triângulo equilátero. Fique descrito, por um lado, com centro A, e, por outro lado, com distância AB, o círculo BCD, e, de novo, fique descrito, por um lado, com centro B, e, por outro lado, com a distância BA, o círculo ACE, e, a partir do ponto C, no qual os círculos se cortam, até os pontos A, B, fiquem ligadas as retas CA, CB. E, como o ponto A é centro do círculo CDB, a AC é igual à AB; de novo, como o ponto B é centro do círculo CAE, a BC é igual à BA. Mas a CA foi também provada igual à AB; portanto, cada uma das CA, CB é igual à AB. Mas as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si; portanto, também a CA é igual à CB, portanto, as três CA, AB, BC são iguais entre si. Portanto, o triângulo ABC é equilátero, e foi construído sobre a reta limitada dada AB. [Portanto, sobre a reta limitada dada foi construído um triângulo equilátero]; O que era preciso fazer. (EUCLIDES, 2009, p.99)

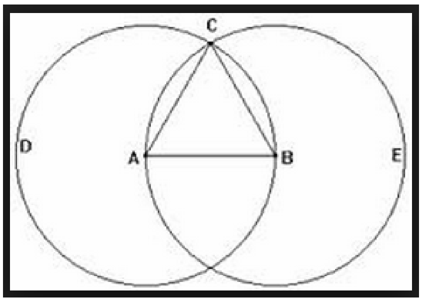

Figura 1 - Demonstração de Euclides

Note que, ao solucionar os problemas citados acima, não foi usado nenhum tipo de abreviação ou símbolos. Os problemas foram resolvidos apenas através de exposição de ideias.

Caso Euclides utilizasse a linguagem formal, essa demonstração e outras feitas em sua obra ficariam bem mais simples e resumida. Note que nos trechos “a AC é igual à AB” e “a BC é igual à BA” poderia ser facilmente escrita como “AC=AB” e “BC=BA”, respectivamente.

Após a chamada fase retórica, iniciou-se o período que chamamos de sincopado. No período sincopado, passou-se a utilizar abreviações e alguns símbolos durante a resolução de problemas e desenvolvimento de cálculos.

> Abreviando as palavras e mantendo o pensamento, pode-se considerar o momento da álgebra sincopada, [...]. Este usou palavras e abreviaturas para estudar o movimento e considerava que a variável estava relacionada ao número, não às suas propriedades ou à sua representação geométrica. (PANOSSIAN, 2008, p. 48)

Possivelmente Diofanto de Alexandria, nascido entre 201 e 214 — falecido entre 284 e 298, matemático grego, teria sido o primeiro matemático a utilizar símbolos em operações matemáticas iniciando-se assim o período sincopado.

> Andando um pouco no tempo, chegamos à Grécia, aproximadamente 400 anos antes de Cristo, Diofante de Alexandria, foi o primeiro matemático a fazer uso sistemático de símbolos algébricos, isto é, de abreviações nos problemas e nas operações com os números. (TELES, 2004, p.6)

Diofanto utilizava sinais especiais para a representação de incógnita (ς) e suas potências[4] não possuíam expoente superior a seis, porque estas não possuíam utilidade na solução de seus problemas. Almeida (2010) afirma que "Não havia um símbolo particular para a adição, mas existia um para a subtração, o que o obrigava a escrever os termos negativos após todos os positivos."

Após o período sincopado chegamos à linguagem formal matemática. Segundo Gil (2001) "Não existiam portanto fórmulas redigidas de maneira a poderem generalizar os problemas. Para tal ser possível, necessitava-se de uma nova álgebra: a álgebra simbólica".

Muitos matemáticos contribuíram para a formalização da linguagem matemática, ou seja, contribuíram com a transformação da linguagem retórica até a sua representação atual, chamada de linguagem algébrica, formal ou simbólica. François Viète e René Descarte são apontados como grandes responsáveis por essa formalização.

> O desenvolvimento da álgebra tem se baseado na elaboração de sistemas simbólicos, desde que a generalização de Viète e Descartes introduziram álgebra na matemática. Dessa maneira, a análise da simbologia matemática praticada por um dado autor ou em dada época oferece um bom parâmetro histórico para analisar a evolução de conceitos. (ALMEIDA, 2010, p.21)

[4] Para as potências da quantidade desconhecida x^2, x^3, x^4, x^5, x^6 eram empregados, respectivamente, os termos *Δ*Y, *KY*, *Δ*Y *Δ*, *ΔKY*, *KY K*. (ALMEIDA, 2010, p.22)

Levando em consideração que o contexto histórico em que estavam inseridos os influenciou, e que existia uma necessidade em se formalizar a linguagem matemática, deixando-a mais simplificada e prática, resultando assim na linguagem que utilizamos hoje.

5. Referências

ALMEIDA, M. A. R. de. **O tratado de álgebra de john wallis e suas relações com a álgebra britânica.** Rio de janeiro. 2010. Disponível em: <http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/25%20Marcel%20Almeida.pdf> Data de acesso: 20/05/2014.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FERREIRA, L. de L. A.. NOGUEIRA, C. M. I. **O desenvolvimento da linguagem algébrica e sua compreensão por meio da álgebra geométrica**. Paraná. 2007. Disponível em: < http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_lucimeire_lourdes_adorno.pdf>. Data de acesso: 13/04/2014.

GARBI, G. G. **O romance das equações Algébricas.** Editora Livraria da Física. 2 ed. 2009.

PANOSSIAN, M. L. **Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica de estudantes**: indicadores para a organização do ensino. São Paulo. 2008. P. 6-54. Disponível em: < http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-23012009-143154/pt-br.php> Data de acesso: 13/05/2014.

ROSA, M; OREY, D. C. (2013). **Etnomatemática e modelagem:** a análise de um problema retórico babilônio. Revista Latino americana de Etnomatemática. Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=274030491008> Data de acesso: 15/06/2014

TELES, R. A. de M. **A aritmética e álgebra na matemática escolar**. Pernambuco. 2004. Disponível em: < http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/02/MC58937242400.pdf> Data de acesso: 25/06/2014.