VIII EPBEM
Desenvolvendo o Pensamento Matemático em Diversos Espaços Educativos
27 a 29 de Novembro
UEPB Campina Grande, Paraíba.
SBEM PB
2014

TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA E A EVOLUÇÃO HISTÓRICA DE ALGUNS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO E SUAS MUDANÇAS DE BASE

História e Filosofia da Matemática e da Educação Matemática (HFEM) – GT 02

EDILSON GOMES DAS NEVES JÚNIOR
Fundação de Ensino Superior de Olinda
juniorgomesneves79@hotmail.com

MAURÍCIO ADEMIR SARAIVA DE MATOS FILHO
Estácio Recife - FIR
mmsaraiva@hotmail.com

RESUMO

Este trabalho aborda os aspectos históricos do surgimento de alguns sistemas de numeração e os processos de mudança de bases. O aporte teórico da pesquisa ancora-se nos estudos desenvolvidos pela Didática da Matemática, a Teoria das Situações Didáticas e as reflexões sobre Transposição Didática. Este estudo situa-se na esfera de uma pesquisa bibliográfica, a qual teve por objetivo pesquisar sobre o surgimento de alguns sistemas de numeração, a partir da sua trajetória histórica, na perspectiva subsidiar o processo de Transposição Didática Interna. O surgimento de algumas bases de numeração se tornou necessário para efetuar contagens mais extensas, tais como a base quinaria e a base decimal são exemplos de sistemas importantes. O saber, historicamente construído, sofre transformações ao longo do tempo e compreender essas transformações pode favorecer o processo de recontextualização dos saberes matemáticos proposto aos professores, como um caminho para ajudar o aluno no processo de aprendizagem.

Palavras- chaves: transposição, sistemas de numeração, história da matemática.

1. Introdução

O presente estudo aborda os aspectos históricos do surgimento de alguns sistemas de numeração e alguns processos de mudança de bases.

Compreender a trajetória histórica da construção dos sistemas de numeração pode possibilitar ao professor de Matemática maiores condições para realizar a Transposição Didática (CHEVALLARD, 1991). O aporte teórico da pesquisa ancora-se nos estudos desenvolvidos pela Didática da Matemática, a Teoria das Situações Didáticas, desenvolvida por Guy Brousseau e as reflexões sobre Transposição Didática proposta por Yves Chevallard.

Este estudo situa-se na esfera de uma pesquisa bibliográfica, a qual teve por objetivo pesquisar sobre o surgimento de alguns sistemas de numeração, a partir da sua trajetória histórica, na perspectiva subsidiar o processo de Transposição Didática Interna.

Nos dias de hoje, assuntos que envolvam mudanças de base, são estudados com mais ênfase em matérias especificas da eletrônica digital, ou seja, em estudos de nível profissionalizante, com a utilização de números binários, na linguagem de computadores, entre outras bases para este mesmo fim.

No que tange a problemas que utilizem bases numéricas, o entendimento deste assunto, muitas vezes, não depende só dos modelos, pelos quais as transformações são realizadas, é preciso entender como se deu o surgimento destas bases, pois, conhecer os aspectos históricos relativos à construção de um determinado saber pode favorecer no entendimento deste. E para que se aprenda determinado assunto é preciso compreender, e isso vai além de dar respostas certas comparando a forma de fazer com outras já vistas. O aluno tem de construir relações entre o novo e o conhecido. E levar a história do conhecimento matemático para sala de aula é um recurso didático que já está praticamente incorporado ao ensino desse saber, de acordo com Gitirana e Pitombeira(2b010).

2. Surgimento de Algumas Bases Numéricas

Boyer (2003) relata, que a matemática de hoje deriva de idéias do passado, originalmente focando em conceitos práticos e só depois esta ciência veio a se tornar abstrata. Segundo Eves (2004), na história da matemática fatos como o surgimento de civilizações nos vales dos rios e com isso o avanço da agricultura, fez com que os sumérios criassem a escrita, e com esse fato veio a evolução da escrita matemática. A escrita era feita em placas de argila, talhadas com estilete de junco, e conhecida como escrita cuneiforme, posteriormente surgiu a escrita egípcia, um sistema de escrita chamado hieróglifos, e eram feitas em papiros.

Após estas evoluções surgiram algumas bases de numeração, ainda relatadas por Eves (2004), quando se tornou necessário efetuar contagens mais extensas, tais como a base quinária, baseada na contagem com a quantidade dos dedos de uma mão, a base decimal, a base duodecimal, ou seja, a base 12, contada a partir das falanges dos dedos de uma mão, exceto o polegar que era utilizado para auxiliar na contagem desta base e a sexagesimal, que por hipótese é a junção das bases 5 e 12.

Com o passar do tempo surgiram outros sistemas de numeração, tais como o de algarismos romanos e o indo-arábico porém, segundo Boyer (2003), o sistema posicional deve-se ainda aos babilônios, pois viram que os símbolos podiam ter varias funções relativas às suas posições na representação do número.

Tempos depois, ainda segundo Boyer (2003), surgiu um símbolo que demarcava o espaço vazio, ou seja, o símbolo zero que era representado por duas cunhas dispostas obliquamente.

Como será visto, as bases de numeração podem ser simbolizadas por qualquer número, arbitrariamente, para representar um número. Com isso vieram as relações necessárias para as mudanças destas bases para outras quaisquer, levando em consideração regras para esta finalidade.

Desta forma, serão apresentadas algumas aplicações e regras para a mudança de bases neste trabalho. Para tanto, será utilizado o modelo proposto na obra de Idoeta (2012), o qual afirma que, as bases que são mais utilizadas são a binária, octal, decimal e hexadecimal, sendo justificada a utilização da octal e hexadecimal, por facilitar a representação de números binários com quantidades de bits maiores, pois, a base 8 é expressa como um binário de três bits ou dígitos, pois $8 = 2^3$ e a base 16, um número binário de 4 dígitos, pois assim como o 8 pode ser representado em bases de 2, ou seja, na forma fatorada, $16 = 2^4$. A base binária é utilizada hoje como linguagem de computadores, graças a um filósofo Frances George Boole, que analisava cada ponto de um problema atribuindo apenas duas hipóteses completamente opostas, (aceso – apagado; 0 – 1).

Eves (2004) relata que quando se tornou necessário efetuar contagens mais extensas, o processo de contar teve de ser sistematizado, utilizando um método que consistia em escolher certo número b como base e atribuir nomes aos números 1, 2, 3,..., b. E para os números maiores que b os números eram combinações dos nomes já escolhidos. Como exemplo pode ser citado um sistema de base 2, usado por nativos do nordeste Australiano, que contam: um, dois, dois e um, dois e dois, muito.

E o que será visto a seguir são algumas hipóteses de como surgiram as bases de numeração 5, 10, 12 e 60. Pois, o princípio de contagem parte das quantidades de dedos de uma mão ou das falanges dos dedos da mão e ou a junção da forma de contar dos dois.

A primeira máquina de calcular que se tem relato são os dedos, por isso o sistema quinário, ou sistema de base 5, segundo Eves(2004) foi o primeiro a ser largamente usado, e que algumas tribos sul-americanas ainda hoje contam com as mãos: “um, dois, três, quatro, mão, mão e um" e assim por diante. E ainda há evidências que o 12 pode ter sido usado como base em épocas pré-históricas, uma das cogitações, é pelo fato de ele ter tantos divisores inteiros.

Uma hipótese para o sistema de contagem utilizado, pela civilização suméria, era a de duas bases. Uma na base 5 e outro na base 12. O de base 5, como processo de contagem, consistia na utilização dos dedos das mãos, na qual uma mão servia para contar e a outra como auxilio na contagem de maior proporção, isto é, guardar a quantidade dos cincos contados. O de base 12utilizava as três falanges que cada dedo tem, usava o polegar para auxiliar a contagem, na mão direita.

Na combinação dos dois sistemas, de base 5 e 12, surgiu o de base 60 (sistema sexagesimal). Esta nova forma de contagem se dava da seguinte maneira: as falanges são contadas na mão direita como na base 12 e assim como na base 5, o número de contagens é guardado na mão esquerda, como mostra a Figura 1.

Figura 1 - Sistema de contagem sexagesimal.

Fonte:http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/algarismos/sumeria.htm

Parece mais provável, porém, que a base sessenta fosse adotada conscientemente e localizada no interesse da metrologia, pois uma grandeza de sessenta unidades pode ser facilmente subdividida em metades, terços, quartos, quintos, sextos, décimos, doze avos, quinze avos, vigésimos e trigésimos assim dez possíveis subdivisões. (BOYER, 2003,p. 17). E ainda segundo Boyer (2003), um sistema tão forte, que constituiu um dos maiores méritos da cultura suméria, e é usado até os dias de hoje. A utilização de frações de 60 serve para medir unidade de tempo e medida de ângulos.

Segundo Boyer (2003), outra civilização que muito contribuiu para a matemática foram os árabes, que mesmo fazendo desaparecer, em 641, parte do conhecimento do ocidente, com a destruição da biblioteca de Alexandria, três califas, patronos da cultura abássida, foram responsáveis pela tradução, do grego para o árabe, de escritos científicos importantes, dentre eles esta Os Elementos de Euclides. E outro sistema bem difundido e frequentemente usado, atualmente, é o romano, nos quais os números 1, 5, 10 são representados pelas letras I, V, X respectivamente. Que tem um princípio básico idêntico ao sistema sumério ou egípcio, e a diferença que mais se percebe é que no sistema romano, além da soma dos números principais, é utilizada também a diferença entre eles para representar os outros números, ou seja, este sistema tem o princípio aditivo e o subtrativo. Segundo Boyer (2003), durante toda a sua longa história, a Roma antiga pouco contribuiu para a ciência e a filosofia e menos ainda para a matemática.

3. Sistema decimal

De acordo com Boyer (2003) aos babilônicos deve-se também a invenção do sistema posicional. Usando apenas símbolos para unidades e dezenas, podiam representar qualquer número, por repetição e mudança de posição. Este principio é o mesmo do nosso sistema numérico atual, o decimal. Esta invenção só foi possível cerca de 4000 a.C., quando os babilônios, viram que os símbolos podiam ter várias funções, duplas, triplas ou em qualquer grau, recebendo valores relativos à sua posição na representação do número.

Assim, no sistema numérico atual, cuja base decimal, usa o mesmo algarismo três vezes, têm-se valores diferentes para eles, por exemplo, ao escrever 333, significa que, uma vez vale três unidades, em seguida três dezenas, e por fim três centenas, isto lendo da direita para a esquerda. Esta notação quer dizer que o número 333 é: $[3(10)^2+3(10)+3]$.

No sistema sexagesimal, os babilônios, ao escrever o mesmo número exposto, 333, faziam uso de múltiplos símbolos, separando três grupos de três cunhas cada, e de forma análoga ao sistema decimal, temos que: $[3(60)^2+3(60)+3]$, que equivale em notação de base 10 há 10983. O exemplo citado por Boyer (2003) em seu livro é o número 222, que são três grupos de duas cunhas cada, como mostra a Figura 2.

Representação do número 222:

Figura 2 – Símbolo Babilônio

Fonte: Boyer, 2003

Porém, os babilônios não tinham uma forma clara de representar uma posição vazia, ou seja, a indicação do número zero. Ainda que o sistema posicional, babilônio, deixasse um espaço vazio para indicá-lo, deixava uma ambiguidade, às vezes eliminadas pelo contexto. Segundo Boyer (2003) para representar os números 122 e 7202 era muito parecida, pois podia significar $2(60) + 2$ ou $2(60)^2 + 2$.

4. Mudanças de bases

Em alguns cursos técnicos de nível médio é muito comum estudo de disciplina que utiliza a mudança de base. Sendo assim, será apresentada a seguir algumas possibilidades dessas mudanças.

Segundo Eves (2004) é fácil passar um número de uma dada base para a base decimal, ou seja:

$$(2103)_4 = 2(4^3) + 1(4^2) + 0(4^1) + 3(4^0) = 166_{10}$$

$$(4A1B)_{12} = 4(12^3) + A(12^2) + 1(12^1) + B(12^0) =$$
$$4(12^3) + 10(12^2) + 1(12^1) + 11(12^0) = 8375_{10}$$

E para enfatizar, no sistema decimal, o símbolo do número tem dois valores, um é propriamente dito o dígito e o outro está relacionado com a posição do dígito no número, ou seja, o peso, por se tratar de um sistema posicional. No número 45, o dígito 4 representa 4x10, ou seja 40, devido a posição que ele ocupa no número. Este princípio pode ser aplicado a qualquer sistema de numeração posicional onde os dígitos possuem pesos, respectivos à sua posição no número. Então, de acordo com Oliveira (1999), um sistema de numeração genérico pede ser escrito da seguinte maneira:

$$N = d_n \cdot b^n + \ldots + d_3 \cdot b^3 + d_2 \cdot b^2 + d_1 \cdot b^1 + d_0 \cdot b^0$$

Onde:

N = representação do número na base b

dn = dígito na posição n

b = base do sistema utilizado

n = valor posicional do dígito

Por exemplo, o número 8375 no sistema decimal é representado como:

$N = d_3 . b^3 + d_2 . b^2 + d_1 . b^1 + d_0 . b^0$

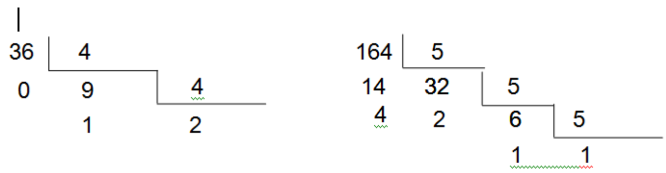
$8375 = 8 . 10^3 + 3 . 10^2 + 7 . 10^1 + 5 . 10^0$

De acordo com a definição, citada acima, de um sistema de numeração qualquer, a representação o número binário 1101 pode ser representado da seguinte forma:

$1101 = 1 . 2^3 + 1 . 2^2 + 0 . 2^1 + 1 . 2^0$

$1101 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13$

Para se converter um número da base decimal para outra base, de acordo com Idoeta (2012), divide-se sucessivamente o número decimal pela base na qual se quer o número, até que o último quociente seja menor que o divisor. Os restos obtidos das divisões e o último quociente compõem um número na base equivalente, como mostra a seguir.



O número é lido de trás para frente, logo (36)10 = (210)4 e (164)10 = (1124)5.

E a definição dada é um dos métodos para a conversão de um número de qualquer base para a base decimal, ou seja, $N = d_3 . b^3 + d_2 . b^2 + d_1 . b^1 + d_0 . b^0$ e podemos chamar de 1° método.

Um 2° método é o método prático, que consiste em "desce multiplicando e sobe somando". E como exemplo a transformação do número 456(7) para base decimal, temos:

$4 . 7 = 28$

$28 + 5 = 33$

$33 . 7 = 231$

$231 + 6 = 237$

Começando pelo algarismo da esquerda. Ele desce multiplicando pela base, que no exemplo é 7, e sobe somando pelo próximo algarismo, o processo continua, o resultado desta operação multiplica pela base e soma com o próximo algarismo e assim por diante.

E um 3° método também bem prático consiste em seguir o sentido inverso da operação de divisões sucessivas pela base que se quer obter. Como exemplo o número 237, que esta na base decimal, é transformado para base 7, seguindo a regra da divisão temos:

237	7	
27	33	7
6	**5**	**4**

Como o número obtido é computado de trás para frente temos o 456(7) e como se pode perceber o sentido inverso consiste na operação que é a multiplicação do ultimo quociente com o divisor e o resultado somado com o resto, e assim sucessivamente.

$4 . 7 + 5 = 33 \quad \rightarrow \quad 33 . 7 + 6 = 237$

Diante do exposto é possível perceber a diversidade de caminhos para o processo de mudança de base. E que essa diversidade de possibilidades favorece o professor na atividade de contextualizar os saberes a serem ensinados, tema que será discutido a seguir.

5. Transposição didática

O saber, historicamente construído, sofre transformações ao longo do tempo. Os sistemas de numeração, como foram discutidos, surgem em um contexto histórico específico, atendendo às necessidades de uma época. Ou seja, o cientista, ao elaborar um conhecimento, o faz em um determinado contexto, para atender a determinadas necessidades. Quando este conhecimento se universaliza, ele passa por diferentes contextualizações, descontextualizações e re-contextualizações para ser compreendido.

Tratando especificamente da sala de aula, Guy Brousseau (1996) afirma que o cientista dá a forma mais geral possível aos resultados que obteve, busca dar ao saber uma forma comunicável, descontextualizada, despersonalizada, fora de um conteúdo temporal. O professor deve procurar situações que dêem sentido ao que vai ser ensinado, contextualizando-o e depois precisa descontextualizá-lo para generalizar, desta forma, o estudo do contexto histórico dos sistemas de numeração e suas mudanças de base podem apoiar o professor no trabalho de sala de aula. O aluno precisa descobrir, junto com o professor, que o saber que produziu poderá ser utilizado em outras ocasiões. Assim, eles precisam re-despersonalizar e re-descontextualizar este saber para torná-lo universal e reutilizável. Ou seja, os matemáticos (ou cientistas) generalizam o saber, descontextualizando-o, o professor recontextualiza o saber, para dar-lhe sentido e ajudar na compreensão do aluno, e o aluno, ao aprender, não sabe que pode utilizar este saber em outras situações, por isso deve re-descontextualizar para dar-lhe um caráter universal, reutilizável.

Neste sentido, é importante destacar o que Yves Chevallard chama de transposição didática: ao entrar na relação didática, o saber científico sofre transformações e adaptações em relação à forma como foi originariamente proposto em seu contexto de formulação (o laboratório científico-acadêmico), para ser trabalhado e assimilado pelo aluno no âmbito escolar (Chevallard, 1985). Estas transformações são necessárias, uma vez que o saber é influenciado pelos propósitos institucionais, funcionando de formas diferentes nas instituições produtoras e comunicadoras. Esta transposição ocorre em diferentes níveis: ao se tomar decisões curriculares, na produção de livros-texto, nos cursos de capacitação e no decorrer das aulas.

Assim, é importante observar que, ao sofrer transformações, inovações e deformações na transposição didática, o saber vai se modificando e, muitas vezes, pode ocorrer de deixar o aluno nos níveis mais elementares do seu conhecimento, por não considerá-lo capaz de ir adiante na construção do seu saber.

Portanto, de acordo com Chevallard (1991), um conteúdo de ensino, tendo sido designado como um saber a ensinar, sofre um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo capaz de tomar lugar entre os objetos de ensino. Segundo este autor, a transposição didática é o trabalho que, de um objeto de saber a ensinar, faz um objeto de ensino.

Não se pretende aqui usar o contexto históricos do surgimento de alguns dos sistemas de numeração como o único elemento que pode viabilizar o processo de aprendizagem, mas como um importante aspecto no momento da transposição didática interna.

6. Metodologia

Para buscar alcançar o objetivo, foi realizada uma pesquisa bibliográfica sobre o contexto histórico e científico em que surgiram os sistemas de numeração, além de uma pesquisa sobre os mecanismos utilizados no processo de mudanças de bases numéricas e as suas relações com a Teoria da Transposição Didática.

7. Considerações finais

Percorrer a trajetória histórica do surgimento de alguns sistemas de numeração, como o de base 5, por exemplo,o qual utilizava as mãos, até os sistemas mais sofisticados, a exemplo o indo-arábico, mostra que o conhecimento matemática vem se reorganizando ao longo dos tempos para atender as necessidades cotidianas. Desta forma, é importante para o professor, ou futuro professor de Matemática, compreender a construção dos saberes matemáticos, os quais serão ensinados na sala de aula.

O processo de recontextualização dos saberes matemáticos proposto aos professores, como um caminho para ajudar o aluno no processo de aprendizagem, pode ser melhor conduzido a partir do entendimento do contexto histórico e científicos dos elementos ligados aos sistemas de numeração e suas mudanças de bases, pois o domínio, pelo estudante, do sistema de numeração o ajudará a perceber e compreender conceitos matemáticos, tanto os mais elementares quanto os mais elaborados, já que o Sistema de Numeração Decimal é a base para todos o trabalho realizado na Matemática. Para o professor, entender o processo de contextualizações, descontextualizações e recontextualizações pelos quais passa o conhecimento até chegar à sala de aula é fundamental no sentido de melhor desenvolver as discussões com seus alunos. Assim, pensando na Teoria da Transposição Didática, esse conhecimento que foi gerado em um contexto específico, a partir das necessidades humanas em uma determinada época e, em seguida, teorizado pelos matemáticos, precisa ser descontextualizado e generalizado para estar no mundo, depois o professor precisa recontextualizar esse saber para lhe dar sentido e ajudar na compreensão do aluno para que este perceba os contextos do conhecimento e em seguida possa descontextualizá-lo para utilizar em novas situações.

Referências

BOYER, C. B. **História da matemática:** tradução: Elza F. Gomide. São Paulo. Edgard Blücher, 2° edição, (2003).

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didática da matemática. In: **Didáctica das Matemáticas**. Brun, J. (Org.). Lisboa: Instituto Piaget, (1996).

CHEVALLARD, Y. **La transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné**. Grenoble: La Pensée Sauvage, (1985).

CHEVALLARD, Y. **La transposition Didactique**. Paris : La Pensée Sauvage, (1991).

EVES, H. Introdução à historia da matemática: Campinas – São Paulo: Editora Unicamp, (2004).

GITIRANA, V.; PITOMBEIRA B, J. **Coleção Explorando o Ensino**, v. 17, capítulo 2: Matemática: Ensino Fundamental / Coordenação João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho. - Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, (2010).

IDOETA, I. V. **Elementos de eletrônica digital.** 41. ed. rev. e atual. – São Paulo: Editora Érica Ltda, (2012).

OLIVEIRA, J. de. **Eletrotécnica Básica – Instrumentação.** Espírito Santo: SENAI – Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial. Departamento Regional do Espírito Santo, (1999).