

**UMA PROPOSTA DE ENSINO DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS
RACIONAIS NA REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA**
Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio – GT 10

VANESSA DA SILVA ALVES
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
vsa7785@yahoo.com.br

RESUMO

Neste artigo relata-se uma experiência acerca do processo de conceituação de números racionais, tendo como base parte dos resultados da dissertação da autora, intitulada “A construção do conceito de número racional no sexto ano do Ensino Fundamental”, defendida em 10 de abril de 2012. Utilizou-se como apoio teórico os registros de representações semióticas e a metodologia da Engenharia Didática. Buscou-se desenvolver uma oficina para o estudo da adição e subtração de números racionais na representação fracionária por meio de materiais desenvolvidos pela própria autora. Concluiu-se que os materiais didáticos auxiliaram na apropriação do conceito de número racional pois os alunos compreenderam os procedimentos de adição e subtração de frações, sem recorrer a uma simples memorização de procedimentos e sim atribuindo um significado às operações.

Palavras- chaves: Números racionais, Representações Semióticas, Engenharia Didática.

1. Introdução

O ensino de Matemática se torna fragilizado quando os alunos não conseguem se apropriar dos conceitos matemáticos necessários para a aquisição de outros. No que se refere aos números racionais, pode-se perceber que no cotidiano de sala de aula o aluno apresenta dificuldade ao tentar resolver situações-problema propostas pelo professor nas quais os dados numéricos são números racionais na representação fracionária ou decimal. Isso ocorre porque no momento da aprendizagem dos números racionais, o aluno não conseguiu se apropriar desse conceito, recorrendo a uma simples memorização de procedimentos que com o passar do tempo foram esquecidos.

Observa-se que a apropriação do conceito de número racional tanto é importante para a aprendizagem de outros conceitos matemáticos como para a aprendizagem de conceitos das outras áreas do conhecimento, como física, química, biologia, geografia, e também para situações cotidianas de compra e venda de produtos, por exemplo.

Diante da importância do tema abordado, vários estudos já foram realizados sobre os números racionais. Bryant e Nunes (1997) defendem o uso de frações equivalentes para adicionar ou subtrair frações. Em uma das pesquisas analisadas pelos autores, mostra-se que,

apesar de crianças terem demonstrado saber calcular frações equivalentes, elas não as utilizaram para realizar somas e subtrações, estendendo para os números fracionários os procedimentos utilizados com os números naturais, isto é, somando ou subtraindo diretamente numerador com numerador e denominador com denominador, indicando mais uma vez a não apropriação do número racional.

Catto (2000), norteada pela teoria dos registros de representações semióticas, desenvolveu a análise de duas coleções de livros didáticos, com o objetivo principal de investigar até que ponto são apresentados os diversos registros de representações do número racional e como são trabalhados os tratamentos e as possibilidades de conversão entre dois registros distintos. O trabalho foi motivado pelas respostas apresentadas pelos alunos à autora em por meio de testes, nos quais ela concluiu que os erros na resolução das questões de potência provavelmente estariam na dificuldade em lidar com os números racionais e suas representações, o que a fez decidir pela abordagem dos números racionais no processo de ensino, por meio da análise de duas coleções de livros didáticos.

Bezerra (2001), também se preocupou com o processo de ensino e aprendizagem do número racional e, ao contrário do que propõe a maioria dos livros didáticos, optou por introduzir o conceito de número racional a partir de divisões com números naturais no universo das unidades discretas e contínuas, problematizando uma representação para o resto da divisão.

Preocupado em estudar, não o que nem como os alunos podem vim a se apropriar do conceito de número racional, mas o que os sujeitos conseguiram aprender após anos de estudo formal, Rodrigues (2005), desenvolveu um trabalho com 13 alunos do 9º ano (na época oitava série) do Ensino Fundamental, 31 alunos do 3º ano do Ensino Médio e também com 29 alunos de alguns cursos da área de ciências exatas do Ensino Superior, cujo objetivo foi verificar quanto do conceito de número fracionário em seus significados de parte-todo e de quociente foi apropriado por tais alunos.

Outros autores tais como Amorim (2007), Bryant, Campos, Magina e Nunes (2009), Iglioni e Maranhão (2010), Neres (2010), dentre outros, também se preocuparam com o processo de ensino e aprendizagem dos números racionais, apresentando trabalhos sob essa vertente e enfatizando a importância da realização de pesquisas voltadas para o processo de ensino-aprendizagem dos números racionais.

O presente trabalho tem por objetivo relatar uma experiência vivenciada em uma escola pública do município de Barra de Santo Antônio, Alagoas, com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental na qual foram desenvolvidas cinco oficinas de aprendizagem com o

objetivo de promover a apropriação do conceito de número racional pelos alunos. Neste momento será relatada apenas a experiência advinda de uma dessas cinco oficinas, a Oficina III, intitulada “Adição e subtração de números racionais na representação fracionária”. Esta oficina foi desenvolvida em três sessões e a partir da manipulação de materiais pedagógicos desenvolvidos pela própria autora.

2. Metodologia

Todo o trabalho foi norteado pela teoria dos registros de representações semióticas de Duval (2010), no qual o autor propõe que “a originalidade da atividade Matemática está na mobilização de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação” (DUVAL, 2010, p. 14).

Na teoria de Duval distinguem-se dois tipos de atividades semióticas qualitativamente distintas: o tratamento e a conversão, as quais Duval (2009, p. 39) define da seguinte maneira:

Um tratamento é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas; um tratamento mobiliza, então, apenas um registro de representação. A conversão é, ao contrário, uma transformação que faz passar de um registro a outro. Ela requer então a coordenação dos registros no sujeito que a efetua.

Na Oficina III foram mobilizados os registros de representação figural e numérico, assim como os tratamentos e as conversões inerentes aos mesmos.

Como fundamentação metodológica, foi utilizada a Engenharia Didática, que surgiu no início da década de 80 e a justificativa encontrada na literatura para a escolha da mesma pode ser observada nas palavras de Almouloud e Coutinho (2008, p. 66), pois para esses autores a Engenharia Didática “pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito”, ou, segundo Artigue (1998, p. 285, *apud* MACHADO, IN: MACHADO 2010, p. 235), a Engenharia Didática é caracterizada “[...] como um esquema experimental baseado sobre ‘realizações didáticas’ em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a validação e análise de sequências de ensino”. Carneiro (2005, p. 91), norteado pelas considerações de Artigue, afirma que a Engenharia Didática é composta por quatro fases: 1ª fase, análises prévias; 2ª fase, concepção e análise *a priori* de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de Matemática; 3ª fase, implementação da experiência, ou experimentação; 4ª fase, análise *a posteriori* e validação da experiência.

Nas análises prévias, por meio de questionários, buscou-se verificar os conhecimentos prévios dos alunos acerca da adição e da subtração dos números racionais na representação fracionária, constatando-se que os mesmos nada sabiam sobre os tratamentos inerentes a tais operações.

A segunda fase, concepção e análise *a priori* de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de Matemática, Machado (2010, p. 238, In: MACHADO, 2010) acredita que “comporta uma parte de descrição e outra de previsão e está centrada nas características de uma situação adidática que se quis criar e que se quis aplicar aos alunos visados pela experimentação”. Nesse momento foram definidas como variável global a elaboração da Oficina III com o objetivo de auxiliar os alunos na conceituação dos números racionais no referente à adição e à subtração dos mesmos. Como variáveis locais, são consideradas as escolhas feitas no momento da elaboração de cada questão que compõe a oficina, assim como o público e o tempo de duração da mesma.

A fase da experimentação consiste no desenvolvimento da oficina proposta.

A fase da validação consiste na verificação dos resultados obtidos. Vale ressaltar que a Engenharia Didática adota um processo de validação interno, isto é, compara os resultados apresentados pelos estudantes antes da experimentação com os resultados apresentados pelos estudantes após a experimentação.

2.1 – A experimentação

A Oficina III foi desenvolvida com o objetivo de abordar o estudo das operações de adição e de subtração de números racionais na representação fracionária por meio da utilização de objetos concretos e manipulativos. Comumente os livros didáticos fazem uma abordagem das operações de adição e subtração com números racionais a partir do conceito de mínimo múltiplo comum. Nesse trabalho, a metodologia adotada difere da frequentemente adotada nos livros didáticos, pois utilizou o conceito de equivalência entre as frações.

A Oficina III foi dividida em três sessões e seu tempo de duração foi de 3 aulas de 60 min cada. Para estimular a interação entre os sujeitos, em todas as sessões os alunos foram distribuídos em duplas. Vale ressaltar que todos os materiais que compõem os kits utilizados na oficina foram produzidos pela autora.

2.1.1 - Sessão 1 - Visualizando a soma e a subtração entre duas frações

Esta sessão foi desenvolvida a partir da manipulação do seguinte Kit de materiais:



Figura 1 - Kit de materiais da sessão 1 da Oficina III.

A sessão 1 teve por objetivo abordar a adição e a subtração de frações sem o uso de algoritmos, utilizando objetos manipulativos para que os alunos pudessem visualizar os resultados das adições e subtrações de um modo prático. Esta proposta foi adotada para tentar mostrar ao aluno que algumas propriedades dos números naturais não se estendem aos números racionais, assim, adicionar ou subtrair números racionais não se processa da mesma maneira que a adição e subtração com números naturais. Além dos materiais apresentados, o Kit contém também um guia para o professor e um guia de perguntas para os alunos.

Para motivar os alunos e enfatizar as propriedades intrínsecas aos números racionais a aula teve início com a seguinte pergunta: Quanto é $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$?

A autora escreveu a pergunta na lousa e ouviu as respostas dos alunos para a mesma. Como já era esperado, os alunos utilizaram as propriedades de adição de números naturais e a aplicaram para os números racionais, ou seja, eles fizeram uma soma direta entre o numerador da primeira fração e o numerador da segunda fração e uma outra soma, da mesma forma, com os denominadores, respondendo que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

A pesquisadora não disse aos alunos que eles tinham errado. Conduziu a oficina de modo que os próprios alunos percebessem que tinham errado a solução da questão que fora proposta, para tanto, foi solicitado dos alunos que representassem a adição $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ com as barras. Os alunos não tiveram dificuldades em escolher as barras laranja para representar as duas frações, acredita-se que essa facilidade ocorreu por conta do contato anterior com as barras coloridas quando foram desenvolvidas as Oficinas I e II, desse modo, os alunos já tinham o conhecimento de que uma barra laranja representava $\frac{1}{2}$ da barra azul (o inteiro, a unidade). Como a operação solicitada era adicionar as barras, então, para se obter o resultado, bastaria juntar as duas barras laranja e comparar com a barra azul e perceber que a junção das duas barras laranja era do tamanho da barra azul e não do tamanho de duas barras verdes ($\frac{2}{4}$)

conforme os alunos tinham afirmado. Após a realização desse procedimento, os alunos perceberam de modo prático que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ não valia $\frac{2}{4}$ e sim um inteiro.

As figuras 2 e 3 mostram alguns momentos dessa etapa da experimentação, na qual os alunos utilizaram a sobreposição ou a comparação das peças que representavam as quantidades em questão.

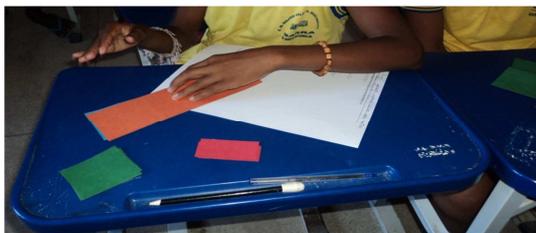


Figura 2 - Representação da soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ feita por alunos utilizando sobreposição das peças.



Figura 3 - Representação da soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ feita por alunos utilizando comparação das peças.

Em seguida, foi solicitado que os alunos utilizassem as barras convenientes para verificar quanto era $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ e eles não tiveram dificuldades em responder que seria $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$, pois a junção das duas barras verdes era equivalente a uma barra laranja. Também não tiveram dificuldade em responder, utilizando a representação com as barras, “Quanto é $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$?” e “Quanto é $\frac{2}{8} + \frac{1}{4}$?”.

As dificuldades começaram a surgir a partir da questão 4, na qual se perguntava quanto era $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$. Os alunos realizaram o mesmo procedimento e juntaram a barra laranja, representante de $\frac{1}{2}$, com a barra vermelha, representante de $\frac{1}{8}$. Porém, não encontraram nenhuma barra equivalente a quantidade representada pelas duas barras juntas. Eles começaram a atribuir respostas erradas, demonstrando que não tinham referencial para concluir a questão. Nesse momento, a autora aproveitou para escrever no quadro todas as perguntas realizadas até então e perguntou aos alunos o que ocorria em todas as questões anteriores e que não ocorria na questão atual. Várias respostas foram surgindo e a pesquisadora mediu as respostas até que os alunos percebessem que nas outras questões os denominadores das respectivas frações eram iguais, o que não ocorria na última pergunta feita. Esse foi o momento oportuno para a pesquisadora concluir, junto aos alunos, que a

adição de frações só pode ser realizada quando as frações possuem denominadores iguais e para que tal necessidade fosse atingida, seriam utilizadas frações equivalentes. A pesquisadora perguntou aos alunos se eles poderiam substituir a barra laranja por uma certa quantidade de barras vermelhas e após algumas manipulações eles responderam que uma barra laranja era equivalente a quatro barras vermelhas. Na lousa, a pesquisadora foi registrando cada etapa da resolução dessa questão até que chegou a seguinte situação: $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} + \frac{1}{8}$. Os alunos logo responderam que a solução para essa questão seria $\frac{5}{8}$. Para que os alunos se apropriassem desse conceito e praticassem o procedimento adotado na questão anterior, foi solicitado que os mesmos respondessem a questão “Quanto é $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$?”, “Quanto é $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$?”, “Quanto é $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$ ” e “Quanto é $\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$?”

As questões que continham frações com denominadores distintos, fez com que alguns alunos apresentassem dificuldades e solicitassem a mediação da pesquisadora em alguns momentos. Percebe-se que nessa sessão a pesquisadora conteve-se em realizar as operações de adição e subtração com os números racionais na representação fracionária por meio da manipulação das barras coloridas, nenhum algoritmo matemático foi introduzido.

2.1.2 - Sessão 2 – Formalizando o conceito

A sessão 2 foi desenvolvida a partir de um Kit de materiais composto por uma folha para representação figural para adição e subtração, um lápis e uma caneta.

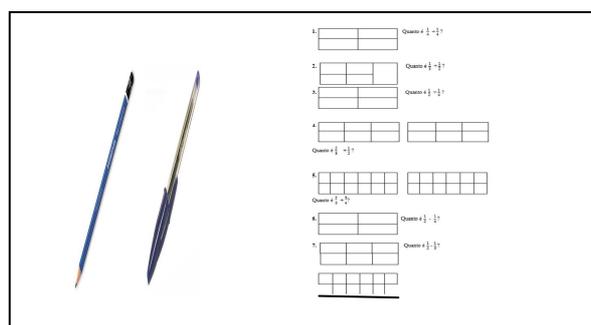


Figura 4 - Kit de materiais da sessão 2 da Oficina III

Nesse momento os alunos foram convidados a representar na forma figural as adições e subtrações e após cada representação foi formalizado o algoritmo para adicionar e subtrair

frações. Inicialmente foi entregue aos alunos a Folha de representação figural da Oficina III. Os alunos foram orientados quanto aos procedimentos para a representação figural da seguinte maneira:

- 1 – deveriam pintar com o lápis a quantidade que representava a primeira fração e com caneta a quantidade que representava a segunda fração;
- 2 – se a questão exigisse uma soma, o resultado seria representado pela união das duas quantidades;
- 3 – se a questão exigisse uma subtração, os alunos deveriam pintar sobre a parte pintada a lápis (representante da primeira fração), a parte que representasse a segunda fração. O resultado seria o que restaria pintado a lápis.

Na questão 1 foi solicitado que se representasse a soma $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ na seguinte figura:



Figura 5 - Representação figural da soma $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$.

Assim, a soma seria $\frac{2}{4}$, a união da parte pintada a lápis com a parte pintada a caneta. Após observar e ouvir as duplas, a pesquisadora realizou a soma entre as frações para mostrar como deveriam ser realizados os tratamentos e que a solução que eles verificaram com a representação figural de fato ocorria no modo formal. Em seguida, foi solicitado que os alunos tentassem representar na forma figural as seguintes questões: “Quanto é $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$?” e “Quanto é $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$?”

Em relação à primeira soma, a figura entregue aos alunos foi a seguinte:

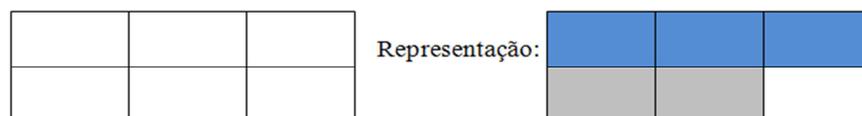


Figura 6 - Representação figural da soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

Sendo a soma $\frac{5}{6}$, a união das partes pintadas a lápis com as partes pintadas a caneta.

Após observar as duplas, fazer as mediações necessárias e socializar os resultados, foi mostrado aos alunos como realizar os tratamentos necessários para resolver essa questão. Esse

foi o momento propício para enfatizar que a soma ou a subtração entre dois números racionais na representação fracionária só poderia ocorrer quando ambas tivessem o mesmo denominador. Foi apresentado para os alunos a seguinte o cálculo da soma entre dois números na forma fracionária por meio das frações equivalentes. Isto é, como nessa questão os denominadores das respectivas frações não eram iguais, as frações deveriam ser substituídas por frações respectivamente equivalentes e cujos denominadores fossem iguais. Assim, a questão foi apresentada da seguinte maneira: $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{3} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$.

Como os alunos já tinham visualizado a soma na representação figural, o algoritmo ganhou um significado com mais facilidade.

Na sequência, foi solicitado que os alunos representassem “Quanto é $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$?”, “Quanto é $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ ”, “Quanto é $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$?”

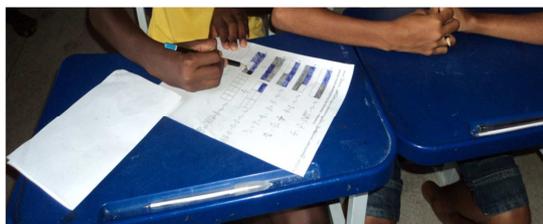


Figura 7 - Representação figural das adições e subtrações realizadas pelos alunos.

Essa sessão contou com a participação efetiva dos alunos e acredita-se que os objetivos foram atingidos. Para que os alunos pudessem se apropriar dos conteúdos abordados na Oficina III, foi realizada a sessão seguinte.

2.1.3 - Sessão 3 – Lista de exercícios para a apropriação dos conteúdos da Oficina III

A sessão 3 da Oficina III compreendeu a aplicação da Lista de exercícios para apropriação dos conteúdos da Oficina III, composta por 6 questões que envolvem a soma e a subtração de frações por meio do uso das frações equivalentes. Das 6 questões, quatro são de situações-problema que abordam a comparação de frações e duas são mais teóricas, nas quais se solicita apenas que resolvam somas e subtrações. A lista foi proposta as duplas para propiciar a interação e, após alguns minutos de observação, a pesquisadora mediu a socialização das soluções, momento no qual os alunos expuseram suas soluções e os métodos

utilizados para se chegar a tais resultados. As duplas que apresentavam respostas divergentes eram convidadas a discutirem os procedimentos e concluírem qual seria o apropriado.

3. Resultados

Após a realização da Oficina III com os alunos, verificou-se por meio de um questionário, denominado Instrumento de verificação de aprendizagem 4 que houve um avanço significativo na aprendizagem dos alunos quanto a adição e subtração com números racionais. Para a validação da experimentação foi realizada uma comparação de resultados apresentados pelos alunos antes da experimentação com os resultados apresentados após a experimentação.

Antes da experimentação foi proposta a seguinte atividade para os alunos:

Calcule o valor de cada expressão abaixo:

a) $\frac{4}{3} + \frac{5}{3}$

b) $\frac{3}{4} + \frac{7}{5}$

c) $\frac{9}{4} - \frac{2}{3}$

As respectivas respostas esperadas para os itens a, b, c são $\frac{9}{3}$, $\frac{43}{20}$, $\frac{19}{12}$. Os resultados foram os seguintes: nenhum aluno conseguiu responder corretamente aos itens, sendo que 20% deles deixaram a questão em branco e 80% tentou responder, mas não obtiveram êxito. Os erros mais frequentes foram causados pela extensão das propriedades dos números naturais para os números racionais, assim, vários alunos apresentaram a seguinte solução para o item a, por exemplo:

- Tipo de resposta 1: $\frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{9}{6}$ Neste caso, os alunos somaram diretamente numerador com numerador e denominador com denominador.

- Tipo de resposta 2: $\frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 15$ Neste caso os alunos somaram cada número presente na expressão, como se fosse uma adição entre os números naturais 4, 5, 3 e 3.

Também foram verificadas outras respostas que não dão margem para se especular as considerações que conduziram os alunos às mesmas. Outras questões foram propostas e reafirmaram os resultados apresentados antes da experimentação.

Após a experimentação foram propostas as seguintes questões para os alunos:

1. Vamos calcular o valor de cada expressão abaixo:

a) $\frac{1}{10} + 0,25$

b) $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$

c) $3,54 + \frac{254}{100}$

2. Calcule o valor de cada expressão abaixo:

a) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$

b) $1,23 + \frac{45}{100}$

Note que as questões 1 e 2 possuem um nível mais elevado que a questão apresentada antes da experimentação por envolver dois tipos de representação e exigir do aluno a conversão da representação decimal para a fracionária para poder resolver as questões.

Os resultados apresentados foram os seguintes:

Questão 1: item a: 67% dos alunos acertaram e 33% dos alunos erraram esse item; item b: 100% dos alunos acertaram e 0% dos alunos errou esse item; item c: 78% dos alunos acertaram e 22% dos alunos erraram esse item;

Questão 2: item a: 78% dos alunos acertaram e 22% dos alunos erraram esse item; item b: 89% dos alunos acertaram e 11% dos alunos erraram esse item.

Portanto, diante dos resultados apresentados, nota-se que mesmo com a elevação do nível de dificuldade apresentados nas questões posteriores à experimentação, houve um avanço significativo quanto à aprendizagem dos alunos no que se refere a adição e subtração com números racionais na representação fracionária. Outras questões foram propostas e confirmaram os resultados obtidos.

Assim, podemos concluir que a proposta de abordagem das operações de adição e subtração de números racionais a partir da manipulação dos Kits de materiais propostos, levando os alunos a compreenderem tais operações, inicialmente sem o uso de algoritmos, fez com que os procedimentos adotados para a solução de tais operações ganhassem um significado para os alunos, não os conduzindo a uma simples memorização de procedimentos que com o tempo podem ser esquecidos, mas sim propiciando a apropriação do conceito.

4.Referências

ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. **Revista Eletrônica em Educação Matemática**. Volume: 3.6. Santa Catarina: 2008. p. 62-77.

AMORIM, Marlene Pires. **Apropriação de significações do conceito de números racionais**: um enfoque histórico cultural. Dissertação de mestrado em Educação Matemática. Criciúma: Universidade do Extremo Sul Catarinense, 2007. Disponível em: <<http://www.bib.unesc.net/biblioteca/sumario/000031/00003118.pdf>>. Acesso em: 18 jan 2011.

BEZERRA, Francisco José Brabo. **Introdução do conceito de número fracionário e de suas representações**: uma abordagem criativa para sala de aula. Dissertação de mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC, 2001. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/francisco_bezerra.pdf>. Acesso em: 10 fev 2011.

BRYANT, Peter; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; MAGINA, Sandra; NUNES, Terezinha. Razão e frações: representando quantidades intensivas. In: BRYANT, Peter; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; MAGINA, Sandra; NUNES, Terezinha. **Educação Matemática 1: números e operações numéricas**. 2ª edição. São Paulo: Cortez, 2009.

_____; NUNES, Terezinha. **Crianças fazendo Matemática**. Tradução: Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Engenharia didática: um referencial para a ação investigativa e para a formação de professores de Matemática. **Zetetikê**. Volume: 13. n. 23 jan-jun. Cempem, 2005.

CATTO, Glória Garrido. **Registros de representação e o número racional**: uma abordagem em livros didáticos. Dissertação de mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC, 2000. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/conteudo/artigos_teses/MATEMATICA/Dissertacao_catto.pdf>. Acesso em: 18 jan 2011.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Traduzido por: LEVY, Lênio Fernandes; SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

_____. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. (Org.). **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. 7ª edição. São Paulo: Papirus, 2010. p. 11-34.

IGLIORI, Sonia; MARANHÃO, Maria Cristina S. Registros de representação e números racionais. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. 7ª edição. São Paulo: Papirus, 2010. p. 57-70.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Engenharia Didática In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. (Org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3 ed. São Paulo: EDUC, 2010. p. 233-248.

NERES, Raimundo Luna. **Aplicação dos registros de representação semiótica no ensino-aprendizagem da Matemática**: um estudo com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. Tese de doutorado. São Paulo: Universidade Estadual Paulista, 2010. Disponível em: <<http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/cp150448.pdf>>. Acesso em: 08 abr. 2011.

RODRIGUES, Wilson Roberto. **Números racionais**: um estudo das concepções de alunos após o estudo formal. Dissertação de mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC, 2005. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/wilson_roberto_rodri_gues.pdf>. Acesso em: 26 ago. 2011.