Fractais: uma sequência didática para o desenvolvimento visuo – espacial à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval.

Mestrando: Juliano de Paula Mineli[1]

Orientadora: Profa. Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori[2]

Resumo

O presente artigo é um recorte da dissertação de mestrado em que os sujeitos são os alunos do 7° ano (6ª série) do Ensino Fundamental de uma escola da rede privada da cidade de Ribeirão Preto, acerca do título *Fractais: uma engenharia didática para a generalização do perímetro do Triângulo de Sierpinski*. Teve como objetivo investigar uma abordagem da Geometria Fractal no desenvolvimento visuo – espacial a partir de uma sequência didática de três sessões tendo como aporte teórico a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval. Ao final da pesquisa concluimos que de acordo com o desempenho dos alunos no decorrer da aplicação da sequência, eles terminaram as atividades conseguindo associar os diferentes tipos de registros de representação semiótica, e que a mesma propriciou no desenvolvimento visuo – espacial.

Palavras – chave: Geometria fractal, Teoria do caos, sequência didática, registro de representação semiótica.

Introdução

Várias pesquisas como as de Pataki (2003) e Lorenzato (1995) mostraram as dificuldades que os alunos enfrentam na aquisição da matemática, em particular da Geometria. Morgado (apud ALMOULOUD, 2000, p.03) assinala que,

> a visão que vem dirigindo nosso ensino da matemática há vários séculos é a visão absolutista da matemática, que gera uma dinâmica de ensino em que os alunos acumulam informação. A maioria dos professores segundo essa visão, ao utilizar um processo de transmissão de informação, conduz a experiência matemática do aluno por caminho no qual ele não analisa a matemática como uma área de pesquisa e investigação. Ao preparar com antecedência os problemas a serem apresentados aos alunos, o professor reserva para si a transposição dos obstáculos e o caminho produtivo da descoberta, apresentando ao aluno uma solução bonita e eficiente, sem deixar o legítimo ato de pensar matematicamente.

[1] MINELI, Juliano de Paula. Mestrando do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC – SP). julianomineli@hotmail.com

[2] IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. Professora e Coordenadora do Programa de Pós Graduação da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC – SP). sigliori@pucsp.br

O estudo de Pataki (2003) indicou que os resultados de pesquisas apresentados em Congressos, cursos, palestras, artigos e dissertações têm revelada a necessidade de repensar o ensino da Geometria e o papel que lhe cabe na Educação Matemática.

Por outro lado, para pensar o papel do ensino da geometria, Lorenzato (1995) argumenta que se o educando não consegue visualizar a geometria, é possível que este estudante não tenha um desenvolvimento pleno do pensamento geométrico ou do raciocínio visual. O autor ainda admite que seja muito difícil, com estas limitações, compreender e resolver questões de outras áreas do conhecimento.

Assim, o presente artigo, tem como objetivo mostrar as implicações inerentes ao ensino da *Geometria Fractal*, ainda não incorporados no currículo do Ensino Fundamental e Médio, levantando – se assim a seguinte questão de pesquisa: *Uma sequência didática embasada na Geometria Fractal propicia o desenvolvimento de habilidades visuo – espaciais?*

Para discutir, a partir da questão colocada serão usados os seguintes aportes teóricos:

Registro das representações semióticas de Raymond Duval (1995); Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1986); Pensamento visuo – espacial resultante da percepção estudado por Costa (2002) e a Geometria Fractal de Mandelbrot (2004).

E assim, iniciamos apresentando o conceito de registro de representação semiótica de Duval.

Registros de Representação Semiótica

As funções epistemológicas indicadas por Duval (1995) são assim justificadas:

- Visualização para a exploração heurística de uma situação complexa;
- Construção de configurações que pode ser trabalhada como um modelo, em que as ações realizadas representadas e os resultados observados são ligados aos objetos matemáticos representados;
- Raciocínio, que é o processo que conduz para a prova e a explicação.

O mesmo autor ainda afirma que essas três formas de processo cognitivo são entrelaçados para proficiência da geometria. Por outro lado, a heurística dos problemas de geometria refere – se a um registro espacial que dá lugar a formas de interpretação autônomas, e que Duval (1995) identifica quatro formas de apreensão:

1 – **sequencial:** é solicitada nas tarefas de construção ou nas tarefas de descrição com obetivo de reproduzir uma figura;

2 – **perceptiva:** é a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica;

3 – **discursiva:** é a interpretação dos elementos da figura geométrica, levando em consideração a rede semântica de propriedade do objeto.

4 – **operatória:** está centrada nas modificações possiveis de uma figura de partida e na reorganização perceptiva que essas modificações sugerem.

A resolução de problemas de geometria e a entrada na forma de raciocínio que essa resolução exige, dependem da tomada de consciência da distinção das formas de apreensão da figura. A apreensão operatória das figuras depende das modificações que a figura pode sofrer, as quais são classificadas por Duval (1995) da seguinte maneira:

- **Modificação Mereológica**: a figura pode se separar em partes que são subfiguras da figura dada, fracionando – se a reagrupando – se, isto é, uma relação da parte e do todo;
- **Modificação Ótica:** é a tranformação de uma figura em outra considerando sua imagem.
- **Modificação Posicional:** é o deslocamento em relação a um referencial.

Essas apreensões operatórias, implicitamente estão ligadas a duas propriedades dos fractais que são: *formação por repetição ou iterações e auto – semelhança*, que serão as propriedades trabalhadas na sequência didática proposta. Por esse pressuposto acredita-se possível responder a questão acima colocada.

Teoria do Caos e a Geometria fractal

Gleick (1989) conta que, no ano de 1956, no Departamento de Meteorologia do Boston Tec, hoje conhecido como MIT (Instituto de Tecnologia de Massachusetts), o meteorologista e matemático norte-americano Edward Norton Lorenz desenvolveu um modelo computacional para fazer previsões do tempo que consistia em interagir doze equações matemáticas, equações estas que expressavam as relações entre temperatura e pressão, pressão e velocidade do vento. Lorenz, utilizando seu velho e barulhento computador, um Royal McBee começou a fazer observações e ligações entre essas tais equações gerando várias sequências numéricas onde o resultado de uma alimentava a outra com a finalidade de gerar padrões que justificassem as alterações climáticas. Querendo poder prever o tempo através de um sistema dinâmico computacional, Lorenz descobriu que pequenas mudanças ou pequenos erros nessas iterações matemáticas produziam efeitos completamente desproporcionais. Para que fosse mais fácil a observação, gerou um gráfico simples e começou a evidenciar os padrões gerados por essas sequências.

Segundo este autor, em certo dia, cansado de seus estudos, desligou-se de seu computador e foi dar uma volta, ao retornar observou um desenho estranho gerado pelo gráfico e desconfiou, achando que pudesse ser problemas eletrônicos, pois havia gerado uma nova sequência, o que deveria ter sido uma repetição da anterior. Tão assustado, Lorenz copiou os números e tentou fazer a iteração sem o auxilio de seu computador e chegou a mesma conclusão, pôde observar que a sequência se comportava de forma estranha, diferente do previsto. Em seu livro, Gleick (1989) conta que em certo ponto do gráfico as curvas das sequências não batiam, ele viu seu computador de previsão do tempo produzir padrões que se distanciavam cada vez mais até que toda semelhança desaparecesse, algo que estava extremamente organizado gerava padrões desordenados. A partir dos resultados desse modelo, novas questões foram levantadas, novos resultados e conclusões foram obtidos.

Com isso se inicia uma nova ciência, a única que poderia explicar como certas modificações em um determinado evento poderiam resultar em estranhos acontecimentos no futuro, o que mais tarde Lorenz o intitulou de Efeito Borboleta, que deu origem ao seu artigo *Predictability: Does de Flap of a Butterfly's Wings in Brasil Set off a Tornado in Texas?*, publicado em 1972 pela Academia Americana para o Avanço da Ciência.

Lorenz deu esse nome à sua descoberta, pois justifica que algo insignificante pode trazer modificações extraordinárias no tempo, como o bater de asas de uma borboleta aqui no Brasil, com o tempo as ondas geradas pelo giro de suas asas poderão causar algo imprevisível, um furacão, por exemplo, em um lugar muito distante como o Texas.

Observando novos estudos o autor conclui, de que a Teoria do Caos não é apenas um conceito único de desordem de um sistema, ele se preocupa em definir os sistemas não periódicos que ocorrem na nossa sociedade, como a movimentação dos fluidos, as variações financeiras, as transformações meteorológicas, o processo ensino-aprendizagem, dentre outros.

Um estudo considerado importante no campo da Teoria do Caos é o que diz respeito à Natureza. Segundo Carvalho (1986), as imagens de florestas e tudo o mais que nos vêm à mente quando pensamos na natureza, são geralmente absorvidas com a visão do todo, pois, ignoramos, muitas vezes, suas partes, seus pedaços. Ao nos darmos conta dos detalhes, estaremos encarando a natureza de modo diferente, começamos a perceber suas formas tão intrínsecas, seus padrões irregulares e fragmentados, que podem ser descritos de forma considerada adequada pelos objetos da Geometria da Natureza que é a Geometria dos Fragmentos, também denominada de Geometria Fractal.

Ainda de acordo com Carvalho (1986) Geometria Fractal é uma nova linguagem criada pelo matemático polonês Benoit Mandelbrot, no começo da década de cinquenta, após observar padrões surgidos em diversas áreas de estudo e de pesquisa tais como a estrutura do ruído nas comunicações telefônicas, a flutuação dos preços nas operações de mercado e o estudo empírico da geometria dos litorais.

A Geometria Fractal

Como mencionado anteriormente, um conceito importante ligado a Teoria do Caos é a Geometria Fractal. Ela é considerada, assim como a Geometria Esférica e Hiperbólica, não Euclidiana. Geometria não Euclidiana é toda geometria que não inclui entre seus axiomas o postulado das paralelas, que consiste em: *se um segmento de reta intercepta duas retas (no mesmo plano), de modo que um dos pares dos ângulos colaterais internos tem soma inferior a dois ângulos retos, então as retas quando prolongadas suficientemente, se cortam do lado em que se encontram os referidos ângulos colaterais internos.*

Durante séculos vinha-se tomando como base de estudo e pesquisa a Geometria Euclidiana, por serem apenas utilizadas figuras geométricas regulares, onde os antigos acreditavam que fossem as formas do universo. Hoje se pode provar o contrário com essa nova geometria, a Geometria da Natureza.

Esse nome, fractal, foi dado por Mandelbrot em 1957 com a finalidade de justificar suas formas. Fractal vem do latim *fractus* que significa fragmento ou pedaço.

As imagens fractais são caracterizadas por repetir um determinado padrão com constantes variações. As suas propriedades são auto-semelhança, complexidade infinita e dimensão. A Geometria Fractal segundo Janos (2009) é uma linguagem matemática que descreve, analisa e modela as formas encontradas na natureza.

Entendemos então as suas propriedades com as seguintes características:

- **Auto-semelhança** é a simetria através das escalas, ou seja, a menor parte de um fractal se assemelha com o todo.
- **Complexidade Infinita** ocorre nos fractais pelas imagens serem formadas por infinitas iterações de equações matemáticas.
- **Dimensão fractal** é o grau de ocupação do seu espaço, sem se importar com o todo como na geometria euclidiana; é considerado também como o grau de irregularidade que a figura possui.

Para explicar melhor a definição de dimensão fractal, Mandelbrot (apud Gleick, 1989, p.92), utilizou o seguinte exemplo:

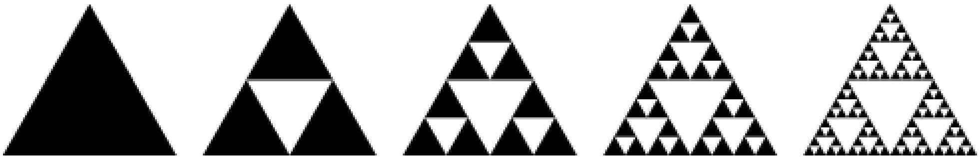
> Qual é a dimensão de um novelo de fio? Mandelbrot respondeu que isso depende do ponto de vista. Visto de grande distância, o novelo não é mais do que um ponto, com dimensão zero. Visto mais de perto, o novelo parece ocupar um espaço periférico, assumindo assim três dimensões. Visto ainda mais de perto, o fio torna-se visível, e o objeto torna-se de fato unidimensional, ainda que essa dimensão única se enovele em volta de si mesma de tal forma que ocupa um espaço tridimensional. A noção de quantos números são necessários para especificar um ponto continua a ser útil. De muito longe, não é preciso nenhum - o ponto é a única coisa que existe. Mais perto, são precisos três. Mais perto ainda, um é suficiente - qualquer posição específica ao longo do fio é única, por muito que o fio esteja enovelado. (GLEICK, 1989, p.92)

Neste sentido, a ciência dos fractais apresenta estruturas geométricas de grande complexidade e beleza infinita ligada às formas da natureza, ao desenvolvimento da vida e a compreensão do universo. A seguir, apresentaremos alguns exemplos de fractais utilizados no desenvolvido do trabalho.

Exemplos de Fractais

Triângulo de Sierpinsk

Em 1915, Waclaw Sierpinsk, definiu um triângulo onde a partir de um triângulo equilátero através de um processo recursivo o divide em infinitos triângulos. (JANOS, 2009, p. 291)

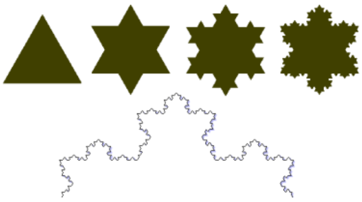


(Figura 1)[3]

Começando por um triângulo equilátero qualquer, determina-se os pontos médios de cada lado e ligando-os serão gerados quatro novos triângulos, após, retira-se o triângulo central. A recursão ocorre repetindo várias vezes esse processo.

Curva de Koch

A curva de Koch é gerada a partir de um triângulo equilátero, onde cada lado do triângulo deverá ser dividido em três partes e acrescido um novo triângulo com um terço do tanho e assim sucessivamente. (JANOS, 2009, p.290)



(Figura 2)[4]

Os Fractais na Natureza

Os fractais estão presentes na natureza em diversos lugares como nas nuvens, nos litorais, em alguns vegetais e até mesmo nos seres vivos.

---

[3] Cesta de Sierpinski – (JANOS, 2009, p.291)

[4] Ilha de Koch – (JANOS, 2009, p.290)

Samambaia Fractal

(Figura 3)[5]

Visualização (Desenvolvimento visuo - espacial)

Para Costa (2002) o Pensamento Geométrico trabalha com imagens tanto pensadas de experiências interiorizadas do mundo, quanto construções mentais sobre ele. Esse componente envolve o pensamento visuo–espacial, que a mesma autora define como o conjunto de processos cognitivos para os quais as representações mentais para objetos espaciais ou visuais, relações e transformações podem ser construídas, manipuladas e codificadas em termos verbais ou mistas.

Costa (2002) aponta três modos distintos do pensamento visual:

- **Pensamento visuo – espacial resultante da percepção, pensamento global**: operações intelectuais sobre o material perceptivo – sensorial, de memória.
- **Pensamento visuo – espacial resultante da manipulação de imagens e da construção mental de relações entre as imagens, pensamento dinâmico**: operações intelectuais relacionadas com a manipulação, transformação de ideias, conceitos e modelos.
- **Pensamento visual resultante da exteriorização do pensamento**: operações relacionadas com representação, tradução e comunicação de ideias, conceitos e métodos.

Como o objetivo desse artigo é trabalhar a Geometria Fractal para propiciar o desenvolvimento visuo – espacial resultante da percepção, nos atentaremos apenas a ele.

Pensamento visuo–espacial resultante da percepção (Pensamento Global)

[5] Samabaia Fractal – (JANOS, 2009, p.298)

Pensamento visuo–espacial resultante da percepção, segundo Costa (2002), poderá ser construído pelo sujeito partindo de sensações e utilizando a informação adquirida com a experiência. Ela ainda afirma que:

> (…) esse modo de pensamento envolve experiências de concentração mental, de controle e de observação. As experiências de observação que envolvem percepção e interpretação, são medições que dependem da experiência passada, de aspectos específicos de nossa cultura, portanto, o que vemos, depende do que trazemos à situação (COSTA,2002, p.264).

Para que esse modo de pensamento seja desenvolvido, a mesma autora afirma que devem ser trabalhados vários precessos mentais associados, tais como: intuições primárias, construções de imagens, re–apresentações de imagens, reconhecimentos visuais, interpretações, identificações de objetos, apreensão global de uma representação geométrica, memorização de uma exposição lógica, geração de conceitos, iterações e as primeiras inferências intuitivas.

Método

Com base nos pressupostos apresentados, foi construída uma sequência didática, alicerçada na Teoria das Situações Didáticas estudada por Guy Brousseau, cujo foco são as situações didáticas definidas com um conjunto de relações explícitas e/ou implícitas estabelecidas entre os educandos, um meio e o professor, no caso o pesquisador, com o objetivo de que os educandos pudessem adquirir um saber constiuído, propiciando a vivência de ação, formulação, validação e institucionalização do novo saber em questão, a Geometria Fractal à luz dos registros de representação semiótica de Duval.

Para a pesquisa 21 alunos foram sujeitos, com idade entre 11 e 12 anos, matriculados no 7° ano (6ª série), do Ensino Fundamental de uma escola da rede privada da cidade de Ribeirão Preto. Foram feitos 3 grupos de sete alunos, entitulados neste artigo como grupo A, grupo B e grupo C, escolhidos de forma aleatória, sem uma característica específica.

As atividades se desenvolveram no decorrer da aplicação da sequência didática, em um processo de aprendizado através de observação, construção, discussão, associação dos registros de representação e o conceito de padrão. Essa sequência é composta de 3 sessões de 50 minutos focando os seguintes aspectos:

- Reconhecimento de figuras regulares e irregulares;
- Atividade de construção geométrica;
- A utilização do lúdico como processo avaliativo.

Para isso foram desenvolvidas as seguintes atividades:

1 – Reconhecimento das figuras geométricas

Foi distribuído um kit com vários objetos (clips, bolinha de papel, lápis, laranja, sólidos geométricos e um tangram) para classificá-los da forma que acharem pertinentes e justificar a classificação.

Espera–se com essa atividade que os sujeitos da pesquisa observem se encontram alguma característica comum entre os objetos, se conseguem fazer alguma relação com os padrões fractais ou apenas relacionam com a geometria euclidiana.

Resultados da atividade I

Os grupos, sem nenhuma distinção, relacionaram pelas formas, como por exemplo:

O **grupo A** separou com o seguinte critério:

Laranja, bolinha de papel e esfera formavam um conjunto que chamaram de "redondinhos". Fizeram a mesma coisa com os outros objetos. O único conjunto que chamaram de unitário foi o clips, por não se assemelhar com nenhum outro.

O mesmo aconteceu com os outros grupos.

Na segunda atividade foi desenvolvido o Triângulo de Sierpinski. Estipulamos como objetivo a construção do triângulo de Sirpinski com a utilização de lápis, régua, compasso e lápis de cor.

Foi distribuido o segundo kit contendo esses objetos.

O objetivo dessa atividade era de demonstrar padrões existentes nas figuras aumentando–as ou diminuindo–as.

Junto ao kit foi entregue uma ficha com os passos para a construção do Triângulo de Sierpinski até a iteração 3:

1 – com o auxílio do compasso, construa um triângulo equilátero de lado 10 cm;

2 – determine os pontos médios de cada lado

3 – ligue os pontos médios para a construção do próximo triângulo e pinte – o;

4 – repita os itens 2 e 3 em todos os triângulos construidos na figura e pinte os que ficarem ao centro.

Resultados da Atividade II

Grupo A: apresentou facilidade na construção do triângulo e demonstraram interesse em fazer um maior para verificarem se quanto maior for o triângulo mais triângulos menores eles encontrarão. Alguns alunos do grupo A, ainda começaram a levantar questões sobre proporcionalidade.

Grupo B: dois alunos sentiram dificuldade na construção do triângulo equilátero com a utilização do compasso, mais os outros auxiliaram e concluíram a atividade com êxito.

Grupo C: não apresentou dificuldades na construção. Alguns estudantes ainda fizeram uma correspondência com a atividade anterior dizendo que se estivesse esse triângulo no kit I, eles colocariam junto ao tangram por se tratar de uma figura plana.

Quando fizeram esse questionamento o Aluno X do Grupo A disse que não colocaria junto com o tangram e sim com a bolinha de papel, todos do grupo incluindo os outros assustaram e perguntaram o motivo, pois nem a forma era igual.

O Aluno X justificou:

- olha professor, se eu fizer o desenho da bolinha como eu fiz com o triângulo e tirar esses espaços eu também vou ter mais bolinhas, como aconteceu com o meu triângulo.

Alguns alunos do grupo A concordou com a ideia e apoiaram Aluno X, mais outros alunos de outro grupo disseram não conseguir visualizar o ele disse, até Aluno X representar a partir de um desenho para que todos pudessem compreender.

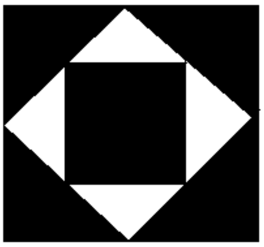
Concluimos que nesse momento as modificações propostas por Duval (1995), foram compreendidas no momento em que Aluno X começou a observar as propriedades relacionadas aos fractais, no caso auto – semelhança.

Como a discussão estava cada vez mais interessante, antes da Atividade III, foi proposto para que cada grupo fizesse outro desenho com a mesma característica desse triângulo, obtendo resultados interessantes.

Após esses questionamentos foi explicada a definição de Fractais.

A terceira atividade foi o jogo a corrida do tangram. O jogo foi composto pelos três grupos A, B e C, com a finalidade de auxilio na concentração, de controle e de observação, validando assim, o desenvolvimento visuo–espacial.

Primeiro as crianças memorizaram 2 (duas) figuras fractais uma de cada vez, dando alguns segundos para a memorização de cada uma delas. Uma das figuras é o triângulo de Sierpinski que já tinha sido construído e a outra segue o mesmo processo de interação, mas com quadrados, como mostra a imagem abaixo:



As crianças construíram essas imagens utilizando todas as peças do tangram do grupo.

Cada imagem foi construída em um local pré determinado pelo pesquisador. Cada grupo estava devidamente afastado do outro

Em cada imagem construída, as crianças chamaram o pesquisador para a verificação, e só puderam trabalhar na segunda imagem caso a primeira esteja corretamente montada.

Ganhou o jogo a equipe que montou a última imagem corretamente no local especificado momentos antes de se iniciar o jogo.

Resultados da Atividade III

A aceitação do jogo foi unânime, todos os grupos disseram que poderiam ter atividades como essa em sala de aula frequentemente, pois afirmaram que aprenderam brincando.

Aluna 1 do grupo B, disse que a partir daquele momento as imagens fractais começariam a fazer parte da vida dela.

Concluimos que nessa atividade os alunos compreenderam o significado de fractal e atingiram o objetivo proposto que era memorizar e construir a imagem, contribuindo para o desenvolvimento visuo–espacial.

Considerações Finais

No início os alunos estavam meio tímidos em se tratando de uma atividade nova, mas atingiram todos os objetivos principalmente quando foi proposta a última atividade, onde eles teriam que memorizar as imagens apenas em alguns segundos e reproduzí–las com o auxílio do tangram.

Dos 21 sujeitos, apenas 5 tiveram dificuldade na memorização das imagens, pois justificaram que o tempo dado (15 segundos para cada imagem) foi pouco e a distância para a construção das imagens muito longa. Segundo laudos mantidos em sigilo pela Instiuição, 4 desses 5 sujeitos possui algum tipo de transtorno de aprendizagem triado por psicopedagogos ou neurologistas, o outro faltou na segunda sessão, cuja atividade era a construção do fractal.

De acordo com o desempenho dos alunos no decorrer da aplicação da sequência constatamos que eles terminaram as atividades conseguindo associar os diferentes tipos de registros de representação semiótica, e que a mesma propriciou no desenvolvimento visuo–espacial.

Referências

ALMOULOUD. S. **Fundamentos da Didática da Matemática**, Curitiba: Ed.: UFPR, 2007

ALMOULOUD. S. A.; MELLO, E.G.S **Iniciação á demonstração aprendendo conceitos geométricos.** 23ª REUNIÃO ANUAL DA ANPed, 23., 2000, Caxambu. Anais…Caxambu, 24 – 28 de setembro de 2000. Rio de janeiro: ANPed, 2000. P. 1 – 18.

BROUSSEAU, G. (1986). **Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques.** *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

CARVALHO, Maria Cecíclia C. S. – **Fractais: uma breve introdução** – São Paulo: Ed. Faculdades São Judas, 1986.

COSTA, C. (2002). Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização. In J. Ponte, C. Costa, A. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. Dionísio (Orgs). ***Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores*.** (pp. 257 – 273) Lisboa: SPCE.

DUVAL, R. **Sèmiosis et pensèe humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. França: Peter Lang, 1995.

FRAME, M. and MANDELBROT, B. **Introduction to Fractal Geometry**. Disponível em: classes.yale.edu/99-00/math190a/> Acessado em: 1º. Out 2004.

GLEICK, James. **Caos: A Criação de Uma Nova Ciência** – Rio de Janeiro: Elsevier, 1989

JANOS, Michel. **Matemática e natureza**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

LORENZATO,S. **Por que não se estudar geometria?** A Educação Matemática em Revista. São Paulo, ano III, p.3 – 13, 1 sem. 1995.

PATAKI, Irene. **Geometria Esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC – SP, São Paulo, 2003.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Aprendizagem em matemática. Registros de representação semiótica**. Campinas SP: Papirus, 2003