Diferenças conceituais relacionadas aos Números Irracionais por alunos de três níveis de ensino: uma análise por meio da Teoria dos Campos Conceituais

Veridiana Rezende[1]

rezendeveridiana@gmail.com

Clélia Maria Ignatius Nogueira[2]

cminogueira@uem.br

Resumo

Neste artigo apresentamos nossa pesquisa de doutorado, relacionada ao ensino dos Números Irracionais, que se encontra em fase de desenvolvimento. Fundamentados na Teoria dos Campos Conceituais do pesquisador francês Gérard Vergnad, analisaremos a ampliação conceitual referente aos Números Irracionais existente em alunos de 9º ano do Ensino Fundamental, 3º ano do Ensino Médio e 4º ano de Licenciatura em Matemática do sistema de ensino brasileiro e níveis equivalentes do sistema de ensino francês. A análise será realizada à luz da Teoria dos Campos Conceituais, por meio dos esquemas e invariantes operatórios apresentados pelos alunos em atividades investigativas relacionadas aos Irracionais.

Palavras chave: Educação Matemática, Números Irracionais, Campo Conceitual.

Introdução

Relatamos neste trabalho nossa pesquisa de doutorado que se encontra em fase de desenvolvimento. A investigação refere-se aos Números Irracionais em três níveis de ensino: Fundamental, Médio e Superior. O motivo desta investigação veio da constatação, por parte de uma das autoras, professora de Curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do interior do Paraná, de que seus alunos chegam ao quarto ano do curso de Matemática com dúvidas, e até mesmo sérios

---

[1] Professora assistente do departamento de Matemática da Universidade Estadual do Paraná – Campo Mourão e Doutoranda do Programa de Pós - graduação em Educação para a Ciência e a Matemática (PCM) da Universidade Estadual de Maringá (UEM).

[2] Professora Doutora do Programa de Pós - graduação em Educação para a Ciência e a Matemática (PCM) da Universidade Estadual de Maringá (UEM).

equívocos referentes a conceitos, definições e propriedades dos Números Reais, particularmente, dos Números Irracionais.

Interessadas em investigar os porquês destas deficiências dos alunos, buscamos por pesquisas relacionadas ao ensino dos Números Irracionais e Reais com o objetivo de conhecermos seus resultados e constatar se as percepções da doutoranda em seus alunos era um problema local, que ocorre somente com seus alunos, ou um problema mais amplo que ocorre em diversas regiões do Brasil e no exterior. Pesquisas como Penteado (2004), Igliori e Silva (2001), Soares, Moreira e Ferreira (1999), Melo (1999), Margolinas (1998), Robinet (1986) nos permitem afirmar que as deficiências relacionadas aos Números Irracionais que a doutoranda percebeu em seus alunos ocorrem em diversas regiões do Brasil e também no exterior. Igliori e Silva (2001) mostram que existem semelhanças nas dificuldades relacionadas aos Números Reais, em particular nos Irracionais, apresentadas por alunos de cursos superiores de Ciências Exatas do Brasil e da França.

Motivadas pelo tema, e com a oportunidade que surgiu de fazermos um estágio de doutorado sanduíche na França, almejamos analisar os esquemas, assim como concebido por Vergnaud, de alunos brasileiros e franceses de 9º ano do Ensino Fundamental, 3º ano do Ensino Médio e 4º ano de Licenciatura em Matemática do sistema de ensino brasileiro e níveis equivalentes do ensino francês, em atividades relacionadas aos Números Irracionais com a intenção de conhecermos as diferenças conceituais apresentadas por estes alunos e estudar a ampliação conceitual presentes nos esquemas dos alunos.

Na sequência, apresentamos brevemente a trajetória histórica dos Números Irracionais, estudos relacionados aos Irracionais e à Teoria dos Campos Conceituais que fundamentam nossa investigação, nosso problema e objetivos de pesquisa e a metodologia de nossa pesquisa.

Um pouco de história

Os egípcios foram os primeiros povos a “inventarem” as ciências matemáticas (CAJORI, 2007), e nos registros que temos sobre suas matemáticas de aproximadamente 2000 a. C. podemos encontrar indícios de Números Irracionais. As principais fontes de informações sobre a matemática egípcia que resistiram ao tempo são os papiros. De acordo com Boyer (1996), encontramos no papiro de Rhind, diversos problemas envolvendo operações aritméticas, frações unitárias, álgebra, razões trigonométricas e geometria. Em alguns destes problemas, como o problema 50 e o 48, ao utilizarmos notações matemáticas atuais, encontramos aproximações interessantes para o valor de π, como $\pi \cong 3{,}160$. Também encontramos relações que perduram até hoje como a razão entre a área do círculo e a circunferência que é igual a área do quadrado circunscrito para o seu perímetro. Um fato, que no mínimo é curioso é que a pirâmide Quéops é uma pirâmide áurea, pois apresenta uma relação matemática que envolve um Número Irracional tão particular que é o número de ouro.

Os registros existentes sobre a escrita cuneiforme e o sistema sexagesimal dos babilônios encontram-se nas mais de meio milhão de tabletas de argila desenterradas na Mesopotâmia, das quais quase quatrocentas foram identificadas como estritamente matemáticas. Nestas tabletas há textos matemáticos que datam talvez de 2100 a. C. (EVES, 2004), e em alguns destes textos encontramos boas aproximações de Números Irracionais, principalmente relacionados aos números $\sqrt{2}$ e π. Fatos surpreendentes como a diagonal do quadrado pode ser encontrada multiplicando o lado por $\sqrt{2}$, são encontrados os registros babilônios. A tableta Plimpton 322 apresenta quinze linhas com ternos pitagóricos, ou seja, valores de x, y e z que satisfazem $x^2 + y^2 = z^2$. Não tem como negarmos que os povos da Mesopotâmia conheciam de alguma forma o teorema de Pitágoras (AABOE, 2002; BOYER, 1996). Por meio de descrição verbal, eles resolviam as equações pelo método que conhecemos hoje por fórmula de Bhaskara. Porém, o número que deveria ser efetuado a raiz quadrada existente na fórmula, era sempre um quadrado perfeito (CAJORI 2007; BOYER 1996). Este fato nos faz acreditar que os babilônios perceberam a existência de números que não são quadrados perfeitos, ou seja, perceberam a existência de Números Irracionais.

Embora sejam percebidos aspectos da história grega desde 2000 a. C., foi aproximadamente em 800 a. C. que essa civilização acelerou seu desenvolvimento. A escola pitagórica era uma sociedade secreta, mística e religiosa, que concentrava seus estudos principalmente em Matemática e Filosofia. O símbolo da escola era o pentágono regular, que significava o símbolo da vida humana, da boa saúde, da aliança entre os homens, de protetor físico e espiritual. Devido à importância que os pitagóricos atribuíam ao pentágono regular, é possível que tenham dado atenção especial ao estudo desta figura. Ao estudarem suas propriedades perceberam que não existe um terceiro segmento que cabe um número inteiro de vezes no lado e na diagonal do pentágono ao mesmo tempo, ou seja, perceberam que o lado e a diagonal do pentágono são segmentos incomensuráveis. Godefroy (1997) comenta sobre a possibilidade dos pitagóricos terem detectado que a razão entre o lado e a diagonal do pentágono é igual ao número de ouro Φ, e que a razão entre o lado do pentágono e o lado do pentágono obtido pela interseção das diagonais é Φ^2. O número de ouro Φ pode ter sido o primeiro Número Irracional percebido pelos gregos.

Os pitagóricos conheciam o que denominamos por Teorema de Pitágoras (provavelmente pelos contatos com os babilônios), e demonstraram a veracidade deste resultado, possivelmente é por este fato que recebe o título de Teorema de Pitágoras.

A descoberta de Números Irracionais causou muitos conflitos entre os gregos da antiguidade, de modo especial para os pitagóricos. Eles acreditavam que na linha reta numerada estavam dispostos apenas Números Racionais, e ela era contínua, pois entre quaisquer dois números da reta sempre encontravam um terceiro número entre eles. Porém, segundo Eves (2004), os próprios pitagóricos perceberam que isto não era verdadeiro ao detectarem que não existe Número Racional que corresponda o ponto P da reta no caso em que OP tinha a mesma medida que a diagonal do quadrado de lado unitário. Este fato perturbou os pitagóricos, pois o segmento OP existia, e nenhum número poderia corresponder a sua medida. Procuraram conviver com estas contradições simplesmente aceitando o fato que para certos segmentos não existia número que representasse sua medida, e por isto, concluíram que a geometria era muito mais ampla e rica do que a aritmética. Com a percepção dos Números Irracionais, a crença da escola de que tudo era representado por Números Inteiros não era mais verdadeira, e a veracidade do próprio Teorema de Pitágoras poderia ser questionada. Os pitagóricos tentaram manter esta questão em sigilo.

A escola de Platão, criada pouco depois da descoberta dos Números Irracionais, também contribuiu para o desenvolvimento da matemática grega, inclusive para estes números. Os membros desta escola não podiam denominar estes números, mas também sabiam que não podiam refutá-los, uma vez que não se pode negar a existência da diagonal do quadrado de lado unitário. Foi por meio do Teorema de Pitágoras e utilizando os únicos instrumentos permitidos pela escola, a régua (não graduada) e o compasso, que os platônicos determinaram um procedimento geométrico para encontrar $\sqrt{n}$, qualquer que seja n inteiro (denominamos por n natural) (GODEFROY, 1997).

Na escola platônica, a questão da incomensurabilidade também causou escândalos e conflitos, pois parecia arruinar os teoremas envolvendo proporções. Perceberam que a razão entre a diagonal e o lado do quadrado não era igual a de um número inteiro para outro número inteiro, e estavam com o sério problema de como comparar grandezas incomensuráveis (Boyer, 1996). Foi Eudoxo, um dos mais notáveis membros da escola de Platão, que por volta de 370 a. C., resolveu o problema da incomensurabilidade com sua teoria das proporções e o método da exaustão.

A teoria das proporções e o método da exaustão, ambas de Eudoxo, deram origem a uma nova tradição na matemática grega, na qual os segmentos incomensuráveis passaram a ser aceitos como um objeto geométrico. As contribuições de Eudoxo foram fundamentais para o desenvolvimento da Matemática, serviram de base para quase toda a matemática apresentada nos Elementos de Euclides e contribuíram para o desenvolvimento do cálculo diferencial.

Mesmo sem documentos que comprovem que os egípcios e babilônios conheciam o que denominamos por Números Irracionais, não podemos negar que a gênese dos Números Irracionais está na matemática destes povos, em função das boas aproximações existentes nos registros destes povos, relacionada com o que hoje denominamos por Números Irracionais. Contudo, foram os gregos, que após muitos conflitos, apresentaram grandes avanços e difundiram estes números. Mais precisamente foi o grego Eudoxo, que solucionou a questão da incomensurabilidade, ao elaborar uma teoria assegurando a existência de segmentos incomensuráveis, contribuindo para o desenvolvimento da Matemática, servindo de base para a elaboração dos Elementos de Euclides e do Cálculo Diferencial.

No entanto, apesar da solução apresentada por Eudoxo para a incomensurabilidade ter sido aceita e aplicada pelos matemáticos por séculos, a questão dos Irracionais não estava totalmente resolvida, pois ainda não existia uma definição para estes números. Foi somente em 1872 que o matemático alemão Dedekind, embasado na teoria das proporções de Eudoxo, desenvolveu uma teoria consistente, por meio dos chamados Cortes de Dedekind, assegurando a existência dos Números Irracionais e encerrando um capítulo da História da Matemática, cujo início se deu, com os antigos egípcios.

Ao observarmos a trajetória histórica e epistemológica da construção do conceito de Números Irracionais, percebemos o quão ela foi demorada e conflituosa. Segundo Rezende (2003) esta trajetória nos permite compreender a nebulosidade apresentada no processo pedagógico em relação ao conceito destes números, uma vez que os estudantes são privados, durante todo o processo de ensino básico, dos instrumentos necessários para a superação destes obstáculos.

Os Números Irracionais e Reais e a nossa pesquisa

São diversas as pesquisas, como Boff (2006), Rezende (2003), Igliori e Silva (2001), Soares, Moreira e Ferreira (1999), Melo (1999), Robinet (1986), relacionadas aos Números Irracionais e Reais que abordam as dificuldades e conceituações insuficientes existentes no ensino destes Números, por parte de alunos de Ensino Fundamental, Médio e Superior e até mesmo professores de Matemática. Pesquisas como estas nos motivam na continuação de nosso estudo doutoral, uma vez que percebemos que mesmo existindo diversas pesquisas relacionadas ao tema, ainda existe deficiência no ensino dos Números Irracionais e intenção de oferecer subsídios para melhor compreendê-lo e beneficiá-lo. Apresentamos uma das pesquisas já citadas neste texto, Igliori e Silva (2001), uma das quais nos fundamentamos para a elaboração do problema de pesquisa que estamos nos empenhando para responder com nossa investigação.

Igliori e Silva (2001) apresentam um estudo com 36 alunos iniciantes do curso de Ciências da Computação e 14 alunos finalistas do curso de Licenciatura em Matemática. Os autores basearam-se em três pesquisas, Robinet (1993), Fishbein, Jehiam e Cohen (1995) e Tiroh (1995), a primeira realizada com alunos da França e as outras duas realizadas com alunos israelenses. Robinet (1993) investigou estudantes franceses de diferentes níveis de escolaridade com a intenção de investigar a interação entre as concepções dos números reais e a aprendizagem das noções de análise, para isto aplicou um questionário a 483 estudantes. Fishbein, Jehiam e Cohen (1995) investigaram 69 estudantes de diferentes níveis de escolas de Tel Aviv com a intenção de avaliar em que medida os obstáculos na conceituação dos irracionais (existência de grandezas incomensuráveis e o fato de o conjunto dos racionais ser denso no conjunto dos reais e não cobrir toda a reta) constituem obstáculos de aprendizagem. E a pesquisa realizada por Tiroh (1995) com o objetivo de avaliar as concepções que alunos da faixa etária entre 11 e 17 anos apresentam sobre o infinito. Para isto elaborou um questionário que foi aplicado a 1380 alunos de escolas de Tel Aviv.

Fundamentados nestas três pesquisas e com a intenção de compreender as concepções relacionadas aos Números Reais de 36 estudantes iniciantes do curso de Ciências da Computação e 14 alunos finalistas do curso de Matemática, e se estas concepções se assemelham as concepções de estudantes franceses a israelenses, Igliori e Silva (2001) elaboraram um questionário, baseados nos questionários de Robinet (1993), de Fishbein, Jehiam e Cohen (1995) e de Tiroh (1995), que foi aplicado aos estudantes, em condições normais de aula com duração de aproximadamente uma hora e meia.

Após a análise das questões, Igliori e Silva (2001) concluíram que os alunos brasileiros investigados nesta pesquisa apresentam algumas concepções sobre os números reais que podem ser comparadas com os alunos franceses e israelenses avaliados por Robinet (1993), Tiroh (1995) e Fischbein (1995). Tais como as concepções de associação irracionalidade – representação decimal ilimitada, associação irracionalidade – "não-exatidão", associação número – aproximação.

Ainda segundo os autores, pela análise das respostas dos alunos brasileiros em relação às questões 7, 8 e 9, pode-se verificar que tanto o modelo de reta real como as concepções para comparar conjuntos infinitos dos alunos brasileiros são bastante semelhantes ao modelo e concepções dos franceses e israelenses. Outro fato detectado pelos autores que merece ser destacado é em relação aos alunos iniciantes e concluintes. Eles perceberam que na maioria das questões os concluintes se sobressaíram em relação ao desempenho dos iniciantes, porém, muitas concepções resistem após um curso introdutório de análise real, tratado de forma tradicional.

Assim, considerando pesquisas, como Igliori e Silva (2001), Soares, Moreira e Ferreira (1999), Melo (1999), que confirmam que as percepções da doutoranda de que seus alunos do 4º ano do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do interior do Paraná apresentam equívocos e conceituações insuficientes em relação aos Números Irracionais, não é um problema local que ocorre apenas com estes alunos, mas um problema global que ocorrem em outras regiões do país e no exterior, como é o caso da França e Israel; pesquisas como Bartolomeu (2010) e Boff (2006) que relatam que alunos de Ensino Fundamental e Médio também não têm apresentado resultados satisfatórios em relação à aprendizagem deste conteúdo; e Igliori e Silva (2001) que constataram que alunos brasileiros do ensino superior de cursos de Ciências Exatas apresentam conceituações semelhantes aos alunos da França; elaboramos nosso problema de pesquisa: existe ampliação conceitual no que concerne aos Números

Irracionais entre os alunos que finalizam os ensinos Fundamental, Médio e Curso de Licenciatura em Matemática? Será que existem semelhanças entre a ampliação conceitual de alunos brasileiros e franceses, no que concerne a alunos que estão finalizando o Ensino Fundamental, Médio e curso de Licenciatura em Matemática do sistema de ensino brasileiro e níveis equivalentes do sistema de ensino francês? Para respondermos estas questões, buscamos subsídios na Teoria dos Campos Conceituais, da qual fazemos breves considerações a seguir.

A Teoria dos Campos Conceituais como alicerce para nossa investigação

A Teoria dos Campos Conceituais, elaborada pelo psicólogo francês Gérard Vergnaud, é uma teoria que ostenta subsídios para compreender o desenvolvimento dos conceitos no decorrer da aprendizagem. Ela tem como principal finalidade "[...] fornecer um quadro que permite compreender as filiações e as rupturas entre conhecimentos, nas crianças e nos adolescentes, entendendo por 'conhecimento' tanto o saber fazer como os saberes expressos" (VERGNAUD, 1990, p. 135, tradução nossa).

A teoria dos campos conceituais não é uma teoria didática, mas é considerada uma teoria que interessa à didática. Para Vergnaud (2003) existem laços estreitos entre a psicologia e a didática, pois a primeira não é suficiente para dar conta da teorização em educação e a didática não pode dispensar as contribuições da psicologia.

Esta teoria não se restringe à Matemática. Pesquisas sobre os campos conceituais da reprodução vegetal, da moral, conceitos tecnológicos, físicos, etc. já foram desenvolvidas. Porém, ela iniciou-se com finalidades matemáticas, mais especificamente, iniciou-se para estudar os processos de conceituação progressiva das estruturas aditivas, as estruturas multiplicativas, das relações número-espaço, da álgebra (VERGNAUD, 1990).

Um campo conceitual pode ser definido como um conjunto de situações. As situações não são no sentido de situação didática assim como definido por Guy Brousseau, mas no sentido de tarefa, as quais os alunos precisam ser submetidos para a compreensão dos conceitos. Segundo Vergnaud (2003) "[...] a revolução didática está em propor situações que possibilitem o desenvolvimento de esquemas" (p. 38). Tais situações devem ser elaboradas levando em consideração o momento de aprendizagem a que o aluno já foi submetido.

A teoria dos campos conceituais possui alguns conceitos chaves, não triviais, que são fundamentais para compreender sua essência. Não é nossa intenção, neste texto, apresentar a teoria bem como uma discussão e definições dos conceitos que dela fazem parte. Apenas apresentamos argumentos pela sua escolha em função de nossos objetivos.

Fundamentamos-nos em algumas pesquisas, como Bittar (2009), Escudeiro e Jaime (2009), Flückiger e Brun (2005), Flückiger (2004), nas quais a teoria dos campos conceituais foi adotada por ser uma teoria cognitivista que oferece suporte para as análises dos desempenhos dos alunos em atividades matemáticas. Estes autores apoiaram-se nesta teoria, tanto para analisarem os esquemas e invariantes operatórios para conhecerem as evoluções conceituais de conteúdos ensinados na escola, como para estruturarem as situações que devem contemplar os conceitos do campo conceitual estudado. Flückger (2004) utilizou-se do conceito de esquema, definido pela Teoria dos Campos Conceituais, para conhecer e analisar a gênese dos conhecimentos numéricos relacionados ao campo conceitual da divisão em alunos suíços de uma quinta série primária. Já a pesquisa de Flückiger e Brun (2005), teve como objetivo apontar as questões conceituais apresentadas pelos alunos (de 7 a 10 anos) em atividades de medidas, no decorrer da escola primária. Para isto os autores elaboraram um conjunto de situações, almejando a estruturação do campo conceitual da medida, e analisaram os esquemas e invariantes operatórios dos alunos, que segundo eles com este tipo de análise é possível fazer uma comparação das evoluções observadas em relação aos conteúdos ensinados na escola.

Outra pesquisa relacionada à invariantes operatórios foi desenvolvida por Escudeiro e Jaime (2009), e realizada com alunos do primeiro ano da Faculdade de Engenharia da Universidade Nacional de San Juan (UNSJ/Argentina). A investigação buscou encontrar regularidades que os alunos apresentam no Campo Conceitual da Mecânica Clássica, na temática do Corpo Rígido. Os autores analisaram um problema, dentre seis, da 3ª avaliação parcial e buscaram identificar os teoremas e conceitos-em-ação apresentados nas resoluções escritas dos problemas pelos alunos dos anos de 1998 e 2002, submetidos às mesmas condições de ensino. Segundo os autores os estudantes da turma de 2002 apresentaram um maior número de conceitos e teoremas-em-ação e mais elaborados que os alunos da turma de 1998. Uma conclusão importante dessa pesquisa foi que os conhecimentos-em-ação são pessoais e funcionais para o indivíduo que os possuem, e transformá-los não é uma tarefa trivial.

Com estas considerações, percebemos que a Teoria dos Campos Conceituais pode oferecer subsídios para respondermos nosso problema de pesquisa. Neste sentido, temos por objetivo buscar invariantes operatórios presentes nos esquemas dos alunos em situações/problemas concernentes aos Números Irracionais que serão submetidos a resolverem. E por meio dos invariantes operatórios analisaremos a ampliação conceitual dos Números Irracionais em alunos de 9º ano do Ensino Fundamental, alunos de 3ª ano do Ensino Médio e alunos do 4º ano de curso de Licenciatura em Matemática do sistema de ensino brasileiro e séries equivalentes do sistema de ensino francês. Além disto, a Teoria dos Campos Conceituais nos auxiliará na elaboração das situações/problemas propostas aos alunos.

Metodologia

Sujeitos e local da pesquisa: Devido ao objetivo principal de nossa pesquisa, consideraremos como sujeitos da pesquisa: 20 alunos brasileiros e 20 franceses que estejam finalizando o 9º do Ensino Fundamental (equivalente ao término do Collège na França; 20 alunos brasileiros e 20 alunos franceses que estejam finalizando o 3º ano do Ensino Médio (equivalente ao término do Lycée na França); 20 alunos brasileiros e 20 alunos franceses do último ano de Licenciatura em Matemática. Escolhemos este último grupo de alunos por serem futuros professores de Matemática, com o objetivo de comparar seus conceitos, esquemas e concepções a respeito dos Irracionais em relação a alunos de níveis anteriores.

Instituições brasileiras onde será realizada a pesquisa: Os alunos de Ensino Fundamental e Médio que participarão da pesquisa serão alunos de um colégio público do interior do Paraná, e os alunos de Ensino Superior serão alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Pública também do interior do Paraná. As **instituições francesas** onde serão realizadas as pesquisa, serão determinadas pelos professores orientadores franceses, do Laboratório de Ciências de Educação da Universidade Charles – de - Gaulle - Lille III.

Realização das atividades pelos alunos: Com o objetivo de analisar a ampliação conceitual relacionada aos Números Irracionais por meio dos esquemas e invariantes operatórios apresentados pelos diferentes grupos de alunos, estamos elaborando atividades investigativas que deverão ser resolvidas pelos alunos. As atividades serão aplicadas pela pesquisadora, e resolvidas pelos alunos individualmente.

É possível que sejam realizadas entrevistas com alguns alunos, principalmente com aqueles que por ventura não compreendermos seus argumentos ou resoluções das atividades. As entrevistas serão áudio-gravadas, e em seguida transcritas, com a intenção de adquirirmos melhor precisão, quantidade e qualidade nos dados.

Análise das atividades dos alunos: A análise dos dados será realizada à luz da teoria dos campos conceituais. Analisaremos os esquemas dos alunos na busca de invariantes operatórios, que segundo Flückiger e Brun (2005) analisando-os é possível fazer uma comparação das evoluções conceituais em relação aos conteúdos ensinados na escola.

Análise de documentos: Com o objetivo de conhecermos o que é solicitado para o ensino dos Números Irracionais no Brasil e na França, consideramos necessário analisar documentos que norteiam o ensino nestes dois países. Para nossa pesquisa, foi analisado o caderno de Matemática das Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná, documento oficial que apresenta estratégias e norteia o trabalho do professor para o ensino básico paranaense, e será analisado o documento equivalente do ensino de Matemática francês. Dez livros didáticos brasileiros já foram analisados, e o mesmo número de livros didáticos franceses também será analisado.

REFERÊNCIAS

AABOE, A. **Episódios da História Antiga da Matemática.** 2ª Ed. Trad. João B. P. de Carvalho. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2002.

BARTOLOMEU, V. de S. **Conhecimentos e dificuldades de estudantes do Ensino Médio relacionado ao conjunto dos Números Reais.** Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

BITTAR, M. Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais para o estudo das dificuldades dos alunos na passagem da Geometria Afim à Geometria Vetorial. In **A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.** Org. BITTAR, M., MUNIZ, C. A. Editora CRV, Curitiba, 2009.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1974.

CAJORI, F. **Uma História da Matemática.** Trad. Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Trad. H. H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.

ESCUDEIRO, C., JAIME, E. A. Conocimientos–en–acción: un estudio acerca de la integración de las Fuerzas y la Energía en Cuerpo Rígido**. Investigações em Ensino de Ciências.** Instituto de Física, UFRGS, Porto Alegre, V14(1), pp. 115-133, 2009.

FLÜCKIGER, A., BRUN, J. Conceptualization et classes de problèmes dans le champ conceptuel de la mesure. **Recherches en didactiques des mathématiques**, vol. 25, nº 3, pp 349 – 402, 2005.

FLÜCKIGER, A. Analyse didactique et scheme: une étude qui articule théorie des situations et théorie des champs conceptuels. In: **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, La Pensée Sauvage, Grenoble, vol. 24, nº 2.3, pp. 169-204, 2004.

GODEFROY, G. **A Aventura dos Números.** Trad. Antônio Viegas. Lisboa - Portugal: Instituto Piaget, 1997.

IGLIORI, S., B. C. SILVA, B. A. Concepções dos alunos sobre números reais. In**. A prática educativa sob o olhar de professores de cálculo**. Org. LACHINI, J., LAUDARES, J. B. Editora FURMAC, Belo Horizonte, 2001.

MARGOLINAS, C. **Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres reels.** "petit x" nº 16, pp. 51 à 66, 1998.

PENTEADO, Cristina Berndt. **Concepções do professor do Ensino Médio relativas à Densidade do Conjunto dos Números Reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade.** Dissertação – Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica.** Tese de Doutorado. Programa de Pós-graduação em Educação, USP, 2003.

ROBINET, J. Les Reels: quel modèles en ont les élèves? Cahier des didactique des mathématiques, nº 21. I.R.E.M., Université Paris VII, 1986.

SARAIVA, J. C. V. **As pirâmides do Egito e a razão áurea.** Revista do Professor de Matemática, nº 48, 2002.

SOARES, E. F. e, FERREIRA, M. C. C., MOREIRA, P. C. Números Reais: Concepções dos Licenciandos e Formação Matemática na Licenciatura. **Revista Zetetikè**. Campinas, v. 7, nº 12, p. 95 – 117, jul./dez. 1999.

VERGNAUD, G. A gênese dos campos conceituais. In **Por que ainda há quem não aprende?** Org. GROSSI, E. P. Editora Vozes, Petrópolis, 2.ed., p. 21-60, 2003.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, La Pensée Sauvage, Grenoble, vol. 10, nº 2.3.