PUCRS

COLÉGIO DELTA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

MAIHARA SÁBIO FURTADO

O USO DO MATERIAL CONCRETO NA MATEMÁTICA: APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA COM O TEODOLITO ARTESANAL NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA

Porto Alegre
2022

PÓS-GRADUAÇÃO - *STRICTO SENSU*

Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

O USO DO MATERIAL CONCRETO NA MATEMÁTICA:
APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA COM O TEODOLITO ARTESANAL NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA

MAIHARA SÁBIO FURTADO

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Educação
Orientador: Dr Rudrisley Alves

Porto Alegre
Dezembro/2022

FOLHA DE APROVAÇÃO

Esta página é reservada para inclusão da folha de assinaturas, a ser disponibilizada pela Secretaria do Curso para coleta da assinatura no ato da defesa.

DEDICATÓRIA

Dedico essa dissertação de mestrado ao meu marido, meu eterno companheiro, que está sempre comigo me incentivando a ser alguém melhor, que ao longo desses meses me deu não só força, mas apoio para vencer essa etapa da vida acadêmica. Obrigada, meu amor, por suportar a minha ausência em diversos momentos.

Um bom ensino da Matemática forma melhores hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a usar melhor a sua inteligência.
(Irene de Albuquerque).

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, por todas as minhas conquistas, pois sem as suas bênçãos eu não poderia alcanç-las. Agradeço também à minha família, ao meu orientador Dr Rudriscley Alves, pelas suas correções e incentivos, à minha amiga Simone, por sempre estar ao meu lado e ao meu professor mestre Airton Sousa.

O USO DO MATERIAL CONCRETO NA MATEMÁTICA:
APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA COM O TEODOLITO ARTESANAL NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA

MAIHARA SÁBIO FURTADO

12 / 2022

Orientador: Dr Rudrisley Alves

Área de Concentração: Educação, Ensino de matemática

Linha de Pesquisa: Educação matemática

RESUMO

Partindo da necessidade de atrelar a teoria à prática matemática, no sentido de proporcionar aos alunos uma experimentação que evidencie suas vivências no contexto da sala de aula, o presente estudo possui como objetivo, apresentar e descrever uma experiência diferenciada de ensino e aprendizagem, envolvendo o material concreto Teodolito que foi confeccionado de forma artesanal por uma turma da Educação de Jovens e Adultos – EJA, composta por alunos do 8º e 9º anos do ensino fundamental de uma escola da rede pública de ensino do município de Parauapebas, localizada no estado do Pará, para uso nas aulas de trigonometria, e deste modo, aprimorar o conhecimento de todos os envolvidos no sentido de que possamos refletir a cerca desta prática, possibilitando uma percepção didático-pedagógica, como um recurso facilitador que venha a contribuir para a melhoria do ensino de matemática. O método da aula prática foi idealizado a partir de uma perspectiva diferenciada, buscando transformar a percepção dos alunos a respeito do conteúdo curricular de trigonometria na disciplina de matemática, visto que este é estudado, muitas vezes somente de forma teórica, com o recurso do livro didático. A proposta foi aplicada em uma turma composta por 30 alunos sendo organizada em 2 aulas teóricas onde os mesmos puderam revisar os conceitos prévios relacionados aos conteúdos de trigonometria e 3 aulas práticas, onde se envolveram com a confecção do teodolito artesanal e sua experimentação e aplicação no ensino de trigonometria. Como resultados, foi possível observar que os alunos puderam relacionar a teoria associada à prática, no sentido de construir um conhecimento mais sólido e duradouro e que evidencie aspectos culturais de sua realidade.

Palavras-chave: Material Concreto. Ensino de matemática. Teodolito artesanal. Trigonometria.

THE USE OF CONCRETE MATERIAL IN MATHEMATICS:
MEANINGFUL LEARNING WITH HANDMADE THEODOLITE IN TRIGONOMETRY TEACHING

MAIHARA SÁBIO FURTADO

12 / 2022

Advisor: Dr Rudrisley Alves

Area of Concentration: Education, Mathematics Teaching

Research Line: Mathematics Teaching

ABSTRACT

Starting from the need to link theory to mathematical practice, in order to provide students with an experiment that highlights their experiences in the context of the classroom, the present study aims to present and describe a differentiated experience of teaching and learning, involving the concrete material Theodolite that was handcrafted by a group of students from the Education of Youth and Adults - EJA, composed of students from the 8th and 9th grades of elementary school from a public school in the municipality of Parauapebas, located in the state do Pará, for use in trigonometry classes, and thus improve the knowledge of all those involved in the sense that we can reflect on this practice, enabling a didactic-pedagogical perception, as a facilitating resource that will contribute to the improvement of mathematics teaching. The practical class method was devised from a different perspective, seeking to transform the students' perception regarding the curricular content of trigonometry in the mathematics discipline, since this is studied, often only theoretically, with the resource of the book didactic. The proposal was applied in a class composed of 30 students, being organized in 2 theoretical classes where they could review previous concepts related to trigonometry content and 3 practical classes, where they were involved with the making of the handmade theodolite and its experimentation and application in the teaching trigonometry. As a result, it was possible to observe that students were able to relate theory associated with practice, in the sense of building a more solid and lasting knowledge that highlights cultural aspects of their reality.

Keywords: Concrete Material. Mathematics teaching. Handcrafted theodolite. Trigonometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS E TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EJA	Educação de Jovens e Adultos
BNCC	Base Nacional curricular Comum
LAL	Lado, ângulo, lado
LLL	Lado, lado, lado
ALA	Ângulo, lado, ângulo
LAAo	Lado, ângulo, ângulo oposto
a.C	Antes de Cristo

LISTA DE SÍMBOLOS

Δ	Triângulo
^	Ângulo
—	Segmento
$\geq$	Maior ou igual
$\leq$	Menor ou igual

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ao observarmos a atual realidade educacional brasileira, podemos perceber que os profissionais que atuam na educação básica, com destaque para os professores da área de matemática, cotidianamente se deparam com problemas clássicos pertinentes a efetividade no processo de ensino e de aprendizagem direcionado aos alunos, que em uma visão oposta da desejada, percebem a referida disciplina de forma estática e sem aplicação no cotidiano.

Analisando as rotinas desempenhadas em sala de aula no ensino fundamental, é possível perceber que atualmente, a maioria dos alunos, independente do ano escolar, acumula desde as séries iniciais da escolarização, várias dificuldades com respeito à compreensão e assimilação dos conceitos pertinentes à trigonometria e os conteúdos relacionados ao seu campo conceitual, o que potencializa a aversão à disciplina de matemática e minimiza a possibilidade de abstração, visto que a maneira como estão acostumados a estudar, não contempla seu cotidiano, de modo que não percebem a preparação para a vida.

De acordo com nossa percepção enquanto professores de matemática, podemos observar que a metodologia utilizada nos dias atuais ainda apresenta diversas características da intuição grega com relação ao saber matemático, que apresentava como essência, a abstração e o formalismo, e modo que apenas algumas pessoas atingiam um nível de compreensão desejável, sendo caracterizados como sujeitos que possuíam uma inteligência superior. Nesse período, surgiram ainda diversos métodos de ensino dessa área do conhecimento, baseadas em parâmetros e concepções até então desconhecidos.

A partir de tais premissas, a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018), ao tratar dos seus objetivos gerais para o ensino fundamental, destaca a necessidade de interpretar, representar, descrever, e argumentar, de modo a construir uma relação de comunicação matemática por meio da iutilização de diversas linguagens, estabelecendo assim, diversas relações entre elas e diferentes representações matemáticas.

Tratando da realidade educacional brasileira, vemos que os profissionais que atuam na educação básica, com destaque para nós, professores de matemática, somos desafiados constantemente a garantir a qualidade do processo de ensino e de aprendizagem em nossas salas de aula. Porém, nos deparamos com uma realidade paralela a essa pelo fato de que um índice considerável de professores e alunos ainda perceberem a matemática como uma disciplina limitada e sem espaço para a inovação e criatividade.

Uma das realidades bastante presente em nossa rotina nos mostra que a maioria dos alunos, independente do período escolar em que estuda, apresenta diferentes níveis de dificuldades com relação à compreensão e assimilação dos conceitos relacionados ao objeto de estudo que tratamos nesta pesquisa, a Trigonometria, fato que desencadeia uma grande frustração à organização e execução do planejamento tratado no decorrer do ano letivo, o que causa nesses sujeitos, uma aversão à matemática, fazendo-os acreditar que tal ciência é puramente abstrata, de difícil compreensão, uma disciplina que não trata da realidade e, muitas vezes, sem utilidade prática no cotidiano.

Consideramos que esse pensamento não corrobora com a essência e finalidades inicias da trigonometria, vista como um ramo da matemática que apresenta aspectos atrelados ao cotidiano, cujos conceitos surgiram das necessidades de expansão territorial e intelectual da sociedade humana, sendo considerada como um tópico que apresenta uma infinidade de aplicações práticas em diversas áreas da atuação humana, de modo que o produto destas construções podem ser utilizados como recursos didáticos, no sentido de incrementar as aulas com diversos tipos de atividades, possibilitando ao aluno atingir um nível de compreensão sobre a importância das discussões neles tratados, além de propiciar a integração com outros componentes curriculares e interdisciplinares.

Apoiando-nos nesta realidade, a ideia presente nesta pesquisa, surgiu a partir de um diálogo com uma turma de 30 alunos da 4ª etapa da Educação de Jovens e Adultos, composta por alunos do 8º e 9º anos do ensino fundamental de uma escola da rede municipal de ensino localizada na cidade de Parauapebas, no estado do Pará, cujo objetivo principal foi propor e demonstrar os resultados de uma uma experiência pedagógica referente à utilização de material concreto “Teodolito artesanal”, de modo que os sujeitos participantes da pesquisa pudessem refletir sobre esta prática, percebendo-a como uma proposta didático-pedagógica significativa que viesse a contribuir para a melhoria do ensino de Trigonometria no ensino de matemática.

Deste modo, a pesquisa se fundamenta nas orientações dos artigos da Base Nacional Curricular Comum que BNCC (2018) ao considerar que o ensino da

Geometria não deve se restringir à aplicação de equações e teoremas, mas é preciso buscar uma aprendizagem significativa, possibilitando a compreensão dos alunos a respeito do significado dos objetos matemáticos estudados (BRASIL, 2018). Diante desta necessidade, buscamos nos apoiar na Metodologia da Experimentação, por meio da construção de materiais manipuláveis com uso edicacional.

Neste sentido, destacamos os diversos benefícios do uso de materiais concretos pelos professores como um recurso metodológico alternativo nas aulas de matemática no ensino básico, de modo a tornar bastante significativo o processo de ensino e aprendizagem da matemática. Durante a aplicação do experimento foi possível perceber as potencialidades desenvolvidas pelos alunos no sentido de perceber que tal prática tem a função de desassociar suas ideias de que o conteúdo de trigonometria é puramente abstrato, de difícil compreensão e deslocada de suas realidades. Ao invés disso, como resultados da pesquisa, os alunos afirmaram que a mesma é um campo fértil de manipulação que serve para trabalhar através de situações-problemas do cotidiano.

Ao apresentarmos uma pesquisa que evidencia a interação do aluno com seu próprio aprendizado, buscamos elucidar e responder a seguinte questão de investigação: a produção e emprego do Teodolito artesanal no estudo de semelhança de triângulos e do feixe de paralelas cortadas por uma reta transversal relacionadas ao Teorema de Tales nesta turma do ensino fundamental se configura como um processo de aprendizagem significativa?

Neste viés, ao definirmos a Geometria como objeto de estudo, propomos como objetivo geral da pesquisa, investigar a importância da produção e utilização do Teodolito artesanal no estudo de semelhança de triângulos e do feixe de paralelas cortadas por uma reta transversal relacionadas ao Teorema de Tales no 9º ano do Ensino Fundamental, de modo a instigar os alunos para uma aprendizagem baseadea na investigação de fenômenos de seu cotidiano.

Para que tal finalidade fosse alcançada e diante desta necessidade, buscamos nos apoiar na Metodologia da Experimentação, por meio da construção de materiais manipuláveis abordando o método da investigação Matemática. Assim, organizamos uma ação na tentativa de satisfazer os seguintes objetivos específicos: compreender como o funcionamento e manuseio do Teodolito confeccionado em sala de aula pode contribuir no aprendizado dos conceitos de semelhança e proporcionalidade; observar o nível de desempenho dos alunos com relação aos cálculos e compreensão dos conceitos observados na comprovação do Teorema de Tales e identificar as possíveis dificuldades e potencialidades dos aluno referentes à resolução dos problemas e ao processo investigativo para a solução dos mesmos, com vista à compreensão do objeto de estudo em questão.

Com base nestes preceitos, justificamos este estudo pela possibilidade de o mesmo ser compreendido como uma estratégia na qual os processos de ensino e de aprendizagem de conteúdos curriculares de Geometria possam potencializar a compreensão dos conceitos e resolução de problemas que tratam das vivências dos alunos da EJA no Ensino Fundamental em situações cotidianas de semelhança e proporcionalidade observadas no Teorema de Tales.

Capítulo 01

A TRAJETÓRIA DA PESQUISA

1.1 Problema de Investigação

O problema de investigação desta pesquisa consiste em analisar a importância do emprego do Teodolito artesanal no estudo de semelhança de triângulos e do feixe de retas paralelas, abordados no teorema de Tales, em uma proposta de ensino direcionado a uma turma de alunos da EJA do Ensino Fundamental, intencionando como resultado, que o emprego de uma metodologia que venha auxiliar e contribuir para o avanço das pesquisas que evidenciam o processo de ensino e aprendizagem, de modo a incentivar os alunos a participarem ativamente do seu processo educacional, estimulando-os a construirem um pensamento crítico com finalidade de transformarem suas realidades.

A vivência diária na sala de aula, ministrando aulas de Matemática na educação básica, abordando diversos conteúdos curriculares, evidencia que a base que fundamenta o ensino do conteúdo abordado ainda ocorre principalmente, sob os princípios da pedagogia tradicional quando tratamos do conteúdo e da maneira como este é trabalhado em sala de aula.

Por isso a importância de uma ação dignóstica que nos permita conhecer as situações vivenciadas pelos alunos em sala de aula e no seu contexto social, para que seja possível identificar o que fundamenta suas dificuldades com relação a aprendizagem do conteúdo, o que pensam sobre as potencialidades da ferramenta Teodolito, quais caminhos devem ser trilhados para ampliar seus conhecimentos com respeito às razões trigonométricas, configuram algumas das ações dessa pesquisa.

Com base no exposto, direcionamos as investigações deste estudo para as principais relações realizadas pelo matemático Tales de Mileto ao elaborar os teoremas da semelhança de triângulos e do feixe de paralelas cortadas por uma reta transversal para o ensino e a aprendizagem do referido objeto com uso do material concreto por meio de atividades investigativas.

1.2 Pergunta da investigação

Por meio de uma pesquisa que busca evidenciar a interação do aluno com seu próprio aprendizado, buscamos elucidar e responder a seguinte questão de investigação: a produção e emprego do Teodolito artesanal no estudo de semelhança de triângulos e do feixe de paralelas cortadas por uma reta transversal relacionadas ao Teorema de Tales na turma da EJA do ensino fundamental se configura como um processo de aprendizagem significativa?

1.3 Objetivos

Na intenção de elucidar a problemática da pesquisa e buscar subsidios teóricos a partir da investigação da prática educativa lançada por este estudo, nos pautamos nos seguintes objetivos:

1.3.1 Objetivo geral

Investigar a importância da produção e utilização do Teodolito artesanal no estudo de semelhança de triângulos e do feixe de paralelas cortadas por uma reta transversal relacionadas ao Teorema de Tales nas turmas da EJAS do Ensino Fundamental.

1.3.2 Objetivos específicos:

- Compreender como o funcionamento e manuseio do Teodolito confeccionado em sala de aula pode contribuir no aprendizado dos conceitos de semelhança e proporcionalidade
- Observar o nível de desempenho dos alunos com relação aos cálculos e compreensão dos conceitos observados na comprovação do Teorema de
- Identificar as possíveis dificuldades e potencialidades dos aluno referentes à resolução dos problemas e ao processo investigativo para a solução dos mesmos, com vista à compreensão do objeto de estudo em questão.

1.4 Justificativa

O método de ensino tradicionalista aplicado na disciplina de matemática a uma grande parcela de estudantes no Brasil não contempla a possibilidade de que estes possam compreender plenamente os conceitos básicos tratados nesta importante disciplina do currículo da Educação Básica.

Tal fator pode ser ser observado como uma das causas dos baixos índices de proficiência, a falta de atratividade pelos conteúdos apresentados e consequentemente pelo considerável aumento percentual de reprovações nas escolas, visto que a Matemática tem sido sustentada a partir de representações de complexidade observada pelos métodos de ensino que estimulam a memorização e engessamento dos conteúdos. Repetindo esta rotina cotidianamente, o professor já não mais consegue se apropriar de uma prática pautada em uma visão mais decisória, crítica e engajada quando sua ação docente trata de problemas, fenômenos e questões do cotidiano (DUCK, 2004; BLUMENTHAL, 2013).

Diante de tal assertiva, Nascimento e Curi (2018) apontam que

> É importante ressaltar que nem todas as aplicações da Matemática são fáceis de serem percebidas e tão pouco aplicadas. Muitas são as reclamações acerca do modelo atual do ensino da Matemática e frisa-se bastante a questão de que a Matemática da escola é descontextualizada da utilizada na vida prática do aluno e assim, essa realidade do ensino da Matemática, torna as aulas pouco atrativas e o aluno não sente necessidade de aprender tal matéria, que para ele é desvinculada da sua vida cotidiana, justificando assim uma pesquisa sobre tal situação à busca de encontrar sugestões para a melhoria dessa situação (NASCIMENTO; CURI, 2018, p. 17).

Conforme pode ser observado, as ações e pedagogias ainda conservadoras, atualmente são incompatíveis com o cenário de mudanças expressivas no campo da educação básica, e ainda, com relação ao déficit indicativo de recursos mais inovadores como meios para viabilizar à apropriação do conhecimento, o processo de ensino em Matemática, embora ainda seja percebhoido com tímidos avanços, ainda é cercado por dificuldades pontuais quanto ao fortalecimento da aprendizagem e evolução nos níveis de resultado (NUNES; MENDES, 2016).

Na intenção de promover uma mudança de configuração nesse cenário, muitos docentes têm sido estimulados a adotar propostas que contemplem atividades práticas com uso de material concreto que promovam a ação investigativa do aluno, e que tem como consequência, o aumento da motivação do aluno com relação ao aprendizado da Matemática de mamneira inovadora e bastante produtiva. O conjunto dessas ações torna o processo mais atrativo e efetivo (SILVA et al., 2019).

Com base nestas observações, Pereira e Oliveira (2016) afirmam em seus estudos que

> É preciso frisar que a ludicidade quando bem trabalhada proporciona ao professor grande produtividade no exercício profissional desenvolvendo no aluno habilidades nunca imaginadas numa aula tradicional. Os benefícios são inúmeros principalmente no que diz respeito à interação dos alunos com o professor criando um clima afetivo na sala de aula além, é claro, de desenvolver no aluno uma maior capacidade de concentração, intuição e de criatividade frente aos desafios de jogos ou instrumentos que devem ser bem

> pensados para que estimulem todas essas habilidades (PEREIRA; OLIVEIRA, 2016, p. 22-23).

A realização de uma prática de ensino com base nesses conceitos e orientações para a compreensão ddo Teorema de Tales sobre semelhança de triângulos e do teorema de retas nos permite inferir que a ludicidade usada como pressuposto para a aprendizagem, além de trazer uma caracteríastica mais prática para o processo de ensino e aprendizagem, pode ainda contribuir para uma maior assimilação dos conteúdos por parte dos alunos, visto que quando o aluno participa do processo de maneira ativa, sua percepção sobre as situações e sua assimilação dos conteúdos ficam mais evidentes (SILVA et al., 2013).

Frente a essa problemática e baseados nas diversas teorias de ensino e em nossa atuação docente enquanto professores que refletem sobre nossa própria prática, apontamos como maneira de estimular a compreensão dos alunos com relação aos conteúdos matemáticos, a utilização de materiais concretos nas atividades curriculares propostas em sala de aula.

Reforçamos esta afirmação por meio de diversos estudos que mostram a importância do uso de material concreto em todos os níveis de ensino, como apontam Fiorentini e Miorim (2010) e Pestalozzi (1746-1827) que basevam suas ações pedagógicas na crença de que uma educação seria considerada genuinamente educativa se a sua ação pedagógica enfatizasse as atividades realizadas pelos alunos, como, por exemplo, a manipulação de objetos concretos.

Assim, a aplicação desta pesquisa que envolve a confecção e uso do Teodolito em atividades práticas investigativas, se justica pela possibilidade de ser compreendida como uma estratégia onde os processos de ensino e de aprendizagem de conteúdos curriculares de matemática possam potencializar a compreensão dos conceitos e resolução de problemas que tratam das vivências dos alunos da EJA do Ensino Fundamental em situações cotidianas de semelhança e proporcionalidade observadas no Teorema de Tales.

1.5 Percurso Metodológico

Conforme apontado por Fiorentini e Miorim (2012), a aprendizagem matemática desde o início do século XVI, não se apresenta de forma significativa para os alunos, sendo desde então considerada de forma passiva, efetivada por meio de mecanismos como a memorizações de regras, equações e conceitos não conectados com a realidade. Nesse modelo educacional, era comum os professores adotarem uma postura mais tecnicista, assumindo um papel de meros transmissores e expositores de conhecimento.

Nesta época, o uso de materiais concretos em sala de aula, também ocorria de forma muito isolada, de modo que os poucos professores que usavam este método, o faziam de forma pouco didática e de maneira puramente demonstrativa, cuja finalidade era apenas auxiliar a exposição, a visualização e a memorização dos conteúdos propostos aos alunos.

Com o avançar do tempo, já no século XVIII, algumas mudanças passaram a ser consideradas, de modo que a educação passou a ser vista como parte importante do processo natural do desenvolvimento das crianças. Com isso, Fiorentini e Miorim (2009) destacam em seus estudos, o surgimento de uma nova compreensão de educação, que surge conjuntamente com as propostas de Pestalozzi, educador que desenvolveu um processo instrucional que evidenciava os aspectos educativos em sala de aula, colocando o aluno no centro do processo educacional.

Na concepção de Pestalozzi, as atividades voltadas para o aprendizado do aluno, deveriam envolver as artes em geral, desenho, jogos, modelagem, excursões ao ar livre, manipulação de objetos concretos e tarefas em que os alunos deveriam realizar de modo que as descrições precedessem as definições. Deste modo, o conceito matemático seria adquirido por meio de uma experiência direta sobre as operações (CASTELNUOVO *apud* FIORENTINI; MIORIM, 2007).

Diante disso, uma das alternativas para mudar esse cenário é a inovação do processo educacional por meio da inserção de novos recursos didáticos para uso nas aulas de Matemática, na intenção de aguçar o desejo dos alunos para que sintam-se motivados a participar de forma cada vez mais ativa na sua própria aprendizagem, assim como contribuir para a melhoria substancial do processo de ensino de conteúdos do currículo de matemáticos, que até então eram trabalhados apenas no campo das ideias. Com isso, o grande ganho para todo o processo, é justamente o resgate do interesse dos alunos e com objeto de estudo.

De acordo com Cerqueira e Ferreira (2007) os recursos didáticos:

> [...] são todos os recursos físicos, utilizados com maior ou menor frequência em todas as disciplinas, áreas de estudo ou atividades, sejam quais forem as técnicas ou métodos empregados, visando auxiliar o educando a realizar sua

> aprendizagem mais eficientemente, constituindo-se num meio para facilitar, incentivar ou possibilitar o processo ensino-aprendizagem. (CERQUEIRA E FERREIRA, 2007, p. 01).

Por meio dos recursos didáticos, é possivel trabalhar de forma mais significativa com atividades onde os alunos podem se perceber dentro do contexto de ensino e assim, nos apoiamos nas ideias de Dantas e Manoel (2015), ao afirmarem que as atividades experimentais quando subsidiadas pela utilização de materiais concretos, apresentam um gramnde potencial de auxiliar os alunos a transformarem o conhecimento declarativo em processual. Tal ação denomina-se como sendo o processo de procedimentalização.

Na busca de superar um ensino da Matemática baseado na memorização de fórmulas e ações automatizadas os recursos didáticos se apresentam como excelentes mediadores na construção do conhecimento matemático. Assim, quando são utilizados recursos didáticos para o procedimento de atividades práticas que possibilitam ao estudante usar novos processos de raciocínio, relacionar conteúdos aprendidos e, dessa forma, adquirir uma aprendizagem mais significativa.

De acordo com Nacarato (2004, p.09),

> O professor precisa ter clareza dos objetivos pelos quais os materiais concretos são importantes para o ensino-aprendizagem da Matemática e em que momento deve ser utilizado. Subjacente ao material é preciso que haja uma proposta pedagógica, pois o uso pelo o uso, do material concreto, provavelmente não levará à aprendizagem significativa.

Nesta mesma linha de pensamento, (CURY, 2007; ALMEIDA; VIEIRA 2011, p.62) afirmam que “os professores devem promover a educação participativa. Os alunos devem ser estimulados de todas as maneiras a deixarem de espectadores passivos que se sentam em suas carteiras e ouvem inertes a transmissão do conhecimento”. Esse tipo de passividade impossibilita a criatividade, a liberdade e o espírito empreendedor.

Discutindo sobre tal temática, (ALMEIDA; VIEIRA, 2013, p.08) discutem que

> Os resultados de experimentação apontam que o ensino da Trigonometria do triângulo é gerador de motivações, incluindo atividades diversificadas, com situações problematizadas, que estimule o pensar, a investigação e a realizar, contribuindo para que os alunos construam o significado das razões trigonométricas, além de favorecer a argumentação e modificar várias concepções errôneas.

De acordo com (GONÇALVES, D.O, RAMOS, A.C, ET.AL, 2017).

> Um exemplo da utilização do Teodolito em problemas do cotidiano foi um estudo com título ‘’Material Manipulável ou Instrumento: O que realmente está

> sendo utilizado no ensino da Geometria Analítica Plana'', que foi realizado com dois grupos de professores de Matemática de escola Estadual e da rede Particular, um deles da cidade de Poço Fundo-MG e outro grupo composto por professores supervisores das escolas parceiras PIBID da área de Matemática. Foi realizado um questionário com propósito de investigar se os professores utilizam ou não materiais manipuláveis para o ensino da Geometria Plana. Através da análise dos dados, observou-se que em ambos os grupos havia a falta de conhecimento a respeito dos materiais manipuláveis.

Com isso, percebemos por meio da citação acima, que os alunos se familiarizaram bem com a atividade proposta e que a manipulação da atividade utilizando o instrumento Teodolito, tanto na construção como em sua utilização na prática, facilitou o entendimento do conteúdo aplicado, haja vista que os alunos conseguiram no fim da atividade encontrar através da razão trigonométrica, as medidas desejadas, registrando os resultados em seus diários de bordo.

Capítulo 2

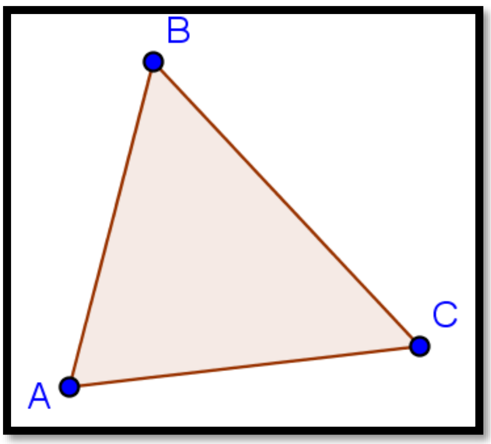
DISCUSSÕES INICIAIS SOBRE O CONHECIMENTO DA GEOMETRIA

Neste capítulo serão apresentados e discutidos conceitos básicos de Geometria considerados como essenciais para a compreensão dos tópicos de Trigonometria que servem de base curricular para a educação básica. Deste modo, elencamos o estudo dos triângulos como argumento para os conceitos de congruência e semelhança, o Teorema Fundamental da Semelhança de triângulos com suas devidas aplicações, o Teorema de Tales, além do Teorema de Pitágoras, culminando com uma aplicação de um problema prático com uso do Teodolito artesanal aplicado a uma situação-problema de semelhança de triângulos.

2.1 Triângulos

Os triângulos são considerados figuras geométricas planas constituídas por segmentos de retas que concorrem duas a duas, sendo dispostas em três pontos diferentes, que compõem três lados e três ângulos internos. Deste modo, a figura 1 destaca os seguintes elementos de um triângulo: Δ ABC, os pontos A , B e C denominados vértices do triângulo, os segmentos AB , BC e AC, denominados lados do triângulo e $\hat{A}$, $\hat{B}\hat{C}$ que são os ângulos do triângulo.

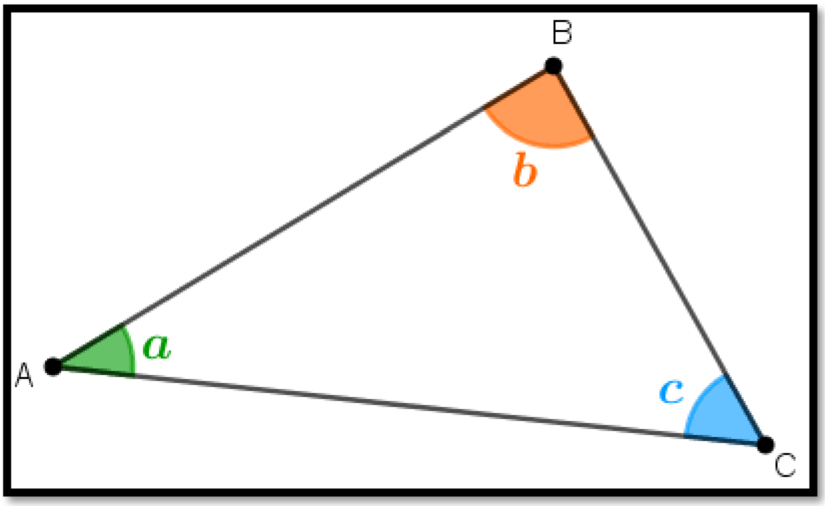
Figura 01 – elementos de um triângulo



Fonte: organização da autora/2022

Ao conhecermos seus principais elementos, demonstraremos uma de suas propriedades, onde em um triângulo qualquer, a soma de seus ângulos internos é igual a 180°. De fato, considerando o triângulo ∆ ABC e a reta r, paralela ao segmento AB, passando pelo ponto C, conforme a figura 2:

Figura 2 - Demonstração da soma dos ângulosinternos de um triângulo qualquer



Fonte: organização da autora/2022.

Da imagerm, podemos observar que em decorrência dos ângulos serem alternos e internos, então a = ^A, b = ^B e C = ^C. Deste modo, teremos que

a+ b + c = ^A + ^B + ^C = 180º

Deste modo, fica demonstrado que em um triângulo qualquer, a soma dos seus ângulos internos mede 180º.

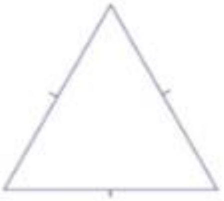
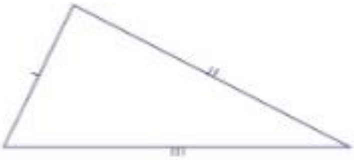
2.2 Classificação dos triângulos

Com base no estudo de trigonometria, podemos inferir que os triângulos podem ser classificados pelas medidas dos seus lados ou até mesmo pela medida dos ângulos internos, de modo que:

2.2.1 Classificação dos triângulos quanto aos lados

De acordo com a medida dos lados de um triângulo, estes podem ser classificados em isósceles, equilátero ou escaleno, conforme podemos observar no quadro 01 a seguir:

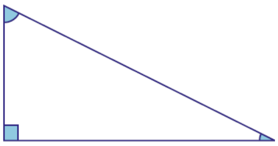
Quadro 01 – Classificação dos triângulos quanto à medida dos lados

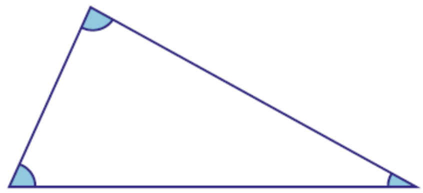
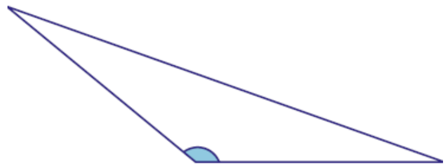
Triângulo isósceles		Possui os seus dois lados com o comprimento de mesma medida
Triângulo equilátero		Possui seus três lados com o comprimento de mesma medida
Triângulo escaleno		Possui seus três lados com comprimentos de medidas diferentes

Fonte: organização da autora/2022

2.2.2 Classificação dos triângulos quanto aos ângulos

Quadro 02 – Classificação dos triângulos quanto à medida dos ângulos

Triângulo retângulo		Um dos seus ângulos é um ângulo reto (possui 90º)

Triângulo acutângulo		Possui os três ângulos internos agudos;
Triângulo obtusângulo		Um dos seus ângulos é um ângulo obtuso (possui mais que 90º)

Fonte: organização da autora/2022

Ao tratarmos da construção de um triângulo, observamos que este não pode ser construído com medidas quaisquer. Neste sentido, devemos obedecer a um critério denominado de condição de existência de um triângulo:

“Em um triângulo, a medida de qualquer um dos lados deve ter uma medida menor que a soma dos outros dois lados e o valor absoluto da diferença das medidas dos dois lados deve ser menor que a medida do outro lado”, ou seja, ao considerarmos *a, b e c* lados de um triângulo qualquer, podemos escrever:

$$|a-b| < c < a+b$$

$$|c-b| < a < c+b$$

$$|a-c| < b < a+c$$

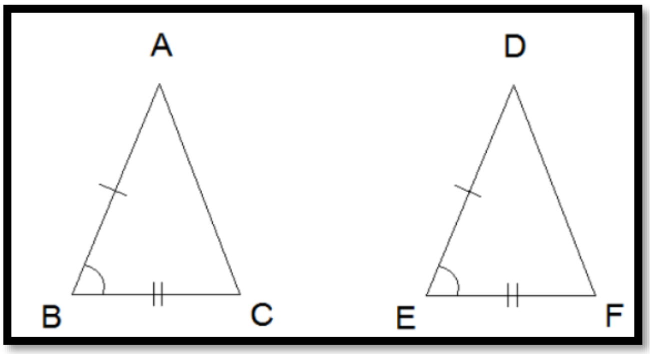
2.3 Congruência de triângulos

Dois triângulos são considerados como congruentes se ambos possuem os três lados e os três ângulos correspondentes iguais. Para melhor ilustrar essa assertiva, vamos aceitar como verdasdeiro, o fato de que o Δ ABC e o Δ DEF são congruentes e analisar os seguintes casos de congruência:

2.3.1 - 1° caso: LAL (lado, ângulo, lado).

Se dois triângulos possuem dois lados congruentes e o ângulo formado por esses dois lados também são congruentes, então eles são congruentes (Figura 3).

Figura 3 - Congruência de triângulos *LAL*



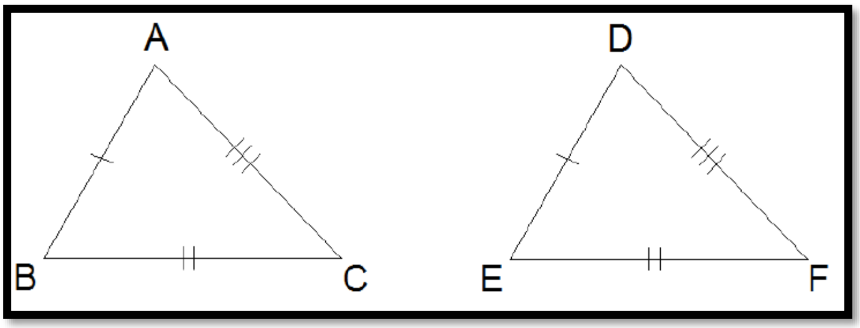
Fonte: organização da autora/2022

Se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, então $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

2.3.2 - 2° caso: *LLL* (lado, lado, lado).

Se dois triângulos possuem os três lados congruentes, então eles são congruentes (Figura 4).

Figura 4 - Congruência de triângulos *LLL*



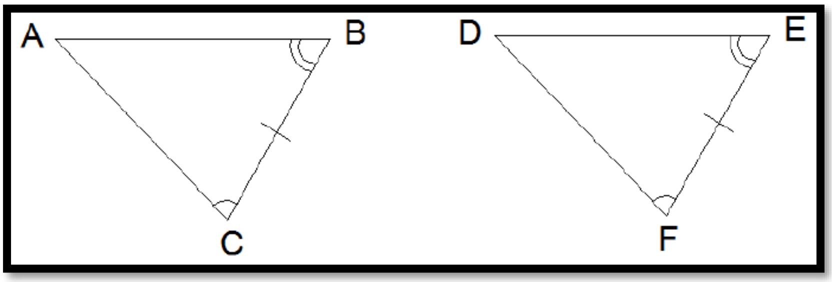
Fonte: organização da autora/2022

Se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, então $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

2.3.3 - 3° caso: *ALA* (ângulo, lado, ângulo).

Se dois triângulos possuem, ordenadamente, dois ângulos e o lado compreendido entre esses ângulos congruentes, então eles são congruentes. (Figura 5).

Figura 5 - Congruência de triângulos *ALA.*



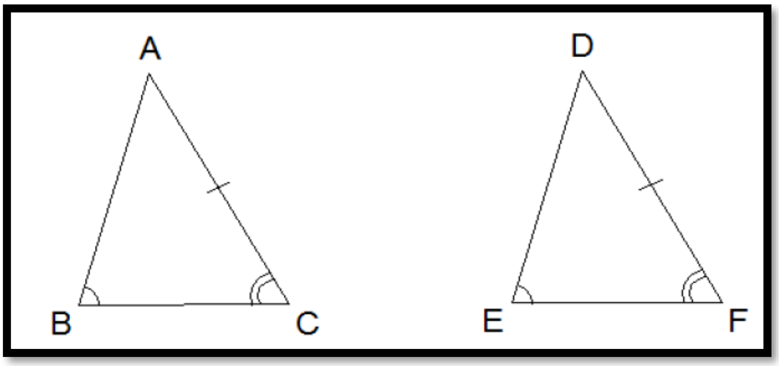
Fonte: organização da autora/2022

Se $\hat{C} \cong \hat{F}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\hat{B} \cong \hat{E}$, então $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

2.3.4 - 4° caso: LAAo (lado, ângulo, ângulo oposto).

Se dois triângulos possuem, ordenadamente, um lado, um ângulo e o ângulo oposto a esse lado, congruentes, então eles são congruentes (figura 6).

Figura 6 - Congruência de triângulos LAAo



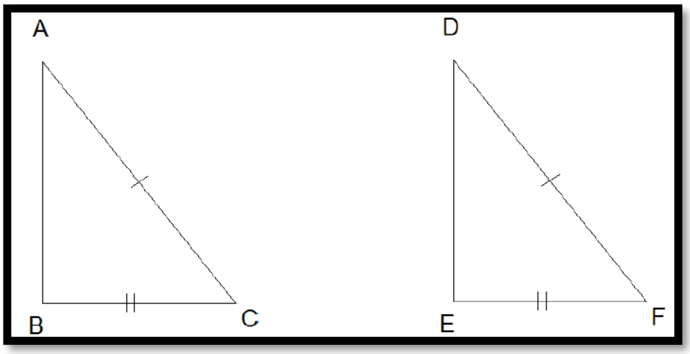
Fonte: organização da autora/2022

Se $\hat{B} \cong \hat{E}$, $\hat{C} \cong \hat{F}$ e $AC \cong DF$, então $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

2.3.5 - 5° caso: caso especial de congruência no triângulo retângulo.

Se dois triângulos retângulos possuem um cateto e a hipotenusa congruentes, nessa ordem, então eles são congruentes (Figura 7).

Figura 7 - Caso especial de congruência de triângulos.



Fonte: organização da autora/2022

$$\text{Se } \hat{B} \cong \hat{E} = 90^\circ,\ BC \cong EF \text{ e } AC \cong DF \text{, então } \Delta ABC \cong \Delta DEF.$$

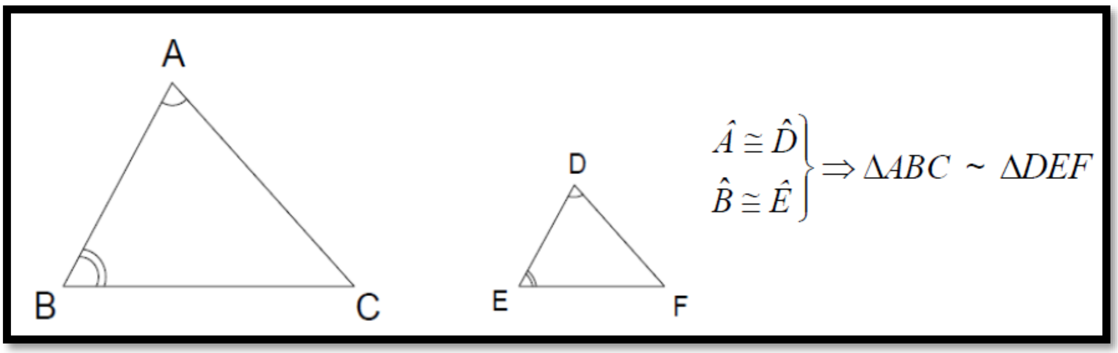
2.4 - Semelhança de triângulos

Dois triângulos são considerados semelhantes se, e somente se, ambos possuem ângulos correspondentes iguais e seus lados respectivos são homólogos proporcionais. Deste modo, a razão entre os lados correspondentes possui um valor constante de proporcionalidade. Para demonstrarmos este padrão de proporcionalidade, tomaremos como base o triângulo Δ ABC e o Δ DEF, indicando que os mesmos sejam semelhantes. Diante do exposto, apresentamos os casos de congruência a seguir:

2.4.1 - 1° caso: Critério *AA* (Ângulo, Ângulo).

Se dois triângulos possuem ângulos correspondentes congruentes, então eles são semelhantes (Figura 8).

Figura 8 - Semelhança de triângulos *AA*

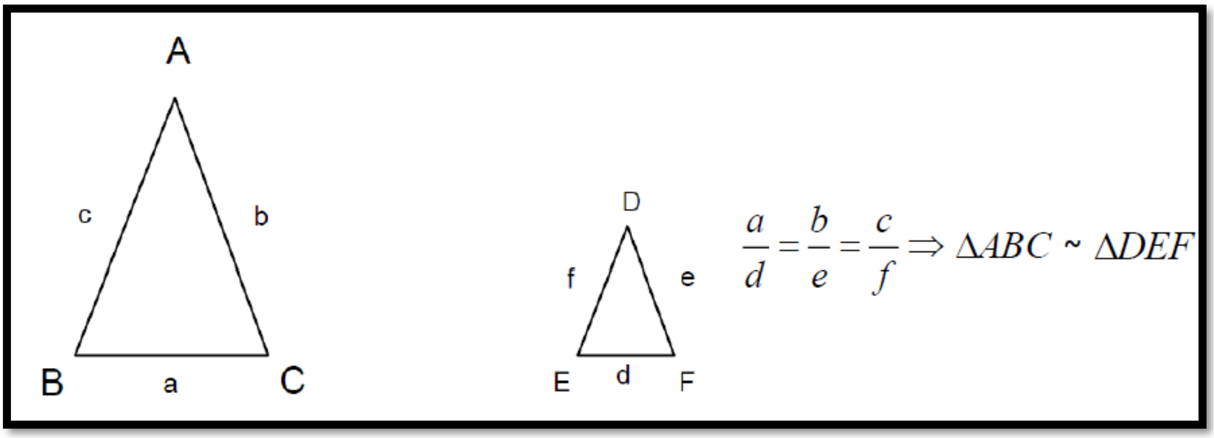


Fonte: organização da autora/2022

2.4.2 - 2° caso: Critério *LLL* (Lado, Lado, Lado).

Se dois triângulos possuem seus lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes (Figura 9).

Figura 9 - Semelhança de triângulos *LLL*

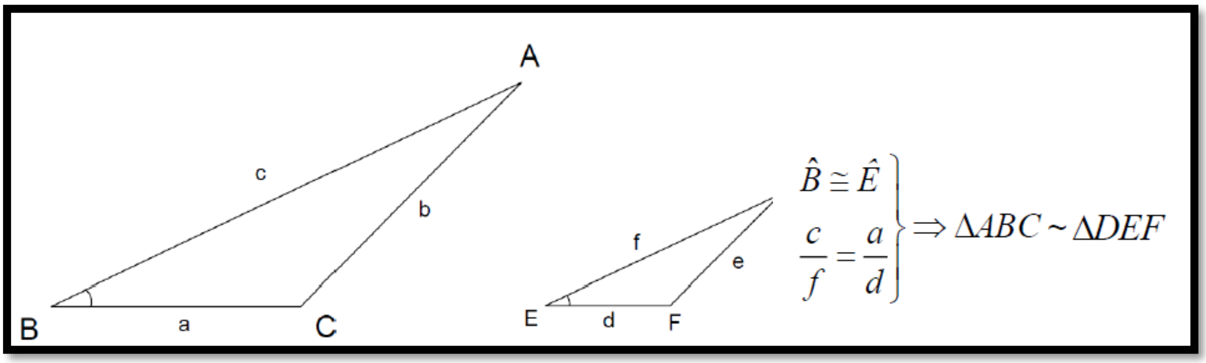


Fonte: organização da autora/2022

2.4.3 - 3° caso: Critério *LAL* (Lado, Ângulo, Lado).

Se dois triângulos possuem um ângulo congruente compreendido entre lados proporcionais, então eles são semelhantes (Figura 10).

Figura 10 - Semelhança de triângulos *LAL.*

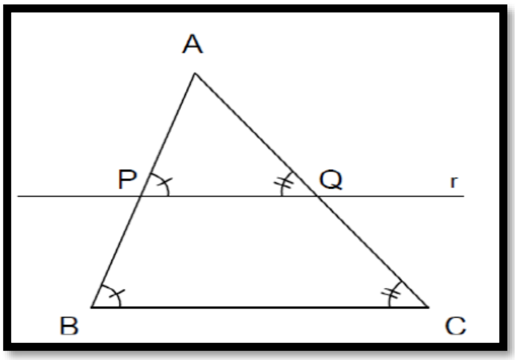


Fonte: organização da autora/2022

2.5 Teorema Fundamental da Semelhança

Toda reta paralela a um lado de um triângulo que intersecta os outros dois lados em pontos distintos, determina outro triângulo semelhante ao primeiro (Figura 11).

Figura 11 - Teorema Fundamental da Semelhança

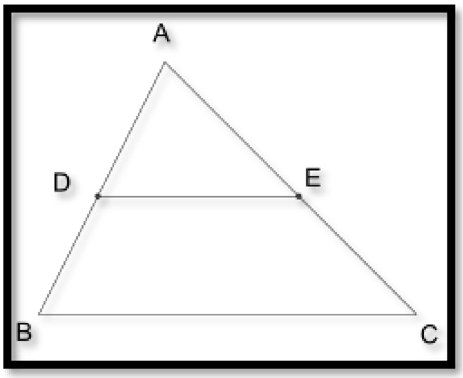


Fonte: organização da autora/2022

Observamos que a reta r intersecta o triângulo Δ ABC, formando o triângulo Δ APQ e trapézio PQCBP, de modo que o triângulo Δ ABC seja semelhante ao triângulo Δ APQ, confirmando o enunciado do teorema. Para a comprovação do teorema, utilizaremos a aplicação a seguir:

Aplicação:

No triângulo ABC, o segmento DE é paralelo ao lado BC. Sabe-se também que AB = 8 cm, AC = 10 cm e AD = 2 cm. Determine o comprimento dos segmentos AE e EC.



Como o segmento DE é paralelo ao lado BC do triângulo ABC, pelo teorema fundamental da semelhança de triângulos, temos que os triângulos ABC e ADE são semelhantes, logo seus lados, de modo ordenado, são proporcionais, então:

AB /AD= AC / AE

8/2 = 10/AE

8. AE = 10 . 2

8. AE = 20

AE = 20/8

AE = 2,5 cm

Observamos também que o lado AC é dado pela soma AE + EC. Substituindo os valores de cada lado, temos:

AC = AE + EC

10 = 2,5 + EC

10 – 2,5 = EC

EC = 7,5 cm

Portanto, AE = 2,5 cm e EC = 7,5 cm.

Diante dos cálculos expostos, é possivel observar a relação de sermelhança de modo que

$$AD / DB = AE / EC \rightarrow 2 / 6 = 2{,}5 / 7{,}5$$

Deste modo, concluimos os segmentos AD e DB possuem relação proporcional com os segmentos AE e EC, Ficando estabelecido que a medida AD aumenta de 2 cm para 2,5 cm, enquanto que a medida DB varia de 6 cm para 7,5 cm. Realizando os cálculos necessários, vemos que entre essas medidas, fica estabelecida uma razão de 0,8 entre cada um dos pares de segmento.

Ou seja: 2 / 2,5 = 0,8 e 6 / 7,5 = 0,8. Ficando assim, comprovada a semelhança entre os triângulos.

2.6 A BNCC[1] e suas orientações para o ensino de Geometria

[1] A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que regulamenta quais são as aprendizagens essenciais a serem trabalhadas nas escolas brasileiras públicas e particulares de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio para garantir o direito à aprendizagem e o desenvolvimento pleno de todos os estudantes. Por isso, é um documento importante para a promoção da igualdade no sistema educacional, colaborando para a formação integral e para a construção de uma sociedade mais justa, democrática e inclusiva.

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC se constitui em um documento normativo de referência nacional que buscou reformular o curriculo dos sistemas e redes de ensino do país em sua totalidade, definindo o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens consideradas essenciais às etapas e modalidades da educação básica, com finalidade de garantir o direito à aprendizagem e ao desenvolvimento dos alunos ao longo do período de escolarização (BRASIL, 2018).

Com relação às discussões pertinentes à Matemática, o referido documento orienta que as aulas desta àrea de conhecimento não devem se restringir apenas à quantificação de fenômenos determinísticos, tampouco à técnicas de cálculo que envolvem números e grandezas, devendo além disso, analisar os fenômenos de caráter aleatórios e os processos abstratos que se relacionam e tratam de fenômenos do mundo físico ou não. Com isso, evidencia o conhecimento matemático como recurso potencializador da formação cidadã.

Sustentando tal afirmação, a BNCC orienta que

> A Matemática assume um papel fundamental para o pleno acesso dos sujeitos à cidadania. Em uma sociedade cada vez mais baseada no desenvolvimento tecnológico, os conhecimentos matemáticos tornam-se imprescindíveis para as diversas ações humanas, das mais simples às mais complexas, tais como compreensão de dados em gráficos, realização de estimativas e percepção do espaço que nos cerca, dentre outras (BRASIL, 2018 p. 116).

Neste sentido, percebemos que os processos matemáticos que tratam de aspectos como a resolução de problemas, os processos de investigação, o planejamento e execução de projetos e da modelagem “podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental” e reiteramos que vai para além disso, compondo a formação para o mundo (BRASIL, 2018, p. 266).

O infogáfico 01 a seguir contempla algumas impressões sobre o conteúdo curricular de Geometria para o ensino fundamental a partir da ótica da BNCC.

Ao ter como objetivo nortear os currículos dos estados e municípios de todo o Brasil a partir dessas perspectivas, a BNCC coloca em curso o que está previsto no artigo nove da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) sancionada em 1996.

Segundo a LDB, cabe ao Governo Federal “estabelecer, em colaboração com os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, competências e diretrizes para a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio, que nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum”.

Infográfico 01 – Observações da Geometria segundo a BNCC

A Geometria segundo a BNCC

- A Geometria é um ramo da matemática que trata do estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos que competem para a resolução de problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento.
- O pensamento geométrico possui como principais finalidades, a investigação de propriedades, a projeção de conjecturas e a produção de argumentos geométricos convincentes.
- As principais ideias matemáticas que podem ser relacionadas ao campo de geometria são, principalmente, construção, representação e interdependência.
- Em função de sua utilidade prática, a Geometria não deve ser entendida à aplicação de equações e cálculo de área e de volume. Tampouco à aplicações numéricas imediatas de teoremas que versam sobre proporcionalidade, feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras.

Fonte: organização da autora/2022

Conforme pode ser observado no infográfico 01 acima, as discussões tratadas pela BNCC fazem referência aos conteúdos curriculares do eixo de Geometria observados nos 4 períodos do ensino fundamental, contemplando o 6º, 7º, 8º e 9º anos. Neste sentido, apresentaremos os quadros abaixo demonstrando esta organização.

Quadro 03 – Orientações da BNCC – Unidade temática Geometria – 6º ano

Objeto Matemático	Proposta da Unidade	Habilidade(s) - BNCC	Justificativa
Prismas e pirâmides **Código EF06MA17**	Identificação e utilização de propriedades de faces, vértices e arestas de prismas e pirâmides (relação com polígono da base; representação de prismas e pirâmides;	Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.	Além da importância do trabalho com esta unidade no primeiro semestre, alguns planos podem trazer interessantes atividades para os alunos fazerem em casa, sem orientação do professor. Este deve ser

	descrição da figura por escrito)		um critério de escolha dos planos.
Polígonos **Códigos EF06MA18 EF06MA19 EF06MA20**	Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados	Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros. Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos. Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.	O trabalho com esta unidade deve estar articulado com a unidade Figuras Semelhantes. É preciso levar em conta esse critério para fazer a seleção dos planos dessas duas unidades.
Figuras semelhantes **Código EF06MA21**	Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas	Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.	O trabalho de ampliação e redução de figuras planas deve estar articulado ao trabalho com polígonos, da unidade Polígonos. Este deve ser o critério de escolha dos planos. Devem-se levar em conta, ainda, as possibilidades de realização das atividades escolhidas, uma vez que os alunos estarão em casa, muitas vezes sem condições fazer a impressão da atividade.

Fonte: Organização da autora/2022. Adaptado da Revista Nova Escola

Quadro 04 – Orientações da BNCC – Unidade temática Geometria – 7º ano

Objeto Matemático	Proposta da Unidade	Habilidade(s) - BNCC	Justificativa
Ângulos formados por retas paralelas e ransversais **Código EF07MA23**	Investigação das relações entre ângulos formados por retas paralelas e transversais	Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica.	As habilidades desenvolvidas nesta unidade são fundamentais para o desenvolimento do trabalho com a unidade Triângulos e suas propriedades. Os planos dessas duas unidades devem ser escolhidos de modo que se articulem e complementem, possibilitando aos alunos desenvolverem as atividades sem a orientação do professor.
Triângulos e suas propriedades **Código EF07MA24 EF07MA25**	Investigação das relações entre ângulos formados por retas paralelas e transversais	Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados,	Esta unidade pode conter atividades que envolvem situações do cotidiano dos alunos. Escolher os planos que possuem essa caracterítica. Para a realização de algumas atividades da unidade Ângulos internos e externos de polígonos é necessário o trabalho com a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

		estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas.	É importante fazer a escolha dos planos articulando essas duas unidades.
Ângulos internos e externos de polígonos **Código EF07MA27**	Análise de ângulos internos e externos de polígonos	Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.	A realização das atividades propostas nesta unidade depende das habilidades trabalhadas na unidade Triângulos e suas propriedades. É necessário escolher os planos de acordo com essa articulação. Indico aqueles que envolvem a soma das medidas dos ângulos intenos de um triângulo, que devem ser priorizados na unidade Triângulos e suas propriedades.

Fonte: Organização da autora/2022. Adaptado da Revista Nova Escola

Quadro 05 – Orientações da BNCC – Unidade temática Geometria – 8º ano

Objeto Matemático	Proposta da Unidade	Habilidade(s) - BNCC	Justificativa

Propriedades dos quadriláteros **Código EF08MA14**	Propriedades de quadriláteros	Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.	Parte dos planos desta unidade (as que envolvem emonstrações) está relacionada à congruência de triângulos, que não será trabalhada neste momento pois exige maior orientação do professor. Devem ser selecionados apenas os planos cujas atividades se referem à classificação dos quadriláetros.

Fonte: Organização da autora/2022. Adaptado da Revista Nova Escola

Quadro 06 – Orientações da BNCC – Unidade temática Geometria – 9º ano

Objeto Matemático	Proposta da Unidade	Habilidade(s) - BNCC	Justificativa
Vistas ortogonais de figuras não planas **Código EF09MA17**	Vistas ortogonais de figuras não planas	Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.	O trabalho com os planos desta unidade pode despertar de modo particular o interesse dos alunos, pois envolvem desenho de figuras não planas. Sugiro analisar a possibilidade de selecionar todos.

Fluxogramas para a construção de polígonos **Código** **EF09MA15**	Elaboração de Fluxogramas para a construção de polígonos	Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.	Os alunos devem escolher um tema, uma questão de pesquisa, coletar os dados e apresentar os resultados por meio de gráficos e tabelas. Podem também escrever textos comunicando os resultados.

Fonte: Organização da autora/2022. Adaptado da Revista Nova Escola

Elencamos como objetos de conhecimentos matemáticos que compõe a prática investigativa desta pesquisa, os conteúdos de feixe de paralelas e semelhança de triângulos, ambos analisados a partir da perspectiva do Teorema de Tales. Neste sentido, o quadro 08 a seguir trata especificamente destes tópicos de acordo com as orientações da Base Nacional Curricular Comum – BNCC (2018).

Quadro 07 – Orientações da BNCC – Semelhança de triângulos e Teorema de Tales

SEMELHANÇA	
Objetos de conhecimento	Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
	Relações métricas no triângulo retângulo.
	Semelhança de triângulos.
	Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais.
	Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração.
Objetivos específicos	Utilizar o teorema de Tales para determinar a medida de um segmento de reta.
	Verificar e compreender o teorema de Tales.
	Calcular a razão entre dois segmentos de reta.

	Reconhecer triângulos semelhantes.
	Reconhecer figuras e polígonos semelhantes.
	Compreender as propriedades dos ângulos opostos pelo vértice e ângulos formados por um feixe de retas paralelas e uma transversal.
Habilidades	EF09MA10: Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
	EF09MA12: Reconhecer as condições necessárias e suficientes para para que dois triângulos sejam semelhantes.
	EF09MA14: Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
Competências	Competência específica de Matemática 4: Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
	Competência geral 9: Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

Fonte: Organização da autora/2022. Adaptado da Revista Nova Escola

As orientações tradadas pela BNCC no quadro 08 foram planejadas com o intuito de que o processo de organização da aprendizagem matemática e do ensino apresentem resultados satisfatórios, de modo que fatores como a gestão do tempo e do espaço e a organização dos alunos sejam reconhecidos como elementos quer possam contribuir para o alcance dos objetivos planejados.

> O desenvolvimento dessas habilidades está intrinsecamente relacionado a algumas formas de organização da aprendizagem matemática, com base na análise de situações da vida cotidiana, de outras áreas do conhecimento e da própria Matemática. Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser

> citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional. (BRASIL, 2018).

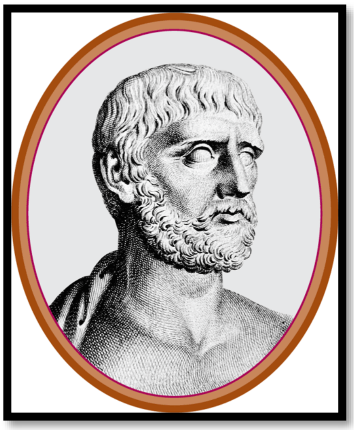
Quanto às sugestões de ações didático-pedagógicas que podem ser aplicadas como avaliação das aprendizagens discutidas em cada objeto de conhecimento matemático, consideramos que estas podem Contribuir de forma significativa para o sucesso dessas práticas, podendo permitir com que o professor venha a concluir tudo o que por ele foi planejado e ainda orientar os alunos acerca de algum ajuste com relação à execução das atividades, no sentido der que estes desenvolvam suas Aprendizagens.

Capítulo 3

OS TEOREMAS DE TALES E SUAS CONTRIBUIÇÕES PARA O ESTUDO DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Considerado o pai da Geometria, Tales de Mileto, de acordo com Almeida (2006), pertenceu à era pré-socrática, e possuia descendencia originária de fenícios, que apresentou um gramnde destaque nas áreas de Filosofia, astrônomomia e matemática. Tem seu nascimento datado entre os período de 624 a.C. a 558 a.C. Em seus estudos fez uso dos diversos conhecimentos adquiridos ao longo de anos de pesquisa, abordando Geometria e proporcionalidade, objetivando resolver de forma prática, a altura de uma dada pirâmide.

Figura 12 – Tales de Mileto



Fonte: Boyer (2012)

Bezerra (2019) destaca que o matemático tinha grande prazer em realizar viagens cuja intenção era a de aprimorar e disseminar seus conhecimentos adquiridos e foi justamente nessa rotina, na rota entre o antigo Egito e Babilônia que ele teve uma aguçada percepção de que os raios solares chegavam à terra de modo inclinados e paralelos, concluindo deste modo que tal fenômeno apresentava uma relação diretamente proporcional entre as medidas da sombra e da altura dos objetos.

Conforme descrito por Huisman (2001), Eves (2004), Chaves e Rodrigues (2014) e Roque (2012), o mais famoso Teorema de Tales teria se fundamentado na ocasião em que o referido matemático recebe uma solicitação diretamente dos escribas do faraó no Egito Antigo, para calcular a altura da Pirâmide de Quéops, uma das mais conhecidas do Egito antigo, ainda quando vivia na região. De acordo com Silva (2019), Tales, apoiado em suas próprias observações, registros e técnicas, conseguiu realizar a tarefa solicitada, usando como base, a sombra da própria pirâmide.

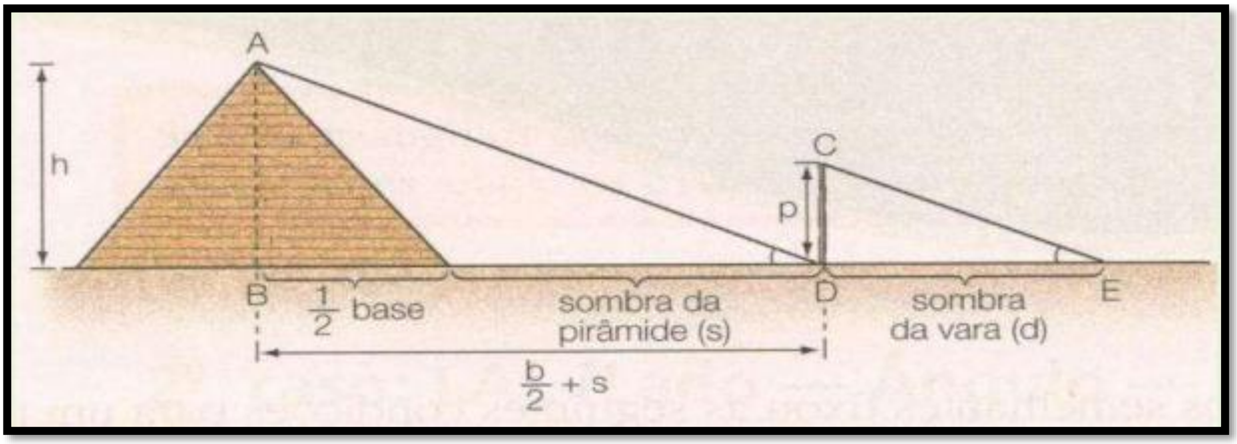
Segundo Eves (2004), existem duas versões mais aceitas como explicação de como Tales calculou a altura de uma pirâmide egípcia por meio da sombra.

> O relato mais antigo, dado por Hierônimos, um discípulo de Aristóteles, diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual à altura da pirâmide que a projetava. A versão posterior, dada por Plutarco, diz que ele fincou verticalmente uma vara e fez o uso da semelhança de triângulos. Ambas as versões pecam ao não mencionar a dificuldade de obter, nos dois casos, o comprimento da sombra da pirâmide – isto é, a distância da extremidade da sombra ao centro da base da pirâmide (EVES, 2004, p. 115).

Por meio de uma análise crítica das duas situações mencionadas, podemos concluir que as mesmas, de certa forma, podem fornecer dúvidas com relação ao feito, visto que na primeira delas, Tales teria medido a altura da pirâmide, usando como parâmetro, apenas a observação de sua sombra, comparando-a com a sombra da pirâmide. Porém, a maneira como isso foi realizado, onde o matemático usou apenas essas variáveis, poderia trazer alguns problemas com relação à exatidão dos resultados, ocasionados por erros nas medidas, visto que teria de levar em consideração também outros aspectos como sua posição, o horário do dia, a época do ano, a latitude, dentre outros fatores que não foram mencionados na descrição.

No procedimento mostrado a segiuir, Tales fincou uma estaca na areia, mediu respectivamerntre as sombras da pirâmide e da estaca em uma determinada hora do dia, de modo que conseguiu registrar uma razão proporcional entre essas duas grandezas, conforme podemos observar na Figura 13:

Figura 13 - Representação da medição da altura da Pirâmide por Tales segundo



Plutarco

Fonte: Iezzi; Dolce; Machado, 2009, p.117

Uma das garantias que contribuiram para a solução do problema da altura da pirâmide foi o fato de que Tales possuia uma refinada compreensão a respeito do Universo. A construção da Pirâmide Quéops se deu de forma que uma de suas faces fosse voltada para o sul, permitindo que sua sombra fosse perpendicular no momento que o Sol estivesse no ponto mais alto da pirâmide, ao meio dia (SANTOS, 2010).

Um fato histórico que se perdeu ao longo do tempo, sendo relacionado à geometria desse período foi documentado por Eudemo, aluno de Aristóteles. Tal relato, muito conhecido por Proclo, historiador e filósofo neoplatônico (410 - 485), contém uma deiversidade de anotações acerca de suas observações em diversas áreas do conhecimento, que mais tarde compõe o que conhecemos como o primeiro livro de Euclides, conforme tratado por Boyer (2012):

> Primeiro foi ao Egito e de lá introduziu esse estudo na Grécia. Descobriu muitas proposições ele próprio, e instruiu seus sucessores nos princípios que regem muitas outras, seu método de ataque sendo em certos casos mais geral, em outros mais empírico (BOYER, 2012).

Tales foi um dos principais responsáveis pela fundação da escola jônica e em consequência disso, é considerado como o precursor dos estudos de geometria na Grécia, tendo absorvido um vasto conhecimento sobre geomettria, de modo que ao longo do tempo, teve a oportunidade de aprimorar seus estudos por meio da lógica dedutiva e as demonstrações. Um conjunto de teoremas considerados de grande importância histórica é atribuido a ele, dentre os quais podemos destacar:

a) “Um ponto da circunferência forma com os extremos do diâmetro da mesma, segmentos perpendiculares”

b) “A hipotenusa de um triângulo retângulo é também o diâmetro da circunferência que circunscreve esse triângulo”

c) “Um círculo é dividido em duas partes iguais por seu diâmetro”

d) “Um feixe de retas paralelas determina em retas transversais segmentos proporcionais”

e) “Se dois triângulos possuem, respectivamente, um lado e dois ângulos adjacentes a ele congruentes, então os triângulos são congruentes”

f) “Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais”

g) “Num triângulo quando traçada uma reta paralela a um dos lados que intersecte os outros dois lados, ficam determinados nesses lados segmentos proporcionais”

h) “Ângulos opostos pelo vértice são iguais”

Dentre as aplicações dos teoremas, evidenciam-se os conteúdos de razão e proporção, trigonometria, geometria espacial e teoria da semelhança. Sobre estes aspectos BONGIOVANNI (2007) destaca que

> O Teorema de Tales tem um papel fundamental na teoria da semelhança e consequentemente na trigonometria, onde justifica as definições de seno, cosseno e tangente de um ângulo. Na geometria espacial ele aparece no tratamento das secções de um sólido por um plano paralelo à base. Na perspectiva, ele surge quando se estudam as propriedades das figuras geométricas que se conservam quando traçadas em um plano e projetadas em outro plano a partir de uma fonte no infinito; dessas propriedades (conservação do ponto médio, conservação do baricentro, conservação do alinhamento etc.), a fundamental é a conservação das razões das distâncias entre pontos alinhados. (BONGIOVANNI, 2007, p. 94).

Com base no exposto, nos apoiamos nas ideias de Ross (2014), ao descrever que a analise nos detalhes observados nestes teoremas, possibilita ao leitor, perceber que muitos deles parecem simples e intuitivos, sendo alguns já conhecidos e praticados pelas civilizações pré-helênicas. Tais estudos são, no entanto, atribuídos a Tales, bem como as tentativas de demonstrá-los. É possivel ainda observar uma mudança com relação a maneira refrente à organização da geometria como estudo abstrato e dedutivo.

3.1 Abordagem dos mais conhecidos teoremas de Tales

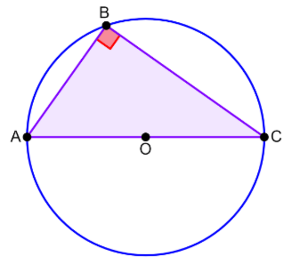
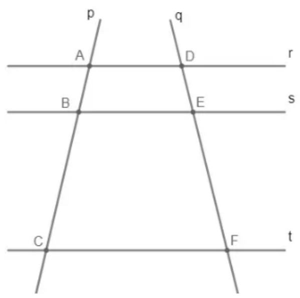
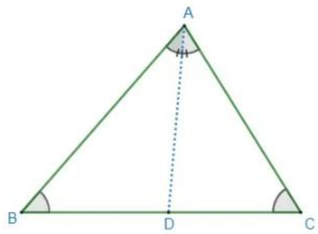
Os teoremas de Tales trouxeram grandes contribuições para o aprimoramento da geometria plana por meio da resolução de problemas práticos, principalmente quando se trata de paralelismo e proporcionalidade, tendo buscado sempre estabelecer uma relação entre o geométrico e o numérico (BONGIOVANNI, 2007). Possui uma função fundamental na teoria da semelhança e, consequentemente, na semelhança entre triângulos. Quando tratamos da abordagem de tais teoremas em sala de aula, se faz necessário adotar uma metodologia de ensino que possibilite ao aluno, atingir um desejável nível de compreensão, de modo que este consiga chegar à abstração por meio da percepção destes elementos no seu cotidiano.

Com base nesta discussão, Brum e Schuhmacher (2012) sustentam a ideia de que

> Apesar dos estudos deixados por esse grande matemático sobre paralelismo e proporcionalidade a partir de situações do cotidiano, diversos professores ainda apresentam seu famoso teorema de modo mecânico e memorístico, desconsiderando os conhecimentos prévios que os estudantes carregam para dentro de sala de aula. (BRUM E SCHUHMACHER, 2012, P.106-107)

Intencionando realizar um estudo sobre o Teorema de Tales no campo da geometria, se faz necessário elucidar qual dentre os vários teoremas desejamos nos aprofundar, visto que no percurso histórico matemático, este aparece de formas variadas, de modo que algumas abordam distâncias, outras se referem à medidas algébricas ou vetores. Porém, vale considerar que na maioria das vezes, seus teoremas fazem referência a uma figura formada por duas secantes e linhas paralelas ou até mesmo a uma figura relacionada a dois triângulos semelhantes. Conforme exposto por Boyer (2012), o livro VI dos Elementos de Euclides é o primeiro registro histórico destes destes teoremas que apresentam pelo menos 3 teoremas que levam o nome do matemático grego em questão.

Quadro 08 – Principais teoremas de Tales

Teorema	Enunciado	Representação
O teorema de Tales sobre um triângulo retângulo que tem como hipotenusa o diâmetro de um círculo.	“Este teorema diz que se tivermos um triângulo inscrito em um círculo com o diâmetro como hipotenusa, o triângulo será um triângulo retângulo e formará um ângulo reto no vértice localizado em qualquer ponto da circunferência.”	
O teorema de Tales sobre as proporções originadas pela intersecção de um feixe deretas paralelas.	“Um feixe de retas paralelas determina, em duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais. Desse modo, se temos duas retas paralelas “cortadas” por duas transversais, os segmentos formados por essa intersecção são proporcionais.”	
O teorema de Tales aplicado nos triângulos é mais conhecido por teorema da bissetriz interna.	“Em todo triângulo, a bissetriz de qualquer ângulo interno divide o lado oposto a ele em duas partes proporcionais, em relação a seus lados adjacentes.”	

Fonte: organização da autora/2022 – baseado em Boyer (2012)

Com relação aos três teoremas citados no quadro 02 acima, podemos inferir que o primeiro deles não é difundido na catalogação de pesquisas em História da matemática no Brasil e de acordo com seu enunciado, relaciona a hipotenusa do triângulo retângulo com o diâmetro de uma semicircunferência que circunscreve esse triângulo, enquanto que o segundo teorema, conhecido como o Teorema de Tales, de ampla divulgação nos livros didáticos, compondo o conteúdo curricular do ensino fundamental, de modo que, de acordo com Almeida (2013) realiza um estudo sobre as retas paralelas cortadas por transversais.

Em se tratando do último teorema, observamos que este faz referência aos segmentos formados quando em um triângulo, dois lados são intersectados por uma reta paralela ao seu terceiro lado. Ressaltamos que o segundo teorema elenca o objeto de estudo desta pesquisa.

3.2 O Teorema de Tales de segmentos proporcionais

Um dos principais estudos conhecidos na Geometria Elementar é o teorema de Tales, que faz uma relação direta entre o conhecimento geométrico e o numérico por meio de medidas. Seu enunciado mais conhecido atualmente é “Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas transversais, então as medidas dos segmentos correspondentes que estão sobre a reta são diretamente proporcionais” . De acordo com muitos estudiosos matemáticos e observações de autores de livros de história da Matemática, não é possível evidenciar históricamente o surgimento deste teorema, em decorrência da falta de documentos suficientes que contribuam para a comprovação de sua existência e consequente autoria.

Diversas fonte foram alteradas em decorrência das inúmeras versões de interpretações recebidas do teorema, o que dificultou a separação entre os fatos reais e relatos fantasiosos. Porém, conjectura-se que sua origem tem relação com as diversas soluções de problemas de natureza prática, com destaque para a arquitetura e agrimensura grega, por meio da noção de paralelismo e proporcionalidade, relacionados diretamente ao conhecimento geométrico e numérico. Embora existam vários relatos de sua origem, muitos autores concordam que sua origem pode estar relacionado ao método de medir a altura de uma pirâmide.

De acordo com Pereira (2005), a versão mais disseminada do Teorema de Tales, era conhecida até o final do século XIX como Teorema das Linhas

Proporcionais, pelo fato de que o mesmo apresenta condições de proporcionalidade dos segmentos. A primeira vez que o Teorema dos Segmentos Proporcionais foi substituído por Teorema de Tales, de acordo com Bongiovanni (2007) teve ocorrência no livro francês *Éléments de géométrie de Rouche e Comberousse*, na reedição de 1883.

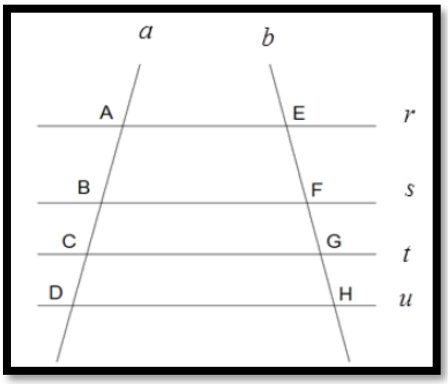
No Brasil, a utilização do termo Teorema de Tales passou a ser utilizado na segunda metade do século XX, acompanhando o período histórico do surgimento do movimento da Matemática Moderna, sendo disseminado por diversos estudiosos da área, como Oswaldo Sangiorgi. Atualmente, o referido teorema é conhecido como “feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais que determinam segmentos proporcionais entre si” (PEREIRA 2005).

Configurado como um dos postulados mais básicos da geometria, este teorema tem diversas finalidades de fundamentação de conceitos geométricos, como semelhança, secções de um sólido por um plano paralelo à base e trigonometria, justificando as definições de seno, cosseno e tangente de um ângulo. A seguir, apresentaremos o enunciado e a respectiva demonstração do Teorema de Tales de segmentos proporcionais, pois de acordo com Polya (1995), o mesmo é elencado entre os dez mandamentos para professores de Matemática aprender a demonstrar.

3.2.1 Enunciado do Teorema de Tales de segmentos proporcionais

Enunciado: “Se duas retas transversais intersectam um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma transversal é igual à razão dossegmentos correspondentes da outra”. Ou seja, sendo r, s, t e z retas paralelas, a e b transversais. (Figura 14).

Figura 14 - Feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais



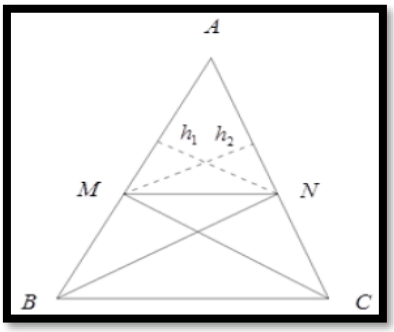
Fonte: organização da autora/2022

Deste esquema, podemos observar a validade das razões e como consequência, com base nesta proporção, podemos inferir que a mesma vale para todos os segmentos, como BC / CD = EF / GH e os demais que podem ser formados com as retas *r, s t, u.*

Demonstração:

Para demonstrarmos o Teorema de Tales, utilizaremos o conceito de área de triângulos. Deste, vamos considerar ∆ ABC um triângulo qualquer, *M* e *N* pontos tais que $M \in \overline{AB}$ e $N \in \overline{AC}$, com $\overline{MN}$ paralelo a $\overline{BC}$, então $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$.

Figura 15 - Feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais



Fonte: organização da autora/2022

Como *MN* é paralelo a *BC,* temos que ∆ BCM e ∆ BCN possuem mesma área, já que a base e altura relativa a essa base são iguais. Seja h1 a altura relativa ao lado AM do triângulo ∆ AMN, consequentemente será altura relativa ao lado AB do triângulo ∆ ABN, da mesma forma, sendo h2 altura relativa ao lado AN do triângulo ∆ AMN também será altura relativa ao lado AC do triângulo ∆ ACM.

Notemos que os triângulos ∆ ABM e ∆ ACM possuem mesma área. Deste modo:

Área (∆ ABN) = Área (∆ ABC) - Área (∆ BCN)

Área (∆ ACM) = Área (∆ ABC) - Área (∆ BCM)

Subtraindo as igualdades teremos que:

Área (∆ ABN) = Área (∆ ACM)

Como os dois triângulos possuem mesma altura, podemos concluir que a razão entre as áreas é igual a razão entre as bases. Então

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\acute{A}rea(\Delta AMN)}{\acute{A}rea(\Delta ABN)}$$

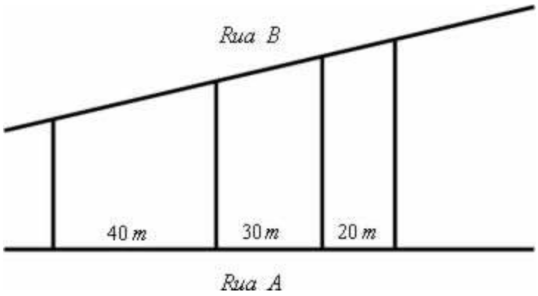
$$\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\acute{A}rea(\Delta AMN)}{\acute{A}rea(\Delta ACM)}$$

Deste modo, $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$

Com isso, fica comprovada a validade e veracidade do teorema.

3.2.2 Aplicação prática do teorema de Tales

(Fuvest–SP) Três terrenos têm frente para a rua A e para a rua B, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Qual a medida de frente para a rua B de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua tem 180m?



Solução:

Observando que os três lotes são paralelos entre si, podemos considerar as medidas das frentes de cada um deles como x, y e z, respectivamente. De modo que, conforme pode ser observado na figura que ilustra a questão, a ordem de tamanho das frentes dos 3 terrenos, é x, y e z. Sendo o terreno x, o maior, o terreno y, é o intermediario, enquanto que o terreno z é o menor deles.

Seguindo o teorema de Tales que relaciona o feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais, podemos inferir que os três terrenos obedecem à seguinte organização:

B/A = 40/x = 30/y = 20/z

Como a frente total do terreno mede 180m, então podemos relacionar esse comprimento total com cada uma das frentes, iniciando pelo terreno 1 (x). Assim, usaremos as seguintes relações

Calculo da frente do terreno 1 (x):

180/90 = 40/x

40/x = 2

2x = 40

x = 40/2

x = 20 A frente do terreno 1 mede 20 metros.

Calculo da frente do terreno 2 (y):

30/y = 2

2y = 3

y = 30/2

y = 15 A frente do terreno 2 mede 15 metros.

Calculo da frente do terreno 3 (z):

20/z = 2

2z = 20

z = 20/2

z = 10 A frente do terreno 1 mede 20 metros.

Pontanto, concluímos que as medidas das frentes dos 3 terrenos medem 20 m, 15 m e 10 m, respectivamente.

3.3 Teorema de Tales no Triângulo

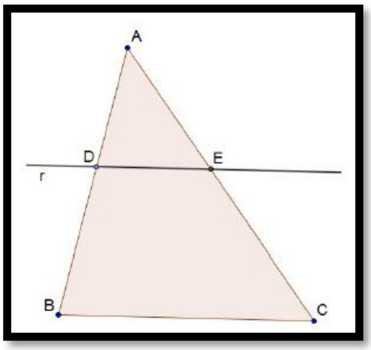
Conforme apontado por Almeida (2013), são inúmeros os livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental que relacionam o teorema de Tales no triângulo como uma consequência do Teorema de Tales do feixe de paralelas, para resolver problemas contextualizados do cotidiano. Tal possibilidade se justifica pelo fato de que, como a própria história conta, o próprio Tales se utilizou deste método para medir a altura da pirâmide de Quéops.

Deste modo, a seguir, faremos menção ao teorema de Tales no triângulo, com sua respectiva domonstração e aplicação prática.

Teorema 2.3 (Teorema de Tales no Triângulo):

“Se uma reta é paralela a um lado de um triângulo de modo que intercepte os outros dois lados em pontos distintos, então esses dois lados são divididos na mesma razão” (MOISE; DOWNS, 1971).

Figura 16 – O Teorema de Tales No Triângulo



Fonte: organização da autora/22

Dado ∆ ABC e considere que uma reta paralela ao lado BC intercepte os lados AB e AC, respectivamente, nos pontos D e E, então, de modo que os segmentos

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

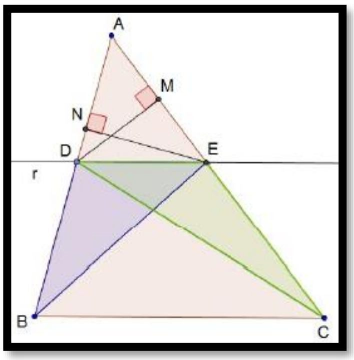
3.3.1 Demonstração do Teorema de Tales no triângulo

Nesta seção, vamos utilizar três mecanismos para provar a validade do Teorema de Tales no triângulo: Validação do teorema pelo cálculo das áreas, validação por contraposição e validação por proporção.

a) Prova 1 – Cálculo de áreas

Considere um triângulo ∆ ABC e nele vamos construir os segmentos BE, CD e DM ⊥ AC e EN ⊥ AB, como na figura 17 a seguir

Figura 17 – Demonstrando do Teorema de Tales com uso de áreas.



Fonte: Bongiovanni (2017)

Considerando que a área do triângulo pode ser calculada como o semi-produto de sua base pela altura, teremos as seguintes relações para os triângulos ∆ADE, ∆DBE e ∆DCE

(1) $$\frac{\text{Área}(\triangle ADE)}{\text{Área}(\triangle DBE)} = \frac{\frac{AD \times EN}{2}}{\frac{DB \times EN}{2}} = \frac{AD}{DB}$$

(2) $$\frac{\text{Área}(\triangle ADE)}{\text{Área}(\triangle DCE)} = \frac{\frac{AE \times DM}{2}}{\frac{EC \times DM}{2}} = \frac{AE}{EC}$$

Observamos ainda que os triângulos ∆DBE e ∆DCE possuem a base DE, de modo que DE é paralelo a BC, o que fazendo com que as alturas dos dois triângulos sejam de mesma medida. Portanto,

Área ∆DBE = Área ∆DCE

Tomando como base, os resultados 1 e 2 das equações realizadas, nteremos como consequência que

$$\frac{\text{Área}(\triangle ADE)}{\text{Área}(\triangle DBE)} = \frac{\text{Área}(\triangle ADE)}{\text{Área}(\triangle DCE)} \Longrightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

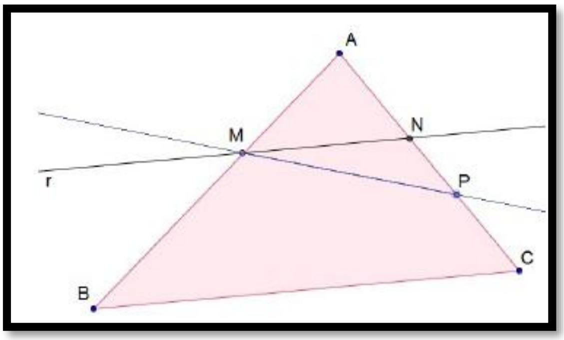
Concluimos que a demonstração acima considera o caso em que os segmentos são incomensuráveis. Com isso, não há a necessidade da utilização de cálculos mais elaborados para a resolução.

b) Prova 2 – Método da Contraposição

Uma segunda prova do Teorema de Tales nos permite deduzir determinadas proporções, ao passo que no problema a ser investigado, seja possivel detectar condições de paralelismo nas figuras geométricas dadas. O referido teorema nos permite pelo método da contraposição, demonstrar que as linhas (ou segmentos) em questão não são paralelos quando não há igualdade de certas relações. Seu processo recíproco nos possibilita deduzir um paralelismo desde que conheçamos a igualdade de certas proporções.

Para isso, vamos considerar o triângulo ABC a seguir, e provar que se MN não é paralelo a BC, então as razões AM / MB e AP / PC não são iguais. Isso seria equivalente a afirmar que se AM / MB = AP / P, então MP // BC, conforme podemos observar na figura 18 abaixo

Figura 18 – Demonstração do Teorema de Tales por contraposição



Fonte: Bongiovanni (2017)

Considere a reta r intersectando os lados AB e AC no Δ ABC, nos pontos M e N, respectivamente, de modo que AM / MB = AP / PC. Disto, vamos mostrar que MP // BC (os segmentos são paralelos). Dai, assumimos que os segmentos MP e BC são são paralelos. Deste modo, deve existir uma outra reta que passe por M, de modo que também passe por algum ponto N e que pertença ao segmento AC, de modo que esta reta seja paralela a BC. Assim sendo, concluímos que seja MN//BC (segmentos paralelos).

Deste modo, se MN//BC, pelo teorema de Tales, é possível verificar que

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \quad (1)$$

Como $$\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{PC} \quad (2)$$

De (1) e (2) temos que $\frac{AN}{NC} = \frac{AP}{PC}$ (3)

Ao adicionarmos convenientemente o valor 1 a ambos os membros da igualdade, resulta em

$$\frac{AN}{NC} + \frac{NC}{NC} = \frac{AP}{PC} + \frac{PC}{PC}$$

Portanto, $$\frac{AN + NC}{NC} = \frac{AP + PC}{PC} \qquad (4)$$

Consequentemente, substituindo 3 em 4, teremos que

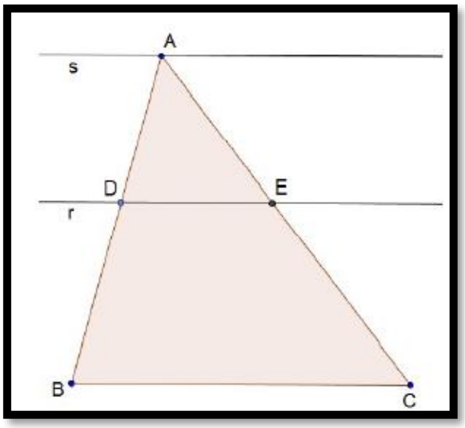
$$NC = PC$$

Que só seria possível se N = P, ou seja MN = MP, logo se MN pertencer a reta r.

c) Prova 3 – Terorema de Tales pelo método das proporções

Tal método é considerado como a demonstração precursora do teorema de Tales a ser registrada, no livro VI dos Elementos de Euclides (300 a.C). Se fundamenta na teoria das proporções de Eudoxo apresentada no livro V de Euclides. Como um elemento de prova, este método utiliza o Teorema do feixe de retas paralelas, usualmente difundido nos livros didáticos de 9º ano do ensino fundamental.

Figura 19 – Demonstração do Terorema de Tales pelo método das proporções



Fonte: Bongiovanni (2017)

Deste modo, com uso do teorema de feixe de paralelas, obtemos o resultado de que

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

Ficando demonstrado o Teorema de Tales pelo método das proporções.

Capítulo 4

O USO DO MATERIAL CONCRETO NO ENSINO DE MATEMÁTICA

4.1 Discussão histórica e uso do teodolito

Com o passar dos tempos, a sociedade adquire novas necessidades em todos os setores e com isso, surgem diversos mecanismos e tecnologias para supri-las, fazendo com que esse ciclo se renove a uma intensa velocidade. Uma das necessidades humanas que sempre está em alta, é a moradia e nesse sentido, por muitos séculos, as pessoas vêm realizando medições de ângulos para a finalidade de construção.

na primeira metade do século XVI Antigas civlizações como os egípcios usavam a "groma", uma versão rudimentar do teodolito, que auxiliava na construir as pirâmides. Outros povos, como os Romanos, faziam uso de ferramentas como a "dioptra", caracterizada como sendo uma placa circular com ângulos marcados para as mesmas finalidades.

Figura 20 – Reconstituição de uma Groma

Fonte: https://www.amiranet.com.br/artigo/a-historia-da-agrimensura-16

A Groma, também conhecida como Gromaticus é um dos principais simbolos relacionados ao agrimensor. Consiste em um esquadro óptico ou esquadro de agrimensor, cuja finalidade é dividir o campo de visão em quatro quadrantes para então traçar linhas retas e ângulos retos.

Figura 21 – Reconstituição do uso da Dioptra – Disco vertical hgraduado em 90º

Fonte: https://www.amiranet.com.br/artigo/a-historia-da-agrimensura-16

A dioptra é um instrumento de medida angular que ocorre por meio de operações visadas goniométricas horizontais. Era utilizado para o nivelamento de terrenos, agrimensura, implantação de aquedutos ou na implantação de túneis e mais tarde, mesmo na astronomia.

Na intenção de aprimorar o instrumento, Héron propôs a ideia de acoplar um segundo disco vertical para possibilitar a medida dos ângulos verticais fazendo deste instrumento o ancestral, sendo desprovido de luneta, como ocorria com o Teodolito.

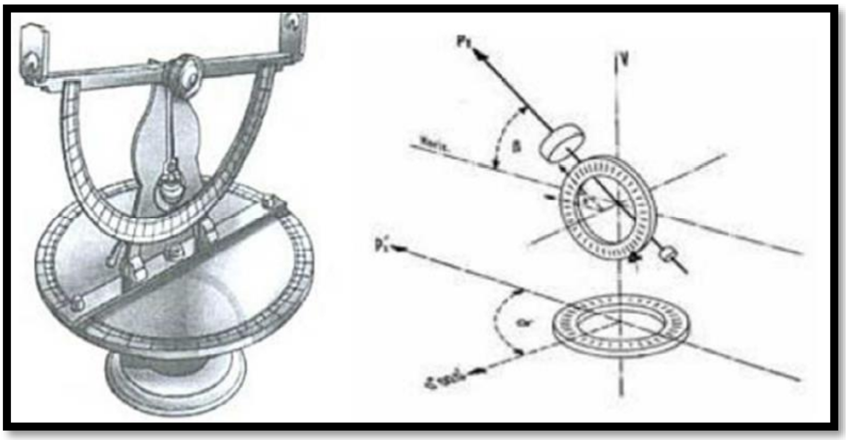
Nas histórias das civilizações, podemos também encontrar registros indicativos de que um inventor romano, conhecido como Leonard Digges, no século 16, desenvolveu um dispositivo que muito se assemelhava a um teodolito primitivo, tendo batizado a ferramenta como "theodolitus". Outra ferramenta como o telescópio montado no topo do dispositivo de medição, teve seu surgimento datado em meados dos anos 1700. Com o avançar dos tempos e com o advento de novas necessidades, Em 1773, Jesse Ramsden, um pesquisador da área industrial, criou uma invenção denominada como motor de divisão mecânica que possibilitava maior precisão e produção de teodolitos.

Conforme descrito por Huon (1999), um matemático inglês conhecido como Leonard Digges (1510-1558) teve a ideia de fazer uma instalação qiue consistia na montagem de um astrolábio sobre outro, o que possibilitava a medição de ângulos verticais e horizontais de uma só vez. O instrumento passou por vários ajustes, chegando à sua versão final, onde foi denominado de teodolito.

De acordo com Ferreira (2000 p.668), o teodolito é um “instrumento óptico para medir com precisão ângulos horizontais e verticais”, ou seja, caractetriza-se como sendo um instrumento de geodesia, cuja finalidade principal é medir ângulos reduzidos no horizonte, distâncias médias e longas, além de medição de posições relativas.Tal instrumento possibilitou a realização de cálculos de distâncias e alturas, além da elaboração de mapas em grandes e pequenas escalas.

Uma definição bastante objetiva descrita por Souza (2010, p.44) trata da utilidade do teodolito de modo a reconhecer que “[...] Eles podem ser utilizados para medir distâncias que relacionadas com os ângulos verticais permitem obter tanto a distância horizontal entre dois pontos, quanto a diferença de nível entre os mesmos”. O termo teodolito foi amplamente difundido a partir da publicação de um livro publicado no século XVI, na Inglaterra, denominado como Pantometria, cuja autoria é de Leonard Digges.

Figura 22 – Teodolito de Leonard Digges



Fonte: http://www.ehow.com.br/historia-teodolito-sobre_93553/

Atualmente o teodolito se modernizou, apresentando as versões de luneta e a digital. A versão de luneta é montado num tripé e possui indicadores de nível, possibilitando total liberdade de rotação nos sentidos horizontal ou vertical. A composição básica do teodolito consiste em duas, a óptica e a mecânica, sendo constituido por lentes e prismas no seu interior que ao desviar o raio de luz, permite com que seu operador consiga fazer uma rápida e simples leitura dos limbos graduados em graus, minutos e segundos.

Figura 23 – Teodolito de luneta (esquerda) e teodolito eletrônico (direita)

Fonte: http://es.123rf.com/imagenes-de-archivo/surveying_the_site.html

Grande parte dos teodolitos são compostos por uma luneta (figura à esquerda) que permite uma visão mais detalhada em qualquer direcionamento, possuindo ainda, uma placa horizontal na sua parte inferior semelhante a um transferidor, que fornece leituras do horizonte em graus, minutos e segundos, e ainda, uma placa e uma escala vertical, montadas à esquerda da luneta, que permitem a tomada de leituras verticais. Já os teodolitos digitais (Teodolito Total ou Estação Total) é um instrumento que afere o ângulo vertical e Horizontal com uso de um raio infravermelho que fica posicionado no centro da luneta. Este instrumento permite determinar a distância de um alvo, tomando como referência o comprimento de onda do raio.

4.2 O uso do Teodilito artesanal nas aulas de matemática

O ensino de matemática na educação básica vem sendo potencializado com inúmeras tecnologias aplicativas, não sendo raro que novos artefatos sejam descobertos e disponibilizados com o decorrer do tempo, visto que as ferramentas tecnológicas, em especial as de informação e comunicação, estão se mostrando uma grande aliada nos processos pedagógicos.

O uso do teodolito artesanal no ensino de matemática é uma alternativa que surgiu no contexto dos rumos das metodologias avaliativas. Trata-se de um instrumento que tem a finalidade de auxiliar os alunos na compreensão e aprendizagem da perspectiva bidimensional.

Uma atividade diferenciada que chamama bastante a atenção dos alunos quando orientados para uma prática, é a construção de um teodolito de forma artesanal. Existe uma vasta literatura que trata deste contexto em sala de aula, onde podemos encontrar várias maneiras de realizar esta prática, onde utilizamos de materiais simples e de fácil manuseio. A seguir, veremos a lista de material necessária para a constrtução de um Teodolito.

4.2.1 Construção e utilização do Teodolito caseiro

A realização desta fase da pesquisa foi conduzida em 3 etapas, sendo a construção do Teodolito; Utilização da ferramenta em sala de aula e realização dos cálculos para obtenção do valor referente ao tamanho de uma região inacessível ou de grande extensão a altura de determinado objeto do contexto do aluno, a partir de observações realizadas com o Teodolito.

4.2.2 Organização do material necessário

Nesta etapa, foi proposto para os alunos a construção de um matertial concreto que chamaremos de "Teodolito artesanal" e servirá como apoio pedagógico para o ensino e a prendizagem do teorema de Tales com uso de paralelas. Tal instrumento se assemelha a um Astrolábio, uma ferramenta que antecede os teodolitos atuais, cuja finalidade é medir ângulos verticais em relação ao plano horizontal. O quadro 03 a seguir mostra a relação de materiais necessários para a construção do Teodolito artesanal

Quadro 09 – Materiais necessários para a construção do teodolito artesanal

Material	Quantidade
Papel cartão ou papelão	1 folha (40 cm x 30 cm)
Transferidor circular	1 unidade
Copo descartável com tampa	1 unidade
Canudo utilizado para beber liquido	1 unidade
Pedaço de arame maleável	Comprimento de 15 cm
Cola escolar	1 unidade
Pistola de cola quente com bastão	1 unidade
Tesoura sem ponta	1 unidade

Fonte: organização da autora/2022

Com relação à especificação de alguns materiais descritos na tabela, consideramos que o transferidor deve sem com diâmetro de 25 cm, podendo também ser utilizada uma cópia do mesmo em folha de papel A4 e recortada.

Quanto à obtenção dos materiais utilizados na construção do Teodolito, os alunos entraram em um consenso de que o material descartável como (copo com tampa, canudo e arame) seria de responsabilidade deles, de modo que cada aluno deveria trazer o seu, considerando que nesta dinâmica, o trabalho também estaria incentivando a reciclagem. Quanto ao material restante, seria fornecido pelo professor respomnsável pela aplicação da pesquisa.

4.2.3 Orientações para a Montagem do Teodolito

Para a montagem do material concreto, os alunos foram orientados a obedecer as etapas cdescritas no quadro 04 a seguir:

Quadro10 – Sequência das etapas de montagem do Teodolito

Etapa	Ação	Orientação
Etapa 01	Colar a figura do transferidor circular no papel cartão	A importância desse procedimento se se justifica pelo fato de que o papel cartão serve de base para a figura do transferidor. Durante a utilização do Teodolito é necessário figura permaneça na mesma posição durante o processo.

Etapa 02	Colar a tampa do copo descartável de formato circular na região central da figura do transferidor:	Esse detalhe contribui para que o centro da tampa coincida com o centro da figura do transferidor, para que o Teodolito seja construído de forma simétrica. Por isso é necessário utilizar cola quente.
Etapa 03	Furar o copo descartável ao longo de seu diâmetro usando o pedaço de arame e fixa-lo ao mesmo:	Essa ação serve para facilitar a leitura dos ângulos no Teodolito, daí a importância da posição do pedaço de arame coincidir com a linha imaginária que passa pelo diâmetro do copo.
Etapa 04	Colar o canudo na base do copo descartável	A finalidade desta etapa serve para que a leitura dos ângulos realizados no Teodolito seja a mais eficiente possível, por isso a importância do canudo estar paralelo ao pedaço de arame.

Fonte: organização da autora/2022

CAPÍTULO 5

APLICAÇÃO DO PROJETO E RESULTADOS

Na intenção de demonstrar algumas aplicações de ordem práticas que sejam da vivência do aluno, relacionadas à Trigonometria, organizamos e aplicamos um projeto voltado para a construção de um teodolito artesanal, para ser utilizado como material concreto pelos alunos, para medir distâncias inacessíveis.

Deste modo, dividimos a pesquisa-ação em duas partes, sendo uma teórica e outra prática, de modo que a professora pesquisadora pudesse ocupar a posição de orientadora. A teoria foi estudada em sala de aula, onde abordamos a história da trigonometria, seus inventores, a forma do primeiro objeto, a utilização das medidas obtidas, dentre outros fatores. Já a fase da prática abordou a construção do Teodolito caseiro e o seu manuseio.

5.1 O local de pesquisa

As atividades foram aplicadas e desenvolvidas em uma turma com 30 alunos da 4ª etapa da Educação de Jovens e Adultos – EJA na escola Nelson Mandela, pertencente à rede pública de ensino do município de Parauapebas, localizado no Sudeste do Estado do Pará. A referida turma é composta por alunos que cursam o 8º e 9º anos do ensino fundamental.

5.2 Fase teórica

Com base nos conteúdos curriculares de Trigonometria apresentados no capítulo 03 desta pesquisa, enfatizamos na fase teórica, os conhecimento prévios, considerando-os como sendo de extrema importância para aquisição de um novo conhecimento. Neste aspecto, usamos os conceitos sobre as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, para que os alunos possam, no momento da realização das atividades práticas, fazer as devidas relações com os conhecimentos prévios adquiridos.

Neste sentido, preparamos 3 aulas para exposição dos conteúdos e discussão das situações problemas, como forma de orientar os alunos para as atividades práticas. Os quadros a seguir mostram ums descrição de cada uma das aulas ocorridas, com suas devidas ações.

Quadro 11 – Descrição das atividades em sala de aula

Aula 01	**Estudando os conceitos prévios de Trigonometria**
Data	05/12/2022
Duração	3 aulas: 135 minutos
Descrição	Revisão dos conteúdos estudados
Objetivos	Interpretar situações que envolvam o uso das relações trigonométricas. Calcular medidas desconhecidas utilizando as relações. Identificar e usar corretamente as relações utlziando as relações. Resolver situações problemas envolvendo as relações trigonométricas.
Pré requisitos	Triângulo retângulo (hitpotenusa e catetos) Critérios de semelhança de triângulos Matemática do ensino fundamental
Conteúdos estudados	Conceitos de ângulos
	Semelhança de Triângulos
	Casos de semelhança de triângulos
	Triângulo retângulo
	Resolução de situações problemas
Recursos didáticos-pedagógicos	Aulas expositivas e demonstrativas. Uso de material auxiliar: Régua, esquadro, transferidor, calculadora científica. Régua, esquadro e transferidor serão utilizados na construção das figuras no quadro negro, através das quais será analisado o cálculo a ser utilizado. Calculadora auxiliará nos cálculos de seno, cosseno e tangente de ângulos. Quadro negro e giz.
Avaliação	Atividades em sala. Listas de exercícios envolvendo aplicações da trigonometria no cotidiano. Durante as aulas observando o interesse e a participação do aluno. Os alunos irão abordar as aplicações da trigonometria através de exercícios, cartazes, desenhos geométricos, situações problema.

Fonte: organização da autora/2022

Quadro 12 – Descrição das atividades em sala de aula

Aula 01	**Estudando os conceitos prévios de Trigonometria**
Data	07/12/2022
Duração	3 aulas: 135 minutos
Descrição	Orientação para a construção do teodolito artesanal
Objetivos	Exposição da história e finalidades do teodolito
Pré requisitos	Conhecimentos prévios sobre os triângulos retângulos e a Matemática do ensino fundamental
Conteúdos estudados	Apresentação dos materiais a serem utilizados
	Utilização da tabela trigonométrica
	Resolução de situações problemas
Recursos	Tabela trigonométrica, lista de exercícios
Avaliação	Atividades em sala sobre as razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente;

Fonte: organização da autora/2022

Os quadros 07 e 08 a seguir são referentes às tabela trigonométricas dos ângulos agudos de 1º até 90º utilizada pelos alunos.

Quadro 13 – Tabela do Seno, cosseno e tangente de ângulos agudos de 1º até 45º

Ângulos em Graus	**Seno**	**Cosseno**	**Tangente**
1°	0,0175	0,9998	0,0175
2°	0,0349	0,9994	0,0349
3°	0,0523	0,9986	0,0524
4°	0,0698	0,9976	0,0699
5°	0,0872	0,9962	0,0875
6°	0,1045	0,9945	0,1051
7°	0,1219	0,9925	0,1228
8°	0,1392	0,9903	0,1405
9°	0,1564	0,9877	0,1584
10°	0,1736	0,9848	0,1763
11°	0,1908	0,9816	0,1944
12°	0,2079	0,9781	0,2126

13°	0,2250	0,9744	0,2309
14°	0,2419	0,9703	0,2493
15°	0,2588	0,9659	0,2679
16°	0,2756	0,9613	0,2867
17°	0,2924	0,9563	0,3057
18°	0,3090	0,9511	0,3249
19°	0,3256	0,9455	0,3443
20°	0,3420	0,9397	0,3640
21°	0,3584	0,9336	0,3839
22°	0,3746	0,9272	0,4040
23°	0,3907	0,9205	0,4245
24°	0,4067	0,9135	0,4452
25°	0,4226	0,9063	0,4663
26°	0,4384	0,8988	0,4877
27°	0,4540	0,8910	0,5095
28°	0,4695	0,8829	0,5317
29°	0,4848	0,8746	0,5543
30°	0,5000	0,8660	0,5774
31°	0,5150	0,8572	0,6009
32°	0,5299	0,8480	0,6249
33°	0,5446	0,8387	0,6494
34°	0,5592	0,8290	0,6745
35°	0,5736	0,8192	0,7002
36°	0,5878	0,8090	0,7265
37°	0,6018	0,7986	0,7536
38°	0,6157	0,7880	0,7813
39°	0,6293	0,7771	0,8098
40°	0,6428	0,7660	0,8391
41°	0,6561	0,7547	0,8693
42°	0,6691	0,7431	0,9004
43°	0,6820	0,7314	0,9325
44°	0,6947	0,7193	0,9657
45°	0,7071	0,7071	1

Fonte: organização da autora/2022 com base em Bongiovanni (2017)

Quadro 14 – Tabela do Seno, cosseno e tangente de ângulos agudos de 46º até 90º

Ângulos em Graus	Seno	Cosseno	Tangente
46°	0,7193	0,6947	1,0355
47°	0,7314	0,6820	1,0724
48°	0,7431	0,6691	1,1106
49°	0,7547	0,6561	1,1504
50°	0,7660	0,6428	1,1918
51°	0,7771	0,6293	1,2349
52°	0,7880	0,6157	1,2799
53°	0,7986	0,6018	1,3270
54°	0,8090	0,5878	1,3764
55°	0,8192	0,5736	1,4281
56°	0,8290	0,5592	1,4826
57°	0,8387	0,5446	1,5399
58°	0,8480	0,5299	1,6003
59°	0,8572	0,5150	1,6643
60°	0,8660	0,5000	1,7321
61°	0,8746	0,4848	1,8040
62°	0,8829	0,4695	1,8807
63°	0,8910	0,4540	1,9626
64°	0,8988	0,4384	2,0503
65°	0,9063	0,4226	2,1445
66°	0,9135	0,4067	2,2460
67°	0,9205	0,3907	2,3559
68°	0,9272	0,3746	2,4751
69°	0,9336	0,3584	2,6051
70°	0,9397	0,3420	2,7475
71°	0,9455	0,3256	2,9042
72°	0,9511	0,3090	3,0777

73°	0,9563	0,2924	3,2709
74°	0,9613	0,2756	3,4874
75°	0,9659	0,2588	3,7321
76°	0,9703	0,2419	4,0108
77°	0,9744	0,2250	4,3315
78°	0,9781	0,2079	4,7046
79°	0,9816	0,1908	5,1446
80°	0,9848	0,1736	5,6713
81°	0,9877	0,1564	6,3138
82°	0,9903	0,1392	7,1154
83°	0,9925	0,1219	8,1443
84°	0,9945	0,1045	9,5144
85°	0,9962	0,0872	11,4301
86°	0,9976	0,0698	14,3007
87°	0,9986	0,0523	19,0811
88°	0,9994	0,0349	28,6363
89°	0,9998	0,0175	57,2900
90°	1	0	___

Fonte: organização da autora/2022 com base em Bongiovanni (2017)

5.3 Aula prática – Montagem do Teodolito artesanal

A realização da oficina para a confecção do teodolito artesanal ocorreu no dia 8 de dezembro de 2022, na escola da rede pública do município de Parauapebas, Nelson Mandela, com 25 alunos das turmas de terceira e quarta etapa da Educação de Jovens e Adultos – EJA, na própria sala de aula. Como procedimento metodológico, utilizamos a abordagem qualitativa com base na pesquisa investigativa, de modo a percebermos que a própria ação dos alunos serviu como base para criação de conteúdo que servirá de suporte tanto para a escrita da dissertação como para a organização dos resultados da pesquisa.

Para Garnica (2001, p. 42) “a pesquisa qualitativa é um meio fluido, vibrante, vivo e, portanto, impossível de prender-se por parâmetros fixos, similares à legislação, às normas, às ações formalmente pré-fixadas”.

A abordagem que tratamos aqui, possibilita ao professor e alunos participantes da pesquisa, vivenciarem todas as etapas executadas durante o projeto de aplicação prática, como a coleta de dados que ocorreu de forma subjetiva com o envolvimento direto dos alunos, de modo bastante engajado, sem que esses se preocupassem com métodos fixos que visam o alcance das hipóteses mencionadas na pesquisa.

O desenvolvimento da oficina foi organizado em 3 momentos, considerando a explanação do conteúdo, construção e utilização do teodolito para a contextualização do ensino de razões trigonométricas na 4 ª etapa da EJA, observando sua aplicação prática como instrumento de medida e cálculo da altura dos objetos. Como culminância das atividades, os alunos responderam a um questionário aberto que, de acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006) se caracteriza como um instrumento de pesquisa que não apresenta alternativas para resposta, sendo um instrumento de suma importancia para a coleta de informações de pesquisas de cunho qualitativo.

5.3.1 Objetivos da oficina

Construir um teodolito

- Aprender a manusear o teodolito
- Aplicar os conhecimentos trigonométricos para fazer cálculos de medidas propostas, através de dados coletados com o aparelho
- Resolver os problemas práticos propostos
- Mostrar ao aluno a importância que a Matemática tem em nosso cotidiano

5.3.2 Justificativa da execução da oficina

No exercício da prática docente, quando os conteúdos matemáticos deixam de ser contextualizados em sala de aula, em termos gerais, é possível perceber por parte do aluno, uma maior dificuldade com relação à compreensão dos mesmos. Isso se confirma pelo fato de que segundo os próprios sujeitos participantes da pesquisa, não faz sentido estudar aquilo que já está proposto, pronto e acabado, não possibilitando a eles, aplicar o conhecimento em situações práticas, o que ocasiona um distanciamento da disciplina.

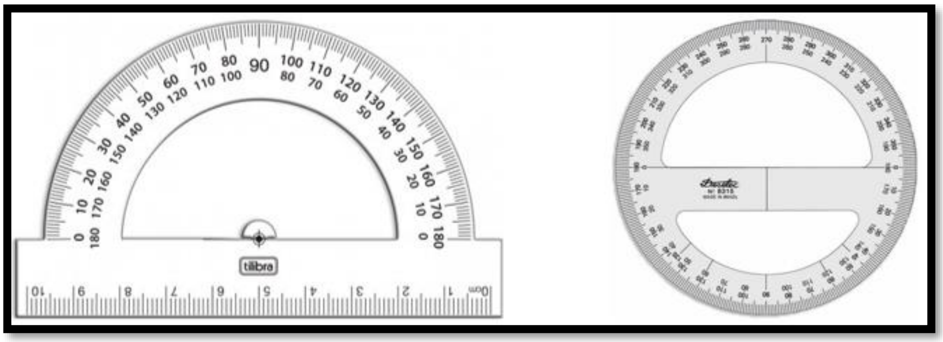
Na intenção de demonstrarmos os resultados de algumas aplicações práticas e cotidianas relacionadas à trigonometria, justificamos a execução desse projeto voltado à construção e manuseio de um teodolito artesanal para ser utilizado em aulas práticas, com objetivo de calcular medidas inacessíveis, estabelecer previsões de medidas, e resolver problemas práticos relacionados aos conceitos abordados na trigonometria. Deste modo, pontuamos que essa atividade pode possibilitar aos alunos, compreender a aplicabilidade dos conceitos trabalhados e a importância da Matemática em nosso cotidiano.

Com base nesses aspectos, apresentaremos a seguir, a relação dos materiais que foram utilizados pelos alunos para a construção do teodolito artesanal:

5.3.3 Materiais necessários para sua confecção

- Um transferidor de plástico
- Canudo de plástico
- 3 canos de PVC 22 mm com 15 m ou/e cabos de vassoura
- Cola quente
- 2 parafusos
- 1 cx de papelão
- Arame
- 1 nível

Figura 24 – transferidor de plástico



Fonte: acervo da autora/2022

Figura 25 - Cano de PVC

Fonte: acervo da autora/2022

Figura 26 - Cabo de vassoura

Fonte: acervo da autora/2022

Figura 27 – Nível De mão

Fonte: acervo da autora/2022

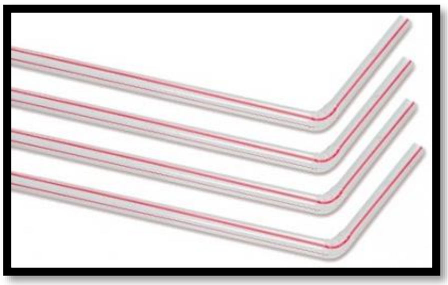
Figura 28 – Caixa de papelão

Fonte: acervo da autora/2022

Figura 29 - Pistola de cola quente

Fonte: acervo da autora/2022

Figura 30 – Canudos de suco



Fonte: acervo da autora/2022

Figura 31 – parafusos

Fonte: acervo da autora/2022

Figura 32 – arame

Fonte: acervo da autora/2022

Figura 33 – Organização do material da oficna

Fonte: acervo da autora/2022

Figura 34 – Montagem do Teodolito artesanal

Fonte: acervo da autora/2022

Figura 35 – Alunos recebendo orientação da professora idealizadora do projeto

Fonte: acervo da autora/2022

Após receberem as últimas orientações da professora idealizadora do projeto, os alunos tiveram a portunidade de realizar alguns ajustes no material concreto e consequentemente, passaram a realizar alguns testes com o teodolito artesanas criado por eles. Nesse momento, um dos alunos solicitou que fosse registrada suas impressão sobre a prática:

> [*Esse momento foi importante para nós alunos, porque expertimentamos na prática a construção de um material concreto que será mutilizado para nós aprendermos o conteúdo de trigonometria.* Relato dos alunos participantes do projeto]

Figura 36 – alunos realizando os últimos ajustes no Teodilito artesanal

Fonte: acervo da autora/2022

Figura 37 – Demonstração do Teodolito artesanal pela equipe A

Fonte: acervo da autora/2022

5.4 Aplicação das atividades – Teorema de Tales - semelhança de triângulos

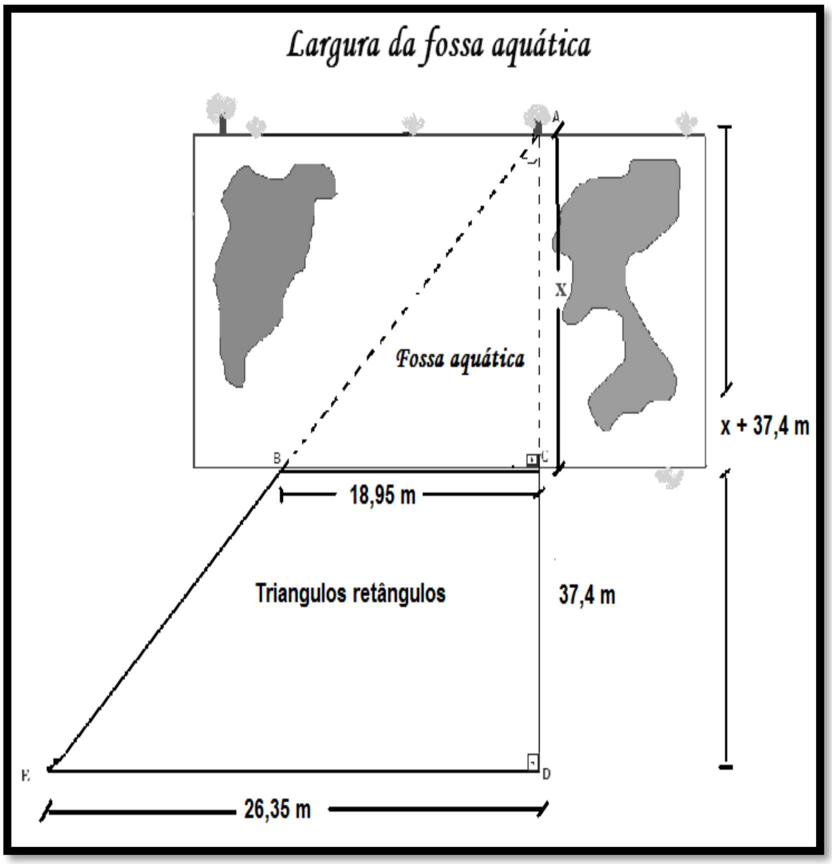
As atividades descritas neste tópico foram desenvolvidas por alunos da 4ª etapa do ensino fundamental, turma composta por alunos do 8º e 9º anos da escola Nelson Mandela, no município de Parauapebas-PA. A primeira atividade proposta, teve como objetivo, determinar a largura de uma fossa localizada próximo da escola para receber a água que escoa da cidade após as chuvas.

5.4.1 – Descrição e relatório da atividade 01

Título: Determinação da largura de uma fossa aquática

Objetivo: O objetivo era tentar encontrar a largura da fossa aquática que fica próximo da escola, sem medi-la da forma direta, apenas usando a semelhança de triângulos por meio do Teorema de Tales, conforme a figura 38 a seguir:

Figura 38 – medição da largura da fossa aquática



Fonte: dados da pesquisa/2022

Procedimentos:

Os alunos ao chegarem no local próximo à fossa aquática, organizaram os materiais necessários para a realização do experimento e perceberam que nas proximidades haviam várias àrvores, de modo que escolheram algumas como ponto de referência, usando-as como linhas imaginárias, de modo a formar um triângulo (figura 38). Tal procedimento adotado pelos alunos, teve como referência, a maneira como os Egipcios realizavam as medições. Deste modo, do lado esquerdo da fossa, fincaram um pedaço de madeira e alguns cabos de vassouras de modo a formar dois triângulos retângulos semelhantes, amarrado em seguida uma das extremidades do barbante, unindo os demais cabos de vassoura, de modo a formar os referidos triângulos.

Após isso, com usando a fita métrica, mediram os lados dos triângulos identificados, para então, realizarem os demais procedimentos posteriores.

Estabeleceram a proporção entre os lados conhecidos, tomando como base, as relações de semelhanças de triângulos, obsservadas no capítulo 03 desta pesquisa: de acordo com as relações de semelhanças de triângulos, dois triângulos são ditos semelhantes, se: Seus lados correspondentes são proporcionais; e Seus ângulos correspondentes são congruentes.

Resultados da atividade prática 01:

Conforme os cálculos realizados pelos alunos, por meio de seus métodos de experimetação, o resultado obtido indicou que a largura da fossa aquática é de aproximadamente ***95,78 metros.*** Para confirmar o resultado, fizeram a “medida técnica” com uso da fita métrica, que os indicou uma medida de **96,85** metros, o que significa uma margem de erro de 107 cm (1 metro e 7 centímetros). Considerando as irregularidades das margens, o resultado obtido usando semelhança de triângulos, nos aponta que os alunos alcançaram um resultado bastante satisfatório, por ser muito próximo da medida real.

Modelo Matemático*:*

A seguir, será apresentado o modelo matemático criado pelos alunos, referente aos triângulos imaginados para o esquema mental percebido por eles

Cálculos Realizados:

A partir do esquema apresentado, os alunos inferiram que os triângulos ADE e ACB são semelhantes, pois têm ângulos correspondentes congruentes, e consequentemente, seus lados correspondentes são proporcionais, então:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

De acordo com as medidas, observaram que*:*

$$\frac{x}{x + 37{,}4} = \frac{18{,}95}{26{,}35}$$

Usando a propriedade fundamental das proporções*:*

26,35.x = 18,95.(x + 37,4) *(*Aplicando a propriedade distributiva):

26,35.x = 18,95.x + 18,95.37,4 *(* Deixando x no 1º membro*):*

26,35.x - 18,95.x = 18,95.37,4 (Subtraindo e multiplicando)*:*

7,4.x = 708,73 (Dividindo por 7,4)*:*

x= 708,73 / 7,4

Resultado: ***x = 95,78 metros***, que corresponde à largura aproximada da fossa aquática.

Considerações sobre o resultado:

Nesta etapa da pesquisa, segundo relato das equipes participantes, o trabalho como um todo foi muito satisfatório, de modo que registraram as seguintes impressões:

> *[Ao experimentarmos vivenciar o problema na prática, foi possível para nós, estabelecer uma relação direta de semelhança de triângulo, conforme os cálculos que fizemos, onde o resultado que obtivemos, nos indica que a largura aproximada da fossa aquática foi de de: 95,78 m. Para confirmar o resultado, fizemos a "medida direta" da largura usando a fita que nos indicou a medida de 96,85 m, o que significa uma margem de erro de 1,07 m ou 107 cm (1 metro e 7 centímetros). Foi incrível para nós compreender e vivenciar uma situação real parecida com um problema vivenciado pelos egípcios, nos tempos antigos. O Mais incrivel ainda é que esse povo não possuia instrumentos de medidas como o nosso, mas mesmo assim, eles conseguiam fazer as medições com resultados muito próximo do real. (Relato dos alunos participantes da atividade prática/2022).]*

Com base na prática desenvolvida e nos resultados alcançados pelos alunos, podemos observar que o cálculo apresentado por eles foi muito próximo ao comparado com as medidas exatas da fossa aquática, isso nos leva a crer na importância do uso de semelhança de triângulos como forma de ensino.

Reiteramos que este momento possibilitou um aprendizado mais significativo para os discentes e uma percepção matemática, até então não vivenciada, em função de os mesmos estudarem os conteúdos do currículo da matemática apenas de forma teórica e desvinculada de sua vida real. Ressaltamos que foram registradas as dúvidas e dificuldades observadas por cada uma das equipes e no momento posterior à atividade prática, abrimos um espaço para discussão em sala de aula.

5.4.2 – Descrição e relatório da atividade 02

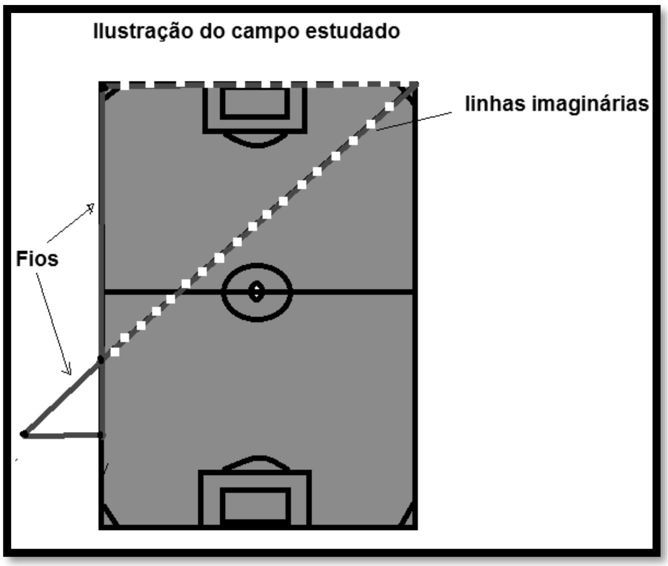
A segunda atividade prática teve como objetivo, *determinar a largura de um campo* de futebol localizado próximo à escola.

Titulo: Encontrar a largura do Campo do Ararí Esporte Clube

Materiais: Os materiais utilizados foram os seguintes: Trena, perna manca, caderno e caneta.

Objetivo: Encontrar a largura do campo de futebol usando somente a semelhança de triângulos.

Figura 39 – medição da largura do campo de futebol



Fonte: dados da pesquisa/2022

Procedimento:

1. encontrar a largura do campo sem medi-lo diretamente, teriam que fazer isso usando somente a semelhança de triângulos.

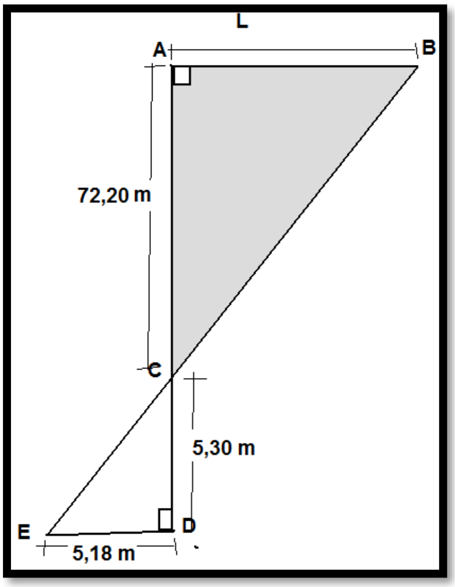
2. Com base no conhecimento sobre a semelhança de triângulos sabemos que: Dois triângulos são semelhantes se seus ângulos correspondentes são congruentes e seus lados correspondentes serão proporcionais, com base nisso conseguiram concluir o trabalho.

3. A imagem abaixo lado ilustra o campo com as hastes e os fios que foram marcados para representar os triângulos necessários ao estudo.

Modelo matemático:

Abaixo ilustraram os triângulos semelhantes destacados da montagem com os fios e hastes:

Figura 40 – Esquema de semelhança de triângulos



Fonte: dados da pesquisa/2022

Cálculos:

Como os triângulos são semelhantes puderam, armar uma proporção para determinar seus lados:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CD}$$

$$\frac{l}{5{,}18} = \frac{72{,}20}{5{,}30}$$

$$l \times 5{,}30 = 5{,}18 \times 72{,}20$$

$$5{,}30l = 373{,}996$$

$$l = 70{,}56 \text{ m}$$

Resultados:

O resultado obtido pelos alunos foi de 70,56 metros. Comparando com à medida que obtiveram ao medir diretamente o campo, que foi de 72,06 m, perceberam que a margem de erro foi de 1,5m, o que mostra um resultado muito próximo do tamanho real.

5.5 Discussão das atividades

O trabalho desenvolvido foi percebido como uma experiência bastante significativa para os alunos, visto que ao desenvolverem atividades práticas com aspecto investigativo como calcular a largura de um determinado lugar por meio de um mecanismo empírico e usando conteúdos curriculares como a semelhança de triângulos, o próprio aluno é capaz de perceber seu nível de aprendizado.

Por meio das duas práticas investigadas e desenvolvidas pelos alunos com a supervisão do professor orientador, foi possível inferir que os alunos de ambos os grupos conseguiram aplicar o conceito de semelhança de triângulos para determinar a largura da fossa aquática (experiência I) e a largura do campo de futebol (experiência II). Além disso, os resultados mostram que os alunos foram capazes de construir modelos matemáticos[2] apropriados para relacionar as medidas obtidas com a fita métrica e os valores desconhecidos a serem alcançados.

---

2 O termo “modelo matemático” usado no relatório de cada equipe faz referencia às figuras geométricas obtidas para esquematizar os triângulos e suas medidas. Não é usado com aquele sentido proposto pela Modelagem Matemática.

A percepção de que os triângulos envolvidos são semelhantes está relacionada ao princípio que diz que dois triângulos são semelhantes se seus ângulos correspondentes são congruentes e seus lados correspondentes proporcionais. Conforme diswcutido ao loingo desta pesquisa. Entretanto, se uma das duas condições for satisfeita, então os triângulos são semelhantes. Isto permite dar veracidade aos resultados obtidos pelos grupos de trabalho, já que nos dois casos eles se apoiam na relação entre os ângulos dos triângulos para obter suas conclusões.

Ao estabelecer a proporção entre os lados dos triângulos, percebemos que sempre se obtém equações com uma variável e os alunos mostraram habilidades na resolução, como exemplo, o desenvolvimento dos métodos realizados para alcançarem os valores das medidas deconhecidas. Merece atenção também o trabalho realizado com os números decimais (experiência I), onde os alunos realizam operações como adições, subtrações, multiplicações e divisões com facilidade.

Nos resultados obtidos na experiência II, realizaram comparações com os resultados obtidos nas etapas anteriores, o que permitiu que os mesmos pudessem analizar os trabalhos das demais equipes e obter suas próprias conclusões.

Após a obtenção dos resultados, os grupos sempre realizavam as medidas usando uma trena de 100 metros, o que lhes permitiam comparar o resultado obtido usando semelhanças e estipular uma margem de erro, podendo até excluí-lo dependendo do caso.

Nas diversas ações desenvolvidas pelos grupos de alunos, foi possível perceber que a aprendizagem ocorreu de forma significativa, pois os conceitos começaram a ser usados com bastante clareza na resolução de problemas propostos durante as atividades em sala de aula. Além disso, ficou evidente que após as

---

Na área das ciências aplicadas, um modelo matemático é um tipo de modelo científico que utiliza algum formulismo matemático para expressar relações, predições, variáveis, parâmetros, entidades e relações entre variáveis e/ou entidades ou operações.

O modelo matemático pode ser descrito como uma representação da realidade feita de maneira simples ou também pode ser descrito como uma interpretação de uma parte de um dado sistema, de acordo com conceitos mentais ou conceitos experimentais. Ou seja, ele faz a representação de apenas um contexto sobre um fragmento em relação ao todo. Fonte: https://conceito.de/modelo-matematico dinâmicas, os alunos ainda conseguiram resolver problemas similares, o que mostra que ocorreu a aprendizagem. Estas experiências apontam para a importância da utilização de diferenciadas formas de se encarar o processo de ensino aprendizagem, fazendo abordagens de formas eficazes de ensino.

Considerações finais

O objetivo maior desse trabalho foi propor uma pesquisa de modo a investigar a importância da confecção e utilização do Teodolito artesanal e sua aplicação no estudo de semelhança de triângulos e do feixe de paralelas cortadas por uma reta transversal relacionadas ao Teorema de Tales em uma turma da EJA composta por alunos do 8º e 9º anos do Ensino fundamental, de modo a instiga-los a uma aprendizagem baseadea na investigação de fenômenos de seu cotidiano.

Diante desta perspectiva, nos baseamos na metodologia da Experimentação investigativa, por meio da construção de materiais manipuláveis, a qual nos possibilitou abordar o método da investigação Matemática. Deste modo, buscamos alcançar como objetivos específicos, compreender como o funcionamento e manuseio do Teodolito confeccionado em sala de aula pode contribuir no aprendizado dos conceitos de semelhança e proporcionalidade, além de podermos observar o nível de desempenho dos alunos com relação aos cálculos e compreensão dos conceitos observados na comprovação do Teorema de Tales e ainda, identificarmos os possíveis desdobramentos e consequentes dificuldades e potencialidades desenvolvidas e percebidas pelos alunos, com relação à resolução de problemas e ao processo investigativo para a solução dos mesmos, com vista à compreensão do objeto de estudo em questão.

Como aprofundamento do conteúdo curricular, foi possível explorar o Teorema de Tales, de modo a percebe-lo como um alicerce para o aprendizado de outros conteúdos como a semelhança de triângulos e a trigonometria e ainda, os diversos enunciados atribuídos a Tales de Mileto, de acordo com a vasta bibliografia consultada. Por meio das atividades desenvolvidas pelos alunos com a supervisão do professor orientador, foi possivel promover ações de ensino e aprendizagem por meio de problemas que estimularam a investigação e o gosto pela leitura, o que coloca o aluno como sujeito do problema, estimulando-o a criar mecanismos para resolvê-lo.

Dentre as principais ações possibilitadas pela pesquisa, podemos destacar como pontos de estímulo dos conhecimentos prévios apresentados pelos alunos, a relação da História da Matemática com foco o Teorema de Tales, o desenvoimento da Unidade didática destacando aplicações cotidianas do Teorema de Tales, e ainda, avaliação da potencialidade da unidade didática para o desenvolvimento de conteúdos matemáticos.

Apontamos ainda, que o fator determinante para a realização e desenvolvimento desta pesquisa, foi a potencialidade do tema proposto, visto que, o objeto de conhecimento explorado, abrange vários conceitos e operações matemáticas, tais como a porcentagem, fração, função linear, regra de três, entre outros. Estes conceitos estão presentes em diversas situações cotidianas, como por exemplo, a compra e venda, culinária e construção civil. Além disso, sabe-se, por experiência, que existem casos em que os estudantes concluem a educação básica sem uma noção clara e um domínio operacional sobre tais conceitos.

A maneira como esta pesquisa se desenvolveu, nos possibilitou relacionar vários tipos de informações e conteúdos da disciplina Matemática, possibilitando com que os alunos realizassem comparações entre o instrumento construído de forma artesanal e o instrumento científico utilizado na área da atrelando a isso, uma interação entre o conhecimento científico sistematizado e o conhecimento empírico, enfatizando suas vivências e os conteúdos estudados em sala de aula.

Deste modo, puderam relacionar a teoria associada à prática, no sentido de construir um conhecimento mais sólido e duradouro e que evidencie aspectos culturais de sua realidade. Assim, o desenvolvimento do projeto possibilitou aos alunos, observar que, embora o Teodolito construido de forma artesanal apresente resultados com uma certa margem de erro em função de seu aspecto rústico, ainda assim é capaz de medir ângulos horizontais e verticais, estabelecer distâncias, estipular alturas, da mesma forma que o aparelho técnico com um custo muito baixo, possibilitando àqueles que não têm acesso ao aparelho científico, dispor de um artesanal.

Concluimos a pesquisa recomendando que outros pesquisadores interessados no assunto, possam se debruçar sobre esta temática, considerando a dinâmica possibilitada pela interação entre os alunos e professor orientador, de modo que ambos percebam que a construção e manuseio do material didático no ensino de trigonometria são argumentos essenciais para a concretização dos conhecimentos adquiridos na teoria, além de compreenderem a aplicabilidade dos conceitos trabalhados e a importância que a matemática tem em nosso cotidiano.

Referências

ALMEIDA, N. A. D. de. **Uma Análise da Apresentação do Teorema de Tales em Livros Didáticos do Nono Ano do Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Fluminense, RJ Brasil, 2013.

ALMEIDA, Dionara Freire & VIEIRA, Andrea Cristina. **Utilizando o Teodolito no Ensino da Trigonometria.** Universidade de Blumenau. Santa Catarina.

BLUMENTHAL, Gladis. **Os PCNs e o Ensino Fundamental em Matemática**: um avanço ou um retrocesso. Faculdade de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) . Porto Alegre (RS), 2013.

BEZERRA, J. **Teorema de Tales, Matemática.** Toda Matéria, 2019. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/tales-de-mileto>. Acesso em: 20/11/2022.

BONGIOVANNI, V. O Teorema de Tales: Uma ligação entre o geométrico e o numérico. **REVEMAT**, v. 2, n. 1, p. 94-106, 2007. UFSC, 2007. Accesado em 20/11/2022. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12993/12094>.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** 3. ed. SP. Brazil: Edgard Blucher Ltda, 2012. Trad. Helena Castro.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** – Proposta preliminar - 2ª versão revista. MEC. Brasília, DF, 2016.

BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E. **O teorema de tales por meio da utilização de maquetes sob a ótica da teoria da aprendizagem significativa: contribuições para o ensino de matemática.** Dissertação de mestrado. 2012.

CASTELNUOVO, E. ***Didática de la matemática moderna*.** México, DF: Trillas, 2007.

CERQUEIRA, J. B. FERREIRA, E. M. B. **Recursos Didáticos na Educação Especial.** InstitutoBenjamim Constante, Rio de Janeiro, 2007. Disponível em: http://www.ibc.gov.br. Acesso em 22/11/2022.

CURY, Augusto. **Treinando a emoção para ser feliz.** Rio de Janeiro: Sextante, 2007.

DANTAS, L. E.; MANOEL, E. J. (2005). **Conhecimento no desempenho de habilidades motoras: o problema do especialista motor.** In Tani, G. (Ed.). Comportamento motor: aprendizagem e desenvolvimento. Rio de Janeiro, RJ: Guanabara Koogan, 2005. p. 295-313.

DE OLIVEIRA GONÇALVES, Daiane; RAMOS, Aline Costa; MORENO, Angela Leite. **Material Manipulável ou Instrumento: O que realmente está sendo utilizado no ensino da Geometria Analítica Plana.** Sigmae, v. 6, n. 2, p. 54-61, 2018.

DORNELLES, Bruna Celene Marques; et al. **O ensino da Mtemática por meio do Teodolito horizontal caseiro**.: In: IV EIEMAT -Escola de Inverno de Educação

Matemática e II Encontro Nacional do PIBID - Matemática, 2014, Santa Maria - RS. Educação Matemática para o Século XXI: trajetória e perspectivas, 2014.

DUCK, Suely. **A crise no ensino de Matemática no Brasil** : Revista do professor de Matemática, v. 2, n. 4, 2004.

EVES, F. **Introdução à História da Matemática.** Campinas, SP: Editara da UNICAMP, 2004.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. Miniaurélio **Século XXI: O Minidicionário de Língua Portuguesa;** Coordenação de edição, Margarida dos Anjos, Maria Baird Ferreira...[et al.]. 4ª edição. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2000.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso dos materiais concretos e jogos no ensino da matemática. ***BOLEMA***, n.7, p. 5-10, 2012.

FIORENTINI, D. **Grupo de sábado: uma história de reflexão, investigação e escrita sobre a prática escolar em matemática.** In: FIORENTINI, D.; CRISTÓVÃO, E. M. (Org.). *Histórias e investigação de/em aulas de matemática*. Campinas, SP: Editora Alínea, 2009. p. 13–36.

GARNICA, A. V. M. **Pesquisa qualitativa e Educação (Matemática): de regulações, regulamentos, tempos e depoimentos.** Mimesis, Bauru, v. 22, n. 1, p. 35-48, 2001.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A Conquista da Matemática, 9o ano** : Ed. renovada. São Paulo: FTD, 2009.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática Completa** : 2a ed. Renovada. São Paulo: FTD, 2005.

HUISMAN, Denis. **Dicionário dos filósofos.** São Paulo: Martins Fontes, 2001.

HUON, Mallalieu. **História Ilustrada das Antiguidades: Guia básico para antiquários, colecionadores e apreciadores da arte**. São Paulo: Nobel, 1999.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e Realidade: 9º ano.** 6. ed. São Paulo: Atual, 2009.

IEZZI, Gelson. [et al.]. **Matemática: Ciências e Aplicações : volume 1:** ensino médio. 7 ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria :** 2a ed. Coleção Matemática Elementar. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

MOISE, E.; DOWNS, F. **Geometria Moderna.** SP. Brasil: Edgard Blucher Ltda, 1971. Vol 1. Trad. Renate G. Watanabe.

NACARATO, A. M. **Eu trabalho primeiro no concreto.** Revista de Educação Matemática. Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática: São Paulo, v.9, n.9 e 10, p.1-6, 2004-2005.

NASCIMENTO, Julia; CURI, Edda. **Ensino de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental no Brasil: o que dizem as pesquisas apresentadas no XII ENEM-2016.** Research, Society and Development, v. 7, n. 7, 2018.

NUNES, Claudinéa; MENDES, Adriane. **História da Matemática no Ensino Fundamental** : propostas de atividade. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, v. 12, 2016.

PEREIRA, A. C. C. **Teorema de Thales: uma conexão entre os aspectos geométrico e algébrico em alguns livros didáticos de matemática.** 2005. 133 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

PEREIRA, James; OLIVEIRA, Andreia. **Materiais manipuláveis e interação de estudantes nas aulas de Matemática envolvendo tópicos de geometria**: Ciência Educação, v. 22, n. 1, 2016.

POLYA, GEORGE. (1995). **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** Trad. Heitor Lisboa de Araújo. 2ª reimpressão. Rio de Janeiro.

ROSS, W. T. **Great ideas and Gems of Mathematics: Thales.** USA, 2014. Acessado em 23/11/2022. Disponível em: <http://natureofmathematics.wordpress.com/lecture-notes/thales/>.

SILVA, M. N. P. **Aplicações do teorema de Tales**. ; Brasil Escola. 2019. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/aplicacoes-teorema-tales.htm>. Acesso em: 15/11/2022.

SILVA, Ronnie, et al. **Obstáculos no ensino-aprendizagem da Matemática nos anos finais do ensino fundamental**: Revista Ciência Saberes, v. 4, n. 4, 2013.

TURRIONI, A. M. S.; PEREZ, G. **Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores.** In: LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2012. p. 57-76.

VARIZO, Z. C. M. O. **Laboratório de Educação Matemática do IME/UFG: do sonho à realidade**. In: Anais do IX ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte – MG, 18 a 21 de Julho, 2007. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/index.htm. Acesso em: 12 dez. 2022.

VASCONCELOS, E. V. **Laboratório de ensino de Matemática: uma experiência na UFBA**. Departamento de Matemática – UFBA. Disponível em: http://www.lema.ufba.br/historico.pdf . Acesso em: 15 dez. 2022.