

SUPERANDO OBSTÁCULOS NA LEITURA DE IMAGENS: UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA 3D PARA MEDIAR DEMONSTRAÇÕES DE RELAÇÕES DA GEOMETRIA ESPACIAL

Lana Priscila Souza¹
Michele Maria Paulino Carneiro²
Cristiana Maria dos Santos Silva³
Auzuir Ripardo de Alexandria⁴
Sandro César Silveira Jucá⁵

RESUMO

A pesquisa aborda o desafio da abstração em Matemática, reconhecendo a dificuldade na compreensão de demonstrações de relações no ensino básico e destacando a Geometria Espacial como um campo propício para o desenvolvimento dessa abstração, visto que tal processo não se restringe ao ensino superior, mas começa já no contato com conceitos geométricos elementares presentes desde o início da escolarização. Focada nas demonstrações das relações utilizadas no cálculo da diagonal do paralelepípedo e do apótema do tetraedro regular, a pesquisa aponta que, embora essas demonstrações não envolvam cálculos complexos, demandam uma abstração espacial desafiadora para muitos alunos. A proposta é utilizar o GeoGebra 3D como ferramenta de visualização para mediar essas demonstrações, superando obstáculos didáticos, especialmente relacionados à leitura de imagens em Geometria Espacial. Assim, o objetivo geral é proporcionar uma abordagem prática para o cálculo dessas relações, incentivando uma compreensão mais profunda por parte dos alunos desde o ensino básico. Espera-se que esta pesquisa possa fomentar a utilização do recurso apresentado para mediar demonstrações em Geometria Espacial e superar obstáculos relativos à “leitura de imagens” por meio da manipulação das mesmas, o que poderá impactar positivamente o desenvolvimento de um raciocínio que também privilegie a visão espacial.

Palavras-chave: Abstração, Geometria Espacial, GeoGebra 3D.

INTRODUÇÃO

Reconhecer a existência de desafios e obstáculos no ensino e na aprendizagem de Matemática é o primeiro passo para superá-los. Segundo Pais (2019), os desafios que surgem durante a geração de conceitos matemáticos geralmente não são articulados de

¹Doutoranda em Ensino (RENOEN) pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), lanaprisilasouza@yahoo.com.br;

² Doutoranda em Ensino (RENOEN) pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), michelepaulino12@gmail.com;

³ Doutoranda em Ensino (RENOEN) pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), cristiana.maria.santos68@aluno.ifce.edu.br;

⁴ Doutor, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), auzuir@ifce.edu.br;

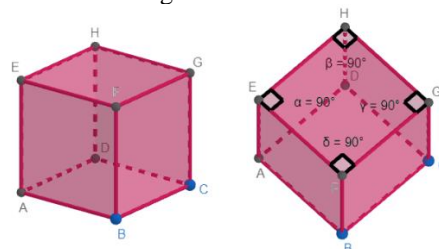
⁵ Professor orientador: Doutor, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), sandrojuca@ifce.edu.br.

forma explícita no conhecimento final, mas se manifestam nas dificuldades enfrentadas durante o processo criativo. Esse processo exige um componente que pode se tornar um obstáculo: a abstração. Ao entrar em contato com um conceito novo, o aluno pode vivenciar uma “revolução interna”, que desestabiliza o equilíbrio entre o conhecimento prévio e o novo saber em construção (Pais, 2019).

No contexto histórico das ciências, a noção de obstáculo epistemológico é relevante, mas, pedagogicamente, é mais adequado referir-se a obstáculos didáticos (Pais, 2019). Tais obstáculos, segundo o autor, são “conhecimentos relativamente estabilizados no plano intelectual, que podem dificultar a evolução da aprendizagem escolar” (Pais, 2019, p. 35). Nesse sentido, Pais (2019) recomenda atenção às diferentes fontes de dificuldade na aprendizagem e destaca a importância de compreender o processo de reorganização intelectual, no qual o novo conhecimento se integra de maneira harmoniosa com os conhecimentos prévios, pois é nesse momento que os obstáculos se tornam mais visíveis.

Pais (2019) lista exemplos de obstáculos didáticos no ensino de Matemática, referindo-se, por exemplo, à aprendizagem da Geometria Espacial, em que a utilização de representações em perspectiva pode dificultar a compreensão. Um cubo representado em perspectiva paralela (Figura 1), por exemplo, frequentemente apresenta sua face superior como um paralelogramo com ângulos que não parecem retos, embora, na realidade, esses ângulos sejam retos. A experiência dos autores corrobora as palavras de Pais (2019, p. 37), ao afirmar que “a realização ou leitura desse desenho não é uma atividade evidente”.

Figura 1 – Cubo



Fonte: Os autores (2024).

É importante ressaltar que, se o aluno concentrar sua atenção nos detalhes específicos do desenho, pode ter dificuldade em compreender as propriedades geométricas do sólido representado. No caso da Geometria Espacial, isso significa que os

alunos nem sempre conseguem visualizar elementos essenciais para realizar uma demonstração ou resolver uma questão. Assim, a leitura de imagens pode se tornar um obstáculo didático, impedindo o progresso em problemas que exigem mais do que a simples aplicação de fórmulas. Pais (2019, p. 37) ilustra “a existência de dificuldades que o aluno pode ter no estudo da Geometria Espacial, quando é preciso realizar a leitura de um desenho em perspectiva”, e pontua a possibilidade de “haver confusão entre as particularidades dos traços do desenho e os elementos geométricos por eles representados”.

Pais (2019) também menciona os “obstáculos iniciais”, que são aqueles que surgem das primeiras experiências e que, quando resultam de ações, são realizados de forma intuitiva, sem uma análise ou avaliação crítica. Esses obstáculos estão associados “à forma simplificada com que os conteúdos são apresentados nos livros didáticos, nos quais o formalismo não corresponde aos desafios do fenômeno cognitivo” (Pais, 2019, p. 38). Nesse contexto, não é incomum que livros didáticos exijam o desenvolvimento de uma intuição ou capacidade de abstração baseada apenas na leitura de imagens e nas informações apresentadas, o que pode gerar dificuldades para os alunos.

Assim, é fundamental que os materiais didáticos ofereçam um equilíbrio entre a apresentação visual e a explicação conceitual, permitindo que os alunos desenvolvam uma compreensão sólida dos conceitos. Com base nisso, os autores propõem uma abordagem que permita além da visualização, também a manipulação de imagens para facilitar a compreensão da relação da diagonal de um paralelepípedo e, em seguida, do apótema de um tetraedro regular. O presente texto tem como objetivo geral **proporcionar uma abordagem prática para o cálculo dessas relações, incentivando uma compreensão mais profunda por parte dos alunos desde o ensino básico.**

A abordagem proposta visa tornar o aprendizado mais dinâmico e envolvente, ajudando os alunos a desenvolver uma compreensão mais profunda de conceitos abstratos, indo além da simples memorização de fórmulas e procedimentos. Espera-se que esta pesquisa incentive o uso de recursos tecnológicos para mediar demonstrações em Geometria Espacial, buscando superar obstáculos relacionados à leitura de imagens por meio da manipulação interativa das figuras. Isso poderá impactar positivamente o desenvolvimento de um raciocínio que valorize a visão espacial e possibilitar a construção de materiais que possam ser utilizados para demonstrações de relações envolvendo outros sólidos.

METODOLOGIA

O presente estudo busca oferecer uma abordagem prática para o cálculo da diagonal do paralelepípedo e do apótema do tetraedro regular, incentivando uma compreensão mais profunda por parte dos alunos desde o Ensino Básico. Para alcançar esse objetivo, os autores realizaram uma análise comparativa da forma como alguns livros didáticos apresentam essas duas fórmulas e, em seguida, propõem duas construções feitas com o GeoGebra 3D, destacando elementos importantes para uma abordagem mais visual, dinâmica e interativa desses conceitos por meio do *software*.

A pesquisa é de natureza aplicada, pois propõe o uso do GeoGebra 3D para criar construções que visam melhorar o ensino e a compreensão dos conceitos geométricos abordados. Conforme Prodanov e Freitas (2013, p. 51), a pesquisa aplicada “objetiva gerar conhecimentos para aplicação prática dirigidos à solução de problemas específicos”. O foco em soluções práticas para o ensino sugere que o conhecimento gerado será utilizado diretamente para resolver o problema concreto de dificuldade de compreensão desses conceitos pelos alunos.

Em termos de objetivos, a pesquisa é caracterizada como descritiva, pois “o pesquisador apenas registra e descreve os fatos observados sem interferir neles” (Prodanov; Freitas, 2013, p. 52). O estudo pretende analisar como os livros didáticos abordam as fórmulas, oferecendo, conforme Gil (2008), uma visão detalhada e aprofundada dos dados coletados.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os autores deste artigo analisaram três livros de Matemática, selecionados com base na popularidade dos títulos e/ou dos autores entre os estudantes, visando fornecer dados sobre as demonstrações das relações utilizadas no cálculo da diagonal do paralelepípedo e do apótema do tetraedro regular. O Quadro 1 apresenta os títulos dos livros, os respectivos autores e o ano de publicação das edições escolhidas.

Quadro 1 – Livros escolhidos para análise

Título	Autor(es)	Ano de Publicação
--------	-----------	-------------------

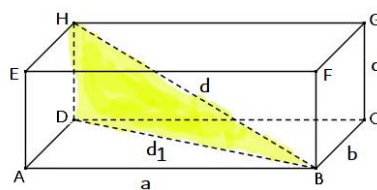
A Matemática do Ensino Médio, Volume 2	Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado	2006
Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 10	Oswaldo Dolce e José Nicolau Pompeo	2013
Prisma Matemática: Geometria	José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior e Paulo Roberto Câmara de Sousa	2020

Fonte: Os autores (2024)

Inicialmente, acredita-se ser necessário que se destaque a definição dada pelos autores do presente artigo dos dois elementos a serem estudados:

Definição 1. A diagonal de um paralelepípedo é um segmento de reta que liga dois vértices opostos, em faces diferentes. Se o segmento de reta em questão liga dois vértices opostos, em uma mesma face, tem-se a representação da diagonal da face na qual o segmento se encontra. Assim, conforme Figura 2, d representa a diagonal do paralelepípedo, enquanto d_1 representa a diagonal da face $ABCD$. Seguindo essas definições, podemos inferir que o paralelepípedo da figura possui ainda três outras diagonais: AG , CE e DF . Além disso, cada uma das outras cinco faces ($FEAB$, $BCGF$, $FGHE$, $EADH$ e $HDCG$) também possuem sua própria diagonal.

Figura 2 – Diagonais de um paralelepípedo

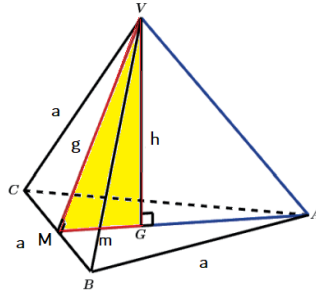


Fonte: Os autores (2024)

Definição 2. O apótema de um tetraedro regular de aresta a é a altura do triângulo equilátero que forma cada uma de suas faces. A Figura 3 indica o apótema do tetraedro, na face BCV , que é representado pela letra g . Além do apótema, a figura destaca os segmentos h e m que representam, respectivamente, a altura do tetraedro e o apótema da base, e possibilitam a escrita de uma fórmula que relaciona esses três elementos. De forma análoga ao que se pode inferir no paralelepípedo, a figura do tetraedro permite que sejam evidenciados os apótemas das outras três faces (ABV , ACV e ABC). Além disso, a

dependem da face que se analisa como parâmetro, tem-se a altura do tetraedro e o apótema do triângulo da base em outras posições.

Figura 3 – Elementos de um Tetraedro Regular



Fonte: Os autores (2024).

Poucos autores definem a diagonal de um paralelepípedo. Como a definição de diagonal em sólidos pode ser considerada uma extensão da definição em figuras planas, acredita-se que muitos autores assumem essa definição como algo intuitivo para os alunos. Lima *et al.* (2006) não definem explicitamente a diagonal do paralelepípedo, tratando-a como um exemplo de aplicação da relação de distância entre dois pontos no plano. Os autores resolvem o problema do cálculo da diagonal considerando o triângulo retângulo interno ao paralelepípedo, como destacado na Figura 2.

Dolce e Pompeo (2013) apresentam a diagonal do paralelepípedo juntamente com a diagonal das faces e a área total, mas sem definir as diagonais, focando apenas na definição da área total.

Já Bonjorno, Giovanni Júnior e Sousa (2020) sequer apresentam os cálculos para determinar a diagonal de um paralelepípedo. Os autores parecem presumir que os alunos compreendem o conceito e o apresentam apenas em um exercício em que fornecem o valor da diagonal do paralelepípedo e da base, pedindo que os alunos determinem as três dimensões do sólido, dada a soma das medidas de todas as suas arestas.

Em relação ao tetraedro regular, Lima *et al.* (2006) o definem como uma pirâmide triangular regular de base ABC e vértice V , mas não mencionam o apótema. Dolce e Pompeo (2013) definem o tetraedro regular como aquele com as seis arestas congruentes e descrevem o apótema de uma pirâmide regular como a altura da face lateral em relação ao lado da base, sendo os cálculos relacionados evidenciados nos exercícios.

Bonjorno, Giovanni Júnior e Sousa (2020) abordam o tema de maneira mais completa, definindo o apótema da base, o apótema da pirâmide e calculando as relações

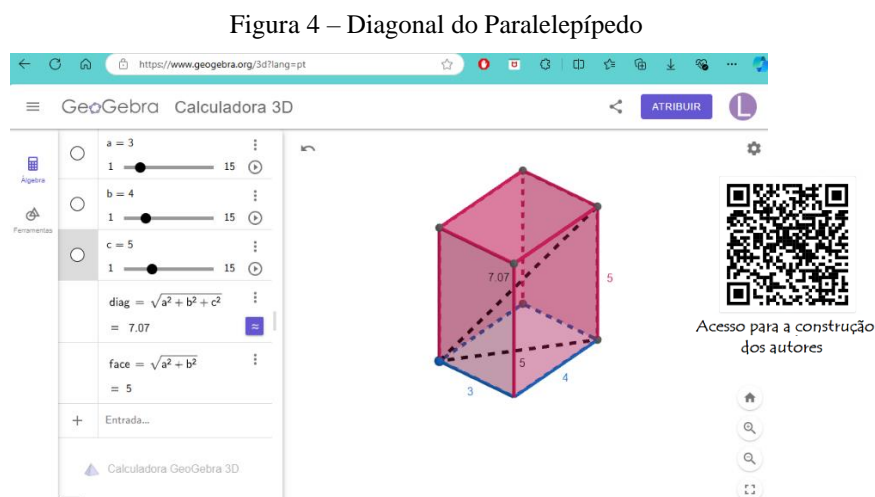
entre os apótemas e a altura da pirâmide por meio de um triângulo retângulo, como ilustrado mais adiante pelos autores deste trabalho (Figura 4). Eles também propõem cálculos envolvendo apótemas tanto em atividades resolvidas quanto em exercícios propostos.

A análise sugere uma variação significativa na forma como os autores abordam as fórmulas da diagonal do paralelepípedo e do apótema do tetraedro regular, considerando a intuição dos alunos, sua experiência prévia ou uma abordagem mais formal, mesmo que sem definição explícita. Em relação ao apótema, há uma tendência de maior detalhamento por parte dos autores que fornecem definições mais completas e exercícios práticos. Essa variação nas abordagens pode indicar uma lacuna no ensino tradicional de Geometria Espacial, em que conceitos como diagonal e apótema são frequentemente apresentados de maneira implícita ou fragmentada.

A introdução de ferramentas visuais como o GeoGebra pode ajudar a preencher essa lacuna, proporcionando aos alunos uma visão mais clara e interativa desses conceitos, facilitando a compreensão tanto da diagonal quanto do apótema em contextos tridimensionais. As construções que serão apresentadas a seguir permitem uma visualização mais clara das relações, tornando os conceitos mais acessíveis e intuitivos, especialmente para alunos que têm dificuldade em visualizar a Geometria Espacial apenas por meio de imagens em livros, descrições textuais ou fórmulas.

O enfoque proposto sugere que o uso de recursos tecnológicos pode complementar e aprimorar as abordagens tradicionais encontradas nos livros didáticos.

Construção 1 – Diagonal do Paralelepípedo (Figura 4):



Fonte: Os autores (2024).

Os passos para a realização dessa construção são:

1. Abra o GeoGebra 3D;
2. Na barra de entrada, insira $a = 5$, $b = 3$ e $c = 4$, e isso criará controles deslizantes;
3. Clicar, a partir de $:$, em configurações, para editar os controles deslizantes (sugere-se: mínimo 1, máximo 15 e incremento 1);
4. Defina os pontos $A = (0, 0, 0)$, $B = (a, 0, 0)$, $C = (a, b, 0)$, $D = (0, b, 0)$ e $H = (0, 0, c)$;
5. Com a ferramenta *Polígono* conecte os pontos A , B , C , D e A para formar a base do paralelepípedo;
6. Usando a ferramenta *Prisma* clique no polígono $ABCD$ da base e no ponto H para determinar o paralelepípedo de arestas a , b e c ;
7. No campo *entrada*, digite: “Diagonal = Segmento(A , (a , b , c))” para obter o segmento que representará a diagonal do paralelepípedo;
8. Em *entrada*, insira “diag = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ”, para que o cálculo do valor da diagonal apareça;
9. Em *entrada*, digite: “Face = Segmento(A , (a , b , 0))” para obter o segmento que representará a diagonal da base (uma das faces);
10. Em *entrada*, insira “face = $\sqrt{a^2 + b^2}$ ”, para visualizar a diagonal da base;
11. Retirar “exibir eixos”, “exibir plano” e definir todos os objetos como auxiliares (com exceção de a , b , c , diag e face).

Os alunos poderão ajustar os valores de a , b , e c usando os controles deslizantes. À medida que os valores mudam, as diagonais são recalculadas e exibidas dinamicamente, permitindo a visualização da relação entre as dimensões e os comprimentos.

Construção 2 – Apótema do Tetraedro Regular (Figura 5):

Figura 5 – Apótema do Tetraedro Regular

14. Retirar “exibir eixos”, “exibir plano” e definir todos os objetos como auxiliares (com exceção de a , m , g , h e apótema).

Os alunos poderão ajustar os valores de a usando o controle deslizante. À medida que o valor muda, m , g e h que representam, respectivamente, apótema da base, apótema do tetraedro e altura do tetraedro, serão recalculadas e exibidas dinamicamente, permitindo, também, que os alunos verifiquem a relação $g = \sqrt{m^2 + h^2}$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

É fundamental que os alunos pratiquem a demonstração de algumas fórmulas matemáticas e resolvam cálculos que as envolvem. No entanto, é igualmente crucial que os autores dos livros e os professores estejam atentos aos desafios gerados pela leitura de imagens. Dificuldades decorrentes de uma leitura incorreta podem prejudicar ou até impossibilitar a compreensão de alguns alunos. Além disso, a estratégia de apresentação de fórmulas com foco nos cálculos pode facilitar a memorização, mas pode não explorar suficientemente a compreensão visual, do ponto de vista do raciocínio espacial.

Ao comparar as representações visuais estáticas presentes nos livros com as representações dinâmicas proporcionadas pelo GeoGebra, percebe-se que uma abordagem gráfica e interativa possibilita uma maior conexão entre a fórmula abstrata e a figura tridimensional. Isso sugere que uma representação que permita a manipulação dos elementos da imagem pode complementar as explicações, facilitando a compreensão por parte dos alunos. Nesse contexto, acredita-se que o uso do GeoGebra 3D como ferramenta de visualização para mediar a demonstração das relações envolvendo a diagonal do paralelepípedo e o apótema do tetraedro regular pode aprimorar as abordagens tradicionais encontradas nos livros.

As construções propostas pelos autores permitem que os alunos manipulem as imagens, visualizando-as sob diferentes ângulos, o que pode facilitar a compreensão. Diante disso, espera-se que este artigo incentive o uso do GeoGebra 3D como um recurso eficaz para mediar demonstrações em Geometria Espacial, especialmente como uma forma de superar obstáculos relacionados à leitura de imagens. A prática docente dos autores sugere que essa abordagem tem o potencial de impactar positivamente o desenvolvimento de um raciocínio que integre e valorize a visão espacial.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela concessão da bolsa de doutorado às três primeiras autoras. O quarto autor agradece ao CNPq pelo suporte aos projetos (processos 305359/2021-5 e 442182/2023-6) e à Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP) pelo apoio ao projeto concedido pela Chamada Universal UNI-0210-00699.01.00/23. O quinto autor, orientador do trabalho, agradece ao CNPq pela bolsa de Produtividade em Desenvolvimento Tecnológico e Extensão Inovadora (DT) e à FUNCAP pelo suporte ao projeto concedido pela Chamada Universal UNI-0210-00533.01.00/23.

REFERÊNCIAS

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; SOUSA, P. R. C. de. **Prisma matemática: Geometria**. São Paulo: FTD, 2020.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Espacial, Posição e Métrica**, v. 10. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.

GIL, A. C. **Como elaborar projeto de pesquisa**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**, v. 2. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019. Edição Kindle.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. de. **Metodologia do Trabalho Científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.