EXPLORAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS POLIGONAIS GENERALIZADOS VIA SOFTWARE GEOGEBRA: IMPLICAÇÕES PARA O ENSINO E A FORMAÇÃO DO PROFESSOR

Renata Teófilo de Sousa [1]
Francisco Evamar Barros [2]
Francisco Régis Vieira Alves [3]

RESUMO

Em alguns casos, temas específicos, como os números poligonais e sua visualização recebem menos ênfase nas licenciaturas tradicionais em matemática, sendo uma discussão limitada ou ausente no decorrer da formação do professor de matemática. Entretanto, seu estudo e discussão pode fornecer implicações mais amplas na pesquisa matemática, em que padrões e relações descobertos ao explorá-los podem levar a novas descobertas e teoremas em matemática pura. Assim, este trabalho tem como objetivo explorar a visualização de números poligonais, estendendo seu alcance para índices inteiros, por meio do software GeoGebra. O foco da discussão recai sobre as fórmulas de termo geral, recorrência e propriedades dos números poligonais, em que descrevemos uma proposta para o ensino. Para estruturarmos esta proposta didática, utilizamos a Teoria das Situações Didáticas enquanto norteadora da sequência de ensino e a Engenharia Didática, como metodologia de pesquisa, dada a estreita relação entre estas correntes no âmbito da Didática da Matemática francesa. Neste percurso, destacamos também a importância da abordagem a partir da visualização, o que permite a análise de propriedades relacionadas aos números poligonais, tanto para índices positivos quanto negativos. Vale ressaltar que, embora tratemos de números poligonais, suas estruturas não formam polígonos regulares na extensão negativa. Este estudo enriquece a compreensão acerca da composição dos números figurados e sugere implicações relevantes para o ensino de matemática e a formação inicial de professores. Destacamos o GeoGebra como uma ferramenta essencial para a exploração visual desses conceitos e a investigação de características e propriedades.

Palavras-chave: Números poligonais, GeoGebra, Ensino de Matemática, Formação de Professores.

INTRODUÇÃO

Os números poligonais são uma classe de números figurados que representam formas geométricas poligonais e têm uma importância significativa na História da

[1] Doutoranda em Ensino (Renoen), do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - CE, rtsnaty@gmail.com;
[2] Doutorando em Ensino (Renoen), do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - CE, fco.evamar@gmail.com;
[3] Professor orientador: Doutor em Educação (UFC), Docente do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - CE, Bolsista de Produtividade CNPq- PQ2, fregis@ifce.edu.br.

Matemática (Burton, 2011). Eles foram estudados desde a antiguidade por matemáticos como Pitágoras e Fermat, e têm aplicações que vão desde a Teoria dos Números até a Geometria e a Combinatória (Forhan, 2007). Apesar de sua relevância, temas específicos como os números poligonais e sua visualização recebem menos ênfase nas licenciaturas tradicionais em matemática. Esse descompasso resulta em uma discussão limitada ou mesmo ausente no decorrer da formação do professor de matemática, o que pode restringir a capacidade dos futuros educadores de transmitir conceitos abstratos de maneira visual e intuitiva (Cifuentes; Santos, 2020).

Estudar e discutir os números poligonais pode fornecer implicações mais amplas na pesquisa matemática, uma vez que padrões e relações descobertos ao explorá-los podem levar a novas descobertas e teoremas em matemática pura (Abramovich, 2023). Portanto, a inclusão desse tema na formação inicial de professores é essencial para enriquecer o ensino e fornecer uma base sólida para a exploração matemática.

A visualização matemática desempenha um papel crucial no entendimento de conceitos abstratos. Ferramentas que permitem a exploração visual desses conceitos podem transformar a forma como os estudantes compreendem e interagem com a matemática (Sousa; Alves, Aires, 2022). O *software* GeoGebra é uma dessas ferramentas, permitindo uma visualização dinâmica e interativa dos números poligonais (Barros *et al.*, 2024). O uso do GeoGebra justifica-se pela sua capacidade de facilitar a construção e manipulação de figuras geométricas, sendo particularmente útil neste estudo.

A visualização matemática auxilia no entendimento de conceitos já conhecidos, podendo levar à descoberta de novos padrões e teoremas. Explorar os números poligonais através de uma abordagem visual possibilita aos estudantes e professores identificar relações e propriedades que não são imediatamente aparentes através de métodos analíticos tradicionais (Alves; Barros, 2019).

A partir do exposto, este trabalho tem como objetivo explorar a visualização dos números poligonais utilizando o *software* GeoGebra, estendendo o estudo para índices inteiros (positivos e negativos), a partir de uma sequência didática fundamentada na Teoria das Situações Didáticas e na Engenharia Didática.

A metodologia adotada baseia-se na Engenharia Didática (ED) (Artigue, 2009), especificamente nas suas duas fases iniciais. A primeira fase envolve a análise preliminar, enquanto a segunda consiste na concepção e análise *a priori* de uma situação didática, visando uma previsão de sua implementação em sala de aula. Utilizando a Teoria das

Situações Didáticas (Brousseau, 1997) como norteadora, a proposta busca uma exploração dos números poligonais através de atividades interativas com o GeoGebra.

METODOLOGIA: ENGENHARIA DIDÁTICA

A Engenharia Didática (ED), que é uma abordagem que visa o desenvolvimento e a análise de dispositivos didáticos em situações de ensino e aprendizagem, sendo estruturada em quatro fases: (i) análise preliminar, (ii) concepção e análise *a priori*, (iii) experimentação e (iv) análise *a posteriori* e validação. Esta metodologia de pesquisa tem sua gênese nos estudos em Didática da Matemática e investiga a eficácia de sequências didáticas específicas e a aprendizagem dos estudantes (Artigue, 2009; Brousseau, 2008).

O GeoGebra foi escolhido como ferramenta para a exploração dos números poligonais devido à sua capacidade de criar representações dinâmicas e interativas de conceitos matemáticos. Suas funcionalidades permitem a construção de figuras geométricas complexas e a manipulação interativa, facilitando a compreensão dos padrões e relações inerentes aos números poligonais (Alves, 2019; Barros *et al.*, 2024).

No estudo, foram utilizadas várias funcionalidades do GeoGebra, incluindo: construção de polígonos, manipulação de pontos, visualização na janela 3D, cálculos automatizados, entre outras. Os procedimentos adotados para a exploração dos números poligonais incluíram as seguintes etapas: (a) *Construção Inicial*: Uso do GeoGebra para construir visualmente os números poligonais básicos, como triângulos, quadrados, e pentágonos; (b) *Extensão para índices inteiros*: incluir números poligonais com índices inteiros, tanto positivos quanto negativos, utilizando a manipulação de parâmetros no GeoGebra; (c) *Visualização 2D*: criação de visualizações 2D para números poligonais tradicionais; (d) *Análise de propriedades*: uso de ferramentas do GeoGebra para analisar propriedades como áreas, perímetros e relações entre os números poligonais.

A situação didática proposta é fundamentada na TSD e na ED. A TSD foi utilizada para estruturar a interação entre os alunos e o conhecimento matemático através de situações didáticas específicas (Brousseau, 2008), organizadas conforme as duas primeiras fases da ED. Na situação proposta pretende-se relacionar números triangulares e poligonais com a extensão para índices negativos com uma visualização no GeoGebra.

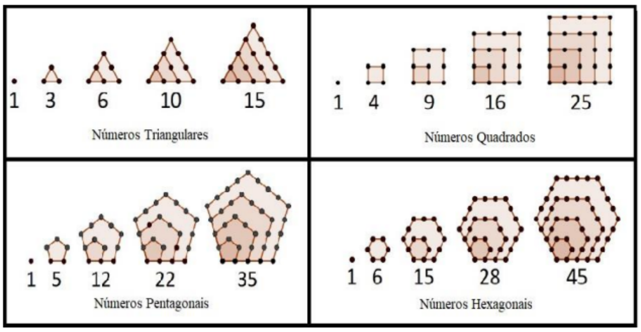
FASE 1: ANÁLISE PRELIMINAR

Os números poligonais e a visualização matemática a partir de *softwares*

Os números figurados são estudados desde os tempos pitagóricos, com o objetivo de relacionar Aritmética e Geometria. Esses números, quando representados por pontos, formam figuras geométricas. Os pitagóricos, por exemplo, usavam pedras para criar as configurações desejadas (Roque 2012) e acreditavam que os números possuíam propriedades místicas e seguiam a filosofia de que “Tudo é número”.

Existem infinitos tipos de números figurados. Aqui focamos particularmente nos números poligonais, que são sequências de números que representam polígonos regulares (Nobre; Rocha, 2018). Por exemplo, se a sequência representa um triângulo equilátero $(1,3,6,10,...)$, seus termos são chamados de números triangulares; se representar um quadrado, $(1,4,9,16,...)$ serão ditas números quadrados, e assim por diante (Figura 1):

Figura 1 – Modelos de números poligonais.



Fonte: Nobre e Rocha (2018).

Autores como Deza e Deza (2012) e Conway e Guy (1996) expandiram o estudo dos números figurados, abordando dimensões arbitrárias, números além dos poligonais e piramidais, e sua extensão para índices negativos. Contudo, a ausência de construções para algumas dessas configurações compromete o sentido dos números figurados, que representam figuras. Este trabalho, portanto, foca na visualização de números poligonais estendidos para índices inteiros.

Diante disso, apresentamos a definição descrita por Deza e Deza (2012):

Definição 1. (Números poligonais) Dado um $m \in \bullet, m \geq 3$ como sendo o lado de um polígono regular e $n \in \bullet$, a forma geral para o *n*-ésimo número poligonal S_m é dada por:

$$S_m(n) = \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2}$$

com valores iniciais definidos como $S_m(0) = 0$ e $S_m(1) = 1$.

Os primeiros números poligonais e suas formas gerais são (Figura 2):

Figura 2 – Forma geral dos primeiros números poligonais

Name	Formula												Sloane
Triangular	$\frac{1}{2}(n^2+n)$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	A000217
Square	$\frac{1}{2}(n^2-0\cdot n)$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	A000290
Pentagonal	$\frac{1}{2}(3n^2-1\cdot n)$	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176	A000326
Hexagonal	$\frac{1}{2}(4n^2-2n)$	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231	A000384
Heptagonal	$\frac{1}{2}(5n^2-3n)$	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235	286	A000566
Octagonal	$\frac{1}{2}(6n^2-4n)$	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280	341	A000567
Nonagonal	$\frac{1}{2}(7n^2-5n)$	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325	396	A001106
Decagonal	$\frac{1}{2}(8n^2-6n)$	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370	451	A001107
Hendecagonal	$\frac{1}{2}(9n^2-7n)$	1	11	30	58	95	141	196	260	333	415	506	A051682
Dodecagonal	$\frac{1}{2}(10n^2-8n)$	1	12	33	64	105	156	217	288	369	460	561	A051624
Tridecagonal	$\frac{1}{2}(11n^2-9n)$	1	13	36	70	115	171	238	316	405	505	616	A051865
Tetradecagonal	$\frac{1}{2}(12n^2-10n)$	1	14	39	76	125	186	259	344	441	550	671	A051866
Pentadecagonal	$\frac{1}{2}(13n^2-11n)$	1	15	42	82	135	201	280	372	477	595	726	A051867
Hexadecagonal	$\frac{1}{2}(14n^2-12n)$	1	16	45	88	145	216	301	400	513	640	781	A051868
Heptadecagonal	$\frac{1}{2}(15n^2-13n)$	1	17	48	94	155	231	322	428	549	685	836	A051869
Octadecagonal	$\frac{1}{2}(16n^2-14n)$	1	18	51	100	165	246	343	456	585	730	891	A051870
Nonadecagonal	$\frac{1}{2}(17n^2-15n)$	1	19	54	106	175	261	364	484	621	775	946	A051871
Icosagonal	$\frac{1}{2}(18n^2-16n)$	1	20	57	112	185	276	385	512	657	820	1001	A015872
Icosihenagonal	$\frac{1}{2}(19n^2-17n)$	1	21	60	118	195	291	406	540	693	865	1056	A015873
Icosidigonal	$\frac{1}{2}(20n^2-18n)$	1	22	63	124	205	306	427	568	729	910	1111	A015874
Icositrigonal	$\frac{1}{2}(21n^2-19n)$	1	23	66	130	215	321	448	596	765	955	1166	A015875
Icositetragonal	$\frac{1}{2}(22n^2-20n)$	1	24	69	136	225	336	469	624	801	1000	1221	A015876
Icosipentagonal	$\frac{1}{2}(23n^2-21n)$	1	25	72	142	235	351	490	652	837	1045	1276	
Icosihexagonal	$\frac{1}{2}(24n^2-22n)$	1	26	75	148	245	366	511	680	873	1090	1331	
Icosiheptagonal	$\frac{1}{2}(25n^2-23n)$	1	27	78	154	255	381	532	708	909	1135	1386	
Icosioctagonal	$\frac{1}{2}(26n^2-24n)$	1	28	81	160	265	396	553	736	945	1180	1441	
Icosinonagonal	$\frac{1}{2}(27n^2-25n)$	1	29	84	166	275	411	574	764	981	1225	1496	
Triacontagonal	$\frac{1}{2}(28n^2-26n)$	1	30	87	172	285	426	595	792	1017	1270	1551	

Fonte: Deza e Deza (2012).

Para estender essa noção para índices negativos, basta observar que para *n* natural a forma $S_m(-n)$ fornecerá tais índices, daí sua forma geral pode ser representada por:

$$S_m(-n) = \frac{(-n)^2(m-2)-(-n)(m-4)}{2}$$

$$S_m(-n) = \frac{(m-2)n^2+(m-4)n}{2}$$

com $m \in \bullet, m \geq 3$ e $n \in \bullet$

Em particular, Deza e Deza (2012) apresentam a forma geral dos números triangulares de índices negativos $(0,1,3,6,...)$ como:

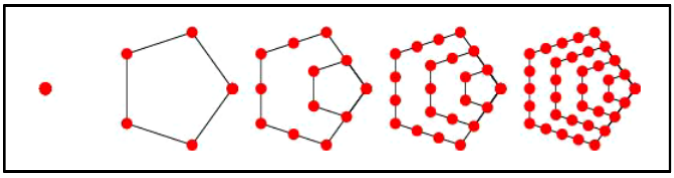
$$S_3(-n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Podemos observar que $S_3(-n) = S_3(n-1)$ ou seja, um números triangular de índice negativo é igual ao anterior do seu análogo de índice positivo, por exemplo: $S_3(-3) = 3$ Para números quadrados, temos $(1,4,9,16,...)$ com valores que coincidem com a dos números quadrados de índices negativos e forma geral dada por:

$$S_4(-n) = (-n)^2$$

Com esses exemplos torna-se simples apresentar as formas gerais para esses números e a noção de visualização não se altera, pois os números apresentados possuem valores semelhantes aos seus análogos de índices negativos. Contudo, basta analisar, por exemplo, os números pentagonais de índices positivos e negativos para que a ideia da visualização se perca. Observe que os números pentagonais com índices positivos, possuem sua forma geral dada por $S_5(n) = \frac{n(3n-1)}{2}$ que gera a sequência $S_5 = (1,5,12,22,...)$ (Figura 3):

Figura 2 – Primeiros cinco números pentagonais.

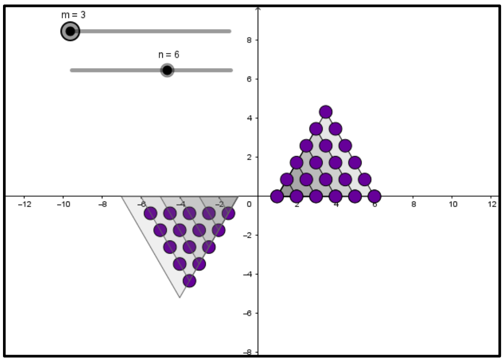


Fonte: Deza e Deza (2012).

Por outro lado, os números pentagonais de índices negativos possuem forma geral dada por $S_5(-n) = \frac{n(3n+1)}{2}$ com $n \geq 1$ e seus primeiros termos dados por $(2,7,15,26,40,...)$, sendo difícil interpretá-los de forma visual, já que não possuem uma relação com seus análogos de índices positivos. Para superar esse problema, adotamos o aporte do GeoGebra, para visualização e investigação de possíveis propriedades.

Vamos analisar o caso dos números triangulares de índices negativos. Sua construção no GeoGebra nos permite inferir algumas características, que não seriam imediatas apenas através da forma geral (Figura 4):

Figura 3 – Números triangulares com índice -6 e 6.



Fonte: Elaboração dos autores (2024).

Observe na Figura 4 que as listas de pontos criam triângulos com mesmo número de linhas diferentes. Os números triangulares com índices negativos são representados pelos triângulos que estão abaixo do eixo, enquanto os de índices positivos são os que estão acima; as linhas representam o *n,* porém nem todos são preenchidos com pontos. Dessa forma, observamos a relação $S_3(-n) = S_3(n-1)$ e a figura sugere, inclusive, que o primeiro número triangular é igual a 1 enquanto seu análogo negativo é igual a *zero.* Para os números quadrados, sua estrutura é semelhante para índices positivos e negativos.

No tocante ao ensino deste tema, consideramos a TSD como uma abordagem que busca compreender como o conhecimento matemático é transmitido e adquirido através de situações didáticas específicas. Essa teoria enfatiza a importância da interação entre o aluno e o conhecimento matemático, mediado pelo professor. A partir da criação de situações didáticas, os alunos são colocados em contextos em que precisam mobilizar e construir conhecimentos para resolver problemas (Brousseau, 2008).

A ED é uma metodologia de pesquisa na Didática da Matemática que se concentra no *design*, implementação e análise de sequências didáticas e permite aos pesquisadores e educadores testarem e refinar práticas pedagógicas em contextos reais de ensino, garantindo que as teorias educacionais sejam aplicadas e validadas (Artigue, 2009).

A relação entre a TSD e a ED é estreita e complementar. Enquanto a TSD fornece o arcabouço teórico para a criação de situações didáticas significativas, a ED oferece a metodologia para desenvolver, testar e validar essas situações em ambientes educacionais reais. No contexto deste estudo, essas correntes teóricas fundamentam a proposta didática ao fornecer uma base para a exploração dos números poligonais utilizando o GeoGebra.

FASE 2: CONCEPÇÃO E ANÁLISE *A PRIORI*

Na presente seção, apresentaremos uma proposta de situação didática extraída a partir do estudo preliminar em torno da sequência dos números poligonais e sua visualização pelo software GeoGebra. As construções apresentam propriedades não triviais a partir da visualização na janela 2D e diferenciação de cores para que o professor responsável pela aplicação possa motivar o aluno a investigar e formular propriedades.

Antes da apresentação da situação proposta, cabe ressaltar que esta faz parte da segunda fase da ED que, baseada na TSD, envolve a concepção das situações e a antecipação dos acontecimentos durante sua aplicação.

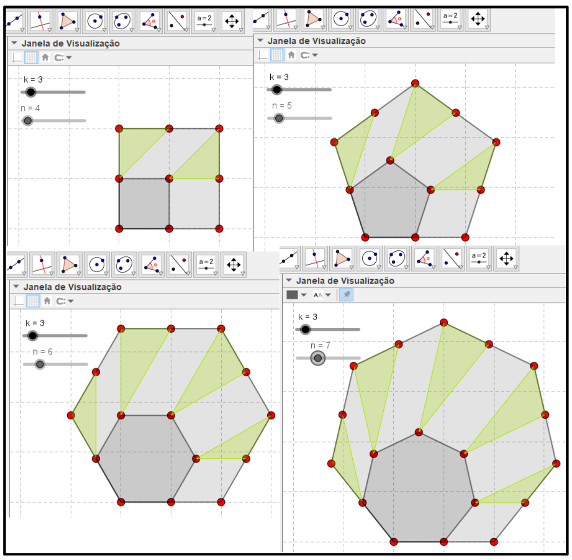
Situação Didática: Encontrar a relação entre números triangulares generalizados e poligonais generalizados.

A situação proposta explora a propriedade que relaciona números triangulares e poligonais, incluindo a extensão para índices negativos. Concebida como um modelo aplicado segundo a TSD esta atividade destina-se a turmas de licenciatura em matemática, abordando uma propriedade fundamental no estudo dos números poligonais e generalizando uma identidade específica desse campo.

Considerando que números figurados não são amplamente discutidos nas licenciaturas, é provável que os futuros professores tenham poucos conhecimentos prévios para a resolução imediata do problema. Assim, uma breve introdução e algumas definições iniciais são necessárias, permitindo uma resolução mais gradual. Com o auxílio de construções, certas propriedades tornam-se mais evidentes, facilitando a identificação e provando-as.

Inicialmente será apresentado o problema e algumas definições iniciais, como a forma geral dos números poligonais dada por $S_m(n) = \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2}$ com $m \geq 3$ e $n \geq 0$ e números triangulares sendo um caso particular dessa mesma fórmula para $m = 3$, ou seja $S_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, e por fim, a forma para os números poligonais generalizados $S_m(-n) = \frac{(m-2)n^2 + (m-4)n}{2}$. É esperado que o aluno tenha uma certa dificuldade em apresentar a relação $S_m(n) = S_3(n) + (m-3)S_3(n-1)$ para índices positivos, mas que pode ser observada nas construções desses números via GeoGebra (Figura 5):

Figura 5 – Relação de alguns números poligonais com números triangulares.



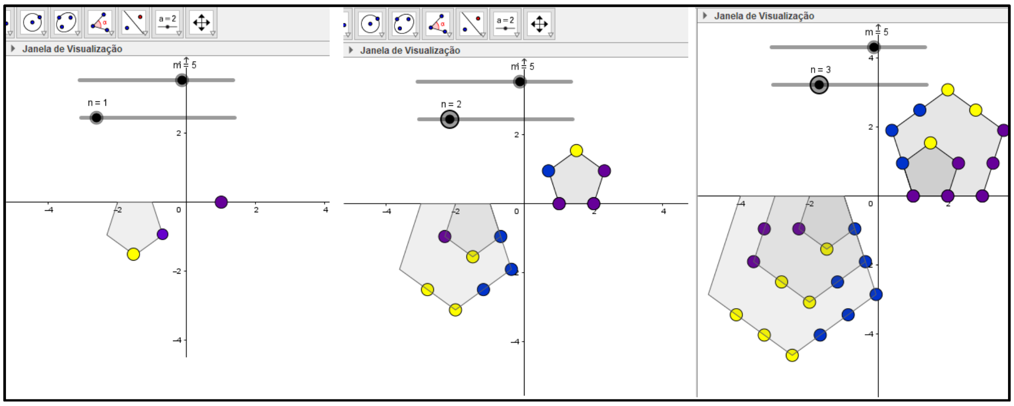
Fonte: Elaboração dos autores (2024).

Ao apresentar a figura aos alunos, espera-se que a relação seja rapidamente identificada, embora persistam dúvidas sobre a prova, que deve ser realizada por indução. No entanto, essa abordagem inicialmente cobre apenas números com índices positivos, deixando os alunos com dificuldades ao lidar com índices inteiros. Apresentamos uma condução da situação utilizando a TSD, destacando a importância do GeoGebra.

Situação de ação: Com o problema e as definições iniciais em mãos, os alunos devem explorar três pontos de partida: a interpretação da questão, as fórmulas fornecidas e a Figura 5. Usando seus conhecimentos prévios, eles podem seguir duas abordagens: a primeira é encontrar as fórmulas particulares para números triangulares, quadrados e outros poligonais generalizados; a segunda é construir as figuras ponto a ponto, buscando enquadrar a sequência no polígono desejado.

Para validar a relevância do GeoGebra nessa questão, o professor deve evitar fornecer construções para índices negativos de imediato. Nos números pentagonais generalizados, por exemplo, a figura formada não seria regular, tornando complexa a relação pela forma ou pelo desenho. Assim, os alunos devem tentar construir números poligonais com cinco lados ou mais, percebendo a não trivialidade dessa relação. Após esse primeiro contato e as dificuldades iniciais, o professor deve introduzir a Figura 6:

Figura 6 – Três primeiros números pentagonais e seus análogos com índices negativos



Fonte: Elaboração dos autores (2024).

A Figura 6 destaca os primeiros números pentagonais e seus análogos negativos, utilizando cores distintas para facilitar a identificação dos números triangulares. Embora alguns alunos possam não perceber imediatamente a relação evidenciada pelas cores, espera-se que a maioria consiga formular as primeiras descobertas sobre a figura apresentada e a fórmula geral dos números poligonais generalizados.

Situação de formulação: Diante da Figura 6, alguns alunos podem tentar desenhar pontos para os números hexagonais ou até heptagonais generalizados. No entanto, ao observar a figura com mais atenção, podem perceber que a relação entre os números poligonais é invertida em cada quadro. Acima do eixo, há um número triangular de índice maior acompanhado por dois números triangulares de índices imediatamente inferiores, enquanto abaixo do eixo, dois números triangulares de índice maior são acompanhados por apenas um número triangular de índice imediatamente inferior. Essa observação pode levar o aluno à seguinte fórmula:

$$S_m(-n) = (m-3)S_3(n) + S_3(n-1)$$

com $S_3(0) = 0$.

É fundamental que o professor promova a troca de informações entre os alunos para a solução do problema, pois alguns já podem ter resolvido a questão. Durante a troca de informações, é provável que surjam dúvidas sobre a relação encontrada e a solicitada, uma vez que a questão envolve números triangulares com índices negativos, e não generalizados, sendo uma discussão importante para validar a resolução do problema.

Situação de validação: Após a troca de informações, a validação começa com a junção das informações e figuras. Nesse momento, o aluno deve perceber a relação entre números triangulares com índices positivos e negativos, ou seja:

$$S_3(-n) = S_3(n-1)$$

Essa relação pode ser obtida através da fórmula de números triangulares com índices negativos e seus primeiros termos, ou seja: para $n=1$ temos $S_3(-1) = \frac{1(1-1)}{2} = 0$ ou seja $S_3(0)$ por definição. Para $n=2$ temos $S_3(-2) = \frac{2(2-1)}{2} = 1$ que é o mesmo que $S_3(1)$, e assim por diante. Logo, é esperado que os alunos cheguem à fórmula:

$$S_m(-n) = (m-3)S_3(-n+1) + S_3(-n)$$

Com a relação estabelecida, a fórmula é facilmente provada através da substituição na relação $S_3(-n) = S_3(n-1)$ e da fórmula dos números triangulares, mostrando a fórmula dos números poligonais apresentada inicialmente pelo professor.

Situação de institucionalização: Nessa fase, o professor revisita os conceitos iniciais e, com as figuras em mãos, estabelece as relações e realiza a prova formalmente, usando o método de indução. Além disso, pode apresentar outras identidades visualizadas, demonstrando todas as possibilidades dentro do tema proposto.

Destacamos que tais conceitos não são triviais sem a visualização, como observado no início da aplicação, e a possível dificuldade dos alunos na fase de ação reforça a importância do GeoGebra na formação de professores. O software facilita a observação e a descoberta de propriedades, seja pela visualização direta ou pelo uso de recursos como a calculadora e listas de sequências.

Por fim, considera-se que, para o professor, criar situações a partir dos resultados dessa aplicação pode aprimorar suas técnicas metodológicas e de conteúdo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo destaca a eficácia do GeoGebra na visualização de números poligonais, facilitando a exploração de propriedades para índices positivos e negativos. A manipulação geométrica proporcionada pelo software revela propriedades difíceis de observar sem essa ferramenta. A Teoria das Situações Didáticas e a Engenharia Didática fornecem uma base sólida para a sequência didática proposta, promovendo uma aprendizagem ativa e contextualizada.

As principais contribuições deste estudo incluem a facilitação da compreensão de conceitos abstratos e o enriquecimento da prática pedagógica, graças à visualização dinâmica proporcionada pelo GeoGebra. Para a formação de professores, o estudo ressalta a importância do uso de ferramentas digitais como o GeoGebra, melhorando a qualidade do ensino e preparando educadores para uma realidade educacional digitalizada. A abordagem didática fundamentada em teorias consolidadas serve como modelo para a formação de professores mais eficazes e adaptáveis.

Futuros estudos poderiam explorar ainda mais a visualização matemática e os números poligonais, investigando novas integrações tecnológicas. Extensões da pesquisa poderiam incluir a aplicação dessa abordagem em outros tópicos matemáticos e a avaliação de seu impacto em diferentes níveis de ensino, contribuindo para o avanço da Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ABRAMOVICH, S. Exploring Polygonal Number Sieves through Computational Triangulation. **Computation**, v. 11, n. 12, p. 1-15, 2023. https://doi.org/10.3390/computation11120251

ALVES, F. R. V. Visualizing the Olympic Didactic Situation (ODS): teaching mathematics with support of the GeoGebra software. **Acta Didactica Napocensia**, v. 12, n. 2, p. 97-116, 2019. https://doi.org/10.24193/adn.12.2.8

ALVES, F. R. V.; BARROS, F. E. Plane and space figurate numbers: visualization with the GeoGebra's help. **Acta Didactica Napocensia**, v. 12, n. 1, p. 57-74, 2019. DOI: 10.24193/adn.12.1.4.

ARTIGUE, M. Didactical design in mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, v. 42, n. 3, 123-135, 2009. https://hal.science/hal-00699775

BARROS, F. E.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C.; SOUSA, R. T. The construction of figured numbers in GeoGebra software using algebraic properties. **The Mathematics Enthusiast**, v. 21, n. 1, 2024. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1624

BROUSSEAU, G. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas**: Conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BURTON, D. M. The History of Mathematics: An Introduction. 7. ed. New York: **McGraw-Hill**, 2011.

CIFUENTES, J. C.; SANTOS, A. H. D. Da percepção à imaginação: aspectos epistemológicos e ontológicos da visualização em matemática. **Educere et Educare**, v. 14, n. 33, p. 1-21. https://doi.org/10.17648/educare.v15i33.22530

CONWAY, J. H.; GUY, R. K. **The book of numbers**. New York: Springer, 1996.

DEZA, E.; DEZA, M. M. **Figurate numbers**. Singapore: World Scientific, 2012.

FORHAN, E. **Polygonal Numbers and Finite Calculus**, 2007. Disponível em: https://documents.kenyon.edu/math/Forhan07.pdf. Acesso em: 29 jul., 2024.

NOBRE, J. F. F.; ROCHA, R. A. Progressões aritméticas de ordem superior. **Professor de Matemática Online**, v. 1, n. 5, 2018.

ROQUE, T. História da matemática. São Paulo: **Schwarcz-Companhia das Letras**, 2012.

SOUSA, R. T.; ALVES, F. R. V.; AIRES, A. P. Categories of Intuitive Reasoning in the teaching of parabolas: A structured practice in Didactic Engineering. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 18, n. 4, em0746, 2023. https://doi.org/10.29333/iejme/13514