ISSN: 2358-8829

EXPLORANDO CURVAS POLARES NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Ubiratan Barros Arrais [1]

RESUMO

Este artigo tem como objetivo, destacar como o estudo das curvas em coordenadas polares, desenvolvido em cursos de licenciatura, pode ser uma ferramenta poderosa para desenvolver várias habilidades e práticas no Ensino da Matemática. A pesquisa trata-se da implementação de aulas na disciplina intitulada Geometrias não Euclidianas, do curso de Licenciatura em Matemática, da Faculdade Sesi de Educação. Puro fascínio! As curvas polares podem gerar uma variedade infinita de formas, desde círculos e elipses, até curvas mais complexas como por exemplo, espirais, limaçons, rosáceas, cardioides, entre outras. Na Educação Básica são estudadas principalmente por suas propriedades e comportamentos matemáticos, como concavidade, pontos de inflexão, tangências e mais temas afins. Para além do olhar matemático, estas curvas impulsionam o estudante na construção de uma maior flexibilidade cognitiva, pensamento criativo e senso estético. É nesse compasso que Matemática e Arte se encontram, os objetos matemáticos são refinados e aprofundados, a expressão crítica e criativa se alargam no estudo e desenvolvimento de cada curva. Inicialmente, os estudantes tiveram contato com as diferentes formas de um sistema de coordenadas, das coordenadas cartesianas às polares. Neste ponto, muitos perceberam suas dificuldades em Trigonometria. Desta forma, com a utilização do software de Geometria Dinâmica, Geogebra, os futuros docentes tiveram a oportunidade de ampliar a autonomia e o protagonismo a cada curva que era parametrizada, observando a importância de seus parâmetros, as novas formas, uma nova flor, uma nova rosácea. O espanto expresso era o indício de novas aprendizagens. Assim, a base teórica apresenta-se estruturada nas habilidades da BNCC e no trabalho de Baptista (2017). Os resultados apontam que os futuros docentes puderam relacionar conhecimentos matemáticos com arte, fomentando o pensamento criativo e o senso estético.

Palavras-chave: Curvas Polares, Arte, Educação Matemática.

INTRODUÇÃO

Este trabalho traz uma das mais belas e intrigantes conexões entre Arte e Matemática. Esta conexão, em particular, foi proporcionada pela experiência de estudar as Curvas Polares. A relação entre a Matemática e a Arte é um tema fascinante que se revela de diversas maneiras. Este estudo revela uma destas facetas que ocorre no contexto

[1] Professor na Licenciatura em Matemática na Faculdade Sesi de Educação, ubiratan.arrais@sesisp.org.br;

ISSN: 2358-8829

do estudo das Geometrias não Euclidianas, no momento em que tínhamos a necessidade de estudar as coordenadas polares para algumas investigações matemáticas.

O ambiente deste trabalho se dá em um curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade Sesi de Educação. Nesta Licenciatura em Matemática temos uma Unidade Curricular denominada Geometrias não Euclidianas. Nesta unidade, em variadas situações, necessitamos de usar diferentes sistemas de coordenadas. Assim, iniciamos este módulo de trabalho resgatando as coordenadas cartesianas e, a partir delas, definindo as coordenadas polares, apresentando suas diferenças e aplicações. Após suas definições e transformações de registros cartesiano para polar, e polar para cartesiano, iniciamos os exercícios que se tornaram objeto deste trabalho.

O momento mais importante se deu ao utilizarmos o software de Geometria dinâmica “Geogebra”. Escrevemos algumas curvas no Geogebra e, utilizando do recurso “seletor” do Geogebra era possível modificar alguns parâmetros da curva. Foi extraordinário observar as expressões de puro fascínio. A cada parâmetro modificado, modificava a curva, a rosácea ganhava novos contornos, eram as pétalas que ora aumentavam em quantidade, ora aumentavam em seu tamanho. Assim, novas formas desabrochavam a um simples click do mouse. A luz que brilhava nos olhos de cada estudante era o despertar de uma paixão. Era a Matemática contagiando cada um deles de paixão.

Resgatamos nesse processo algumas relações trigonométricas que haviam se perdido no tempo, bem como conseguimos vislumbrar muitas habilidades descritas na BNCC que este tema propicia.

Percebemos o quão rico é o trabalho que envolve o desenvolvimento de tantas práticas matemáticas, resgate de relações trigonométricas, relações algébricas, mudanças de parâmetros, mudança de registro cartesiano para polar e polar para cartesiano. Estas práticas, aparentemente tão simples, permitem o desenvolvimento não apenas das habilidades já apontadas anteriormente, mas sobretudo de uma maior flexibilidade cognitiva, pensamento criativo e senso estético. É nesse compasso que Matemática e Arte se encontram, os objetos matemáticos são refinados e aprofundados, a expressão crítica e criativa se alargam no estudo e desenvolvimento de cada curva. Este foi o maior ganho deste trabalho.

ISSN: 2358-8829

METODOLOGIA

Usando os recursos de uma aula expositiva, e uma abordagem dialógica, inicimos nosso trabalho, como na maioria das vezes, fazendo um resgate histórico, tendo por referência Boyer, (1996) e Eves (1992), apontamos que este tema, assim como qualquer outro da matemática é histórico e socialmente determinado.

Resgatamos nossas aulas em Unidades Curriculares anteriores, como as que tratam de Geometria Analítica, para mostrar o momento em que passamos a representar os objetos Geométricos de forma Analítica. Vimos que esta passagem do Geométrico para o Algébrico, sem deixar de lado a importância das representações geométricas, ajuda a organizar o raciocínio na resolução de situações problema e oferece uma poderosa ferramenta de representação de pontos e objetos matemáticos no sistema de coordenadas cartesianas.

Resgatamos brevemente as funções lineares e seus respectivos gráficos, assim como as exponenciais e logarítmicas. Ao resgatarmos as funções trigonométricas foi necessário um cuidado um pouco maior, pois estas seriam ponto de partida para a elaboração de algumas curvas em coordenadas polares.

Tendo por base Baptista (2017) que propõe o resgate deste sistema de coordenadas cartesianas antes de construir a ideia do sistema polar, assim o fizemos. Resgatamos as coordenadas cartesianas, até que, para este grupo, este tema tornasse algo familiar. Assim construímos as bases necessárias para iniciarmos um olhar para as coordenadas polares.

Agora é a vez do sistema de coordenadas polares. Assim como nas coordenadas cartesianas, iniciamos fazendo um breve resgate histórico. Vimos que Jean Bernoulli (Boyer, 1996 p.286) não foi o criador deste sistema mas, ele é frequentemente citado como um dos primeiros matemáticos a utilizar e descrever sistematicamente as coordenadas polares em seu trabalho. No entanto, é importante ressaltar que ele não "inventou" o conceito do zero, mas sim contribuiu para sua formalização e popularização.

Desta forma desenvolvemos o resgate histórico, para logo em seguida iniciarmos a construção deste sistema de coordenadas junto as alunas.

Baptista (2017, p.49) sugere a construção passo a passo, deste sistema de coordenadas. Assim mostramos que consiste em, inicialmente escolhermos um ponto “O” no plano que denominaremos de pólo, ou origem do sistema. Uma semirreta com origem em “O” denominada eixo polar. Este é, em geral, desenhado horizontalmente e a direita do pólo, para uma orientação positiva. Feito isto, escolhemos um ponto “P” do plano cuja

ISSN: 2358-8829

distância a origem “O” será denominado raio polar e o ângulo (geralmente medido em radianos) que este segmento de reta $\overline{OP}$ forma com o eixo polar é denominado ângulo polar. Enquanto as coordenadas cartesianas usam pares de valores **(x, y)** para descrever a posição de um ponto, as coordenadas polares usam um par de valores **(r, θ)**, onde **r** (raio) que representa a distância do ponto à origem e **θ** representa o ângulo formado entre o ponto, a origem e o eixo polar.

Assim iniciamos as representações neste sistema. O próximo passo foi plotar pontos neste sistema de coordenadas.

Após uma série de exercícios de diferentes plotagens de pontos, em diferentes localizações do plano, iniciamos a mudança de registro. Da representação polar para a representação cartesiana e da representação cartesiana para a representação polar. Então, dado um ponto em coordendas polares transcrevermos o ponto em coordenadas cartesianas, e vice e versa. Como tínhamos a intenção de proporcionar às alunas, professoras em formação, situações em que elas teriam a necessidade de coordenar diferentes sistemas de registros de representação, providenciamos que as transformações não fossem apenas algébricas, mas que ocorressem também a representação nos sistemas de coordenadas cartesiano e polar. Para isto, iniciamos fazendo coincidir o eixo polar com o eixo das abscissas do sistema cartesiano ortogonal e, da mesma forma, fazendo coincidir a origem “O” do sistema polar com a origem do sistema cartesiano ortogonal. Estava assim posto o cenário das transformações de coordenadas. Estava tudo pronto para a mudança de registro. Foram variadas situações, variadas transformações de registros em diferentes localizações do plano.

O próximo passo foi desenvolvido com o software de Geometria Dinâmica “Geogebra”. Ferramenta de grande potência para este trabalho.

Neste ambiente do Geogebra propomos o desenvolvimento de algumas rosáceas. Foi a partir daqui que a magia se estabeleceu. Foi a partir daqui que os olhos das alunas brilharam. Foi a partir daqui que a Arte e a Matemática as contagiava de paixão.

> *O que me atrai é a curva livre e sensual, a curva que encontro nas montanhas do meu país, no curso sinuoso dos seus rios, nas ondas do mar, no corpo da mulher preferida", Oscar Niemeyer.*

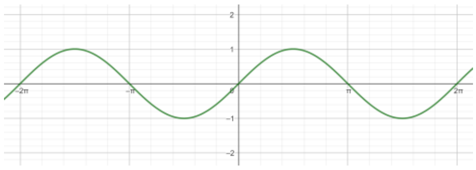
Com o software de Geometria Dinâmica Geogebra foi possível modificar os coeficientes e observar a transformação na imagem que isto promovia.

A cada curva parametrizada, um susto.

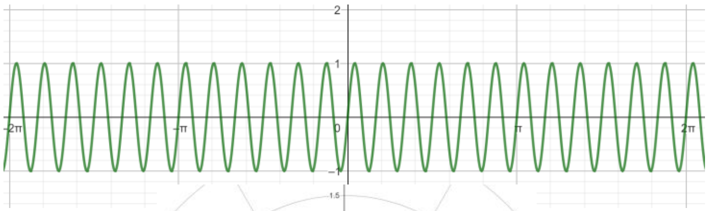
ISSN: 2358-8829

A cada susto, uma nova aprendizagem. Os olhos brilhavam com o despertar de uma paixão.

$r(x) = sen(x)$

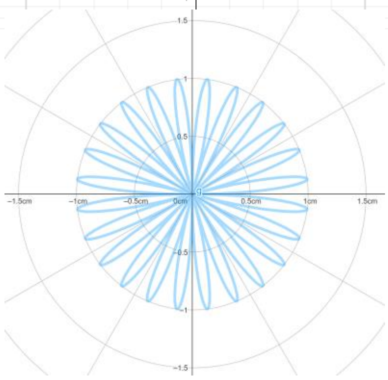


$r(x) = sen(12x)$



$$g = \text{Curva}(r(t)\ \cos(t), r(t)\ \text{sen}(t), t, 0, 4\ \pi)$$

$$= \left.\begin{array}{l} x = \text{sen}(12\ t)\ \cos(t) \\ y = \text{sen}(12\ t)\ \text{sen}(t) \end{array}\right\} 0 \leq t \leq 12.57$$



Assim desenvolveu-se o trabalho que tanto fascinou nossos alunos, esses professores em formação.

REFERENCIAL TEÓRICO

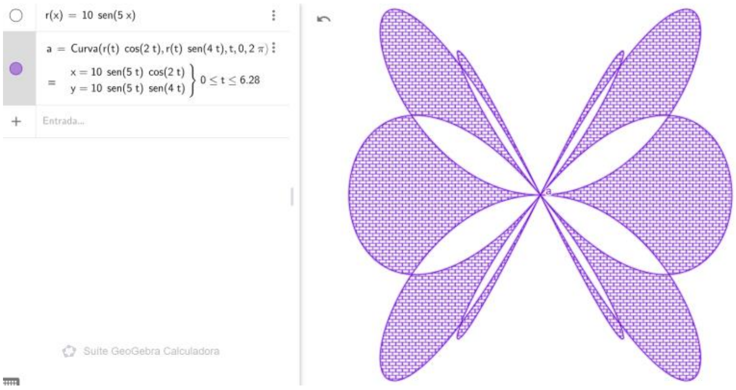
O referencial teórico deste trabalho encontra-se prioritariamente na Base Nacional Curricular, nossa BNCC e nas contribuições de Baptista (2017), e para os resgates históricos nos apoiamos nos livros de história da Matemática dos seguintes autores: Boyer (1996), Eves (1992).

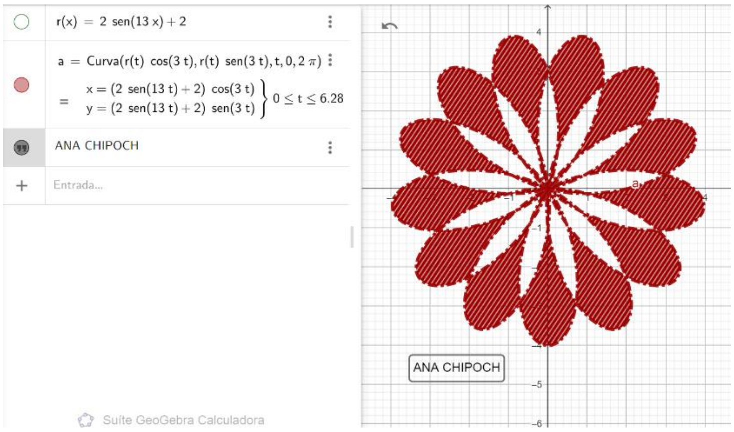
RESULTADOS E DISCUSSÃO

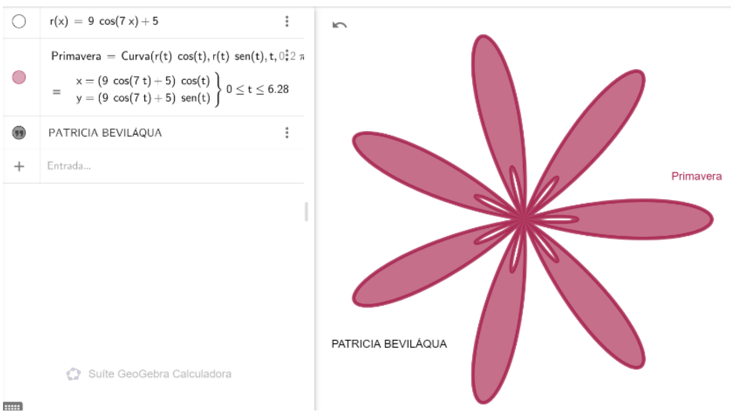
As curvas polares são um exemplo fascinante de como a Matemática e a Arte se entrelaçam, demonstrando a beleza e a criatividade que podem emergir de conceitos matemáticos aparentemente abstratos. O estudo dessas curvas revela simetrias, padrões e

ISSN: 2358-8829

formas que possuem uma estética intrínseca, evocando a mesma sensação de beleza que encontramos em obras de arte visual.







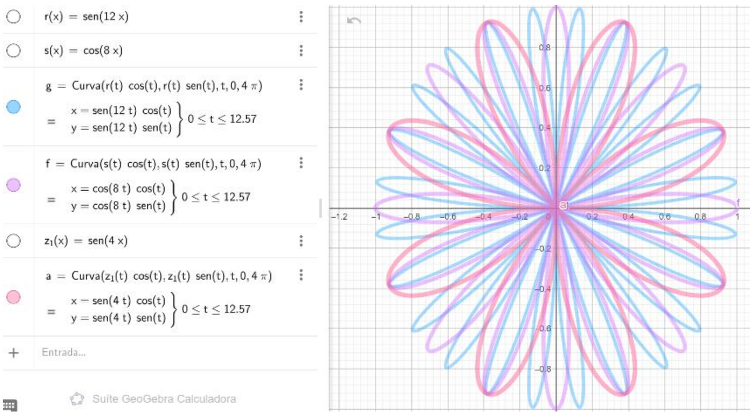
CONSIDERAÇÕES FINAIS

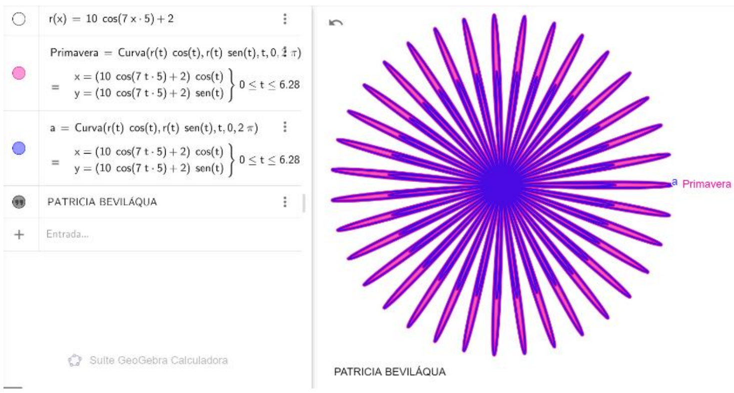
Puro fascínio!

Uma variedade infinita de formas essas curvas polares podem gerar, desde simples círculos e elipses até curvas mais complexas e interessantes, como espirais, limaçons, rosáceas, cardioides, entre outras. Aqui, neste trabalho focamos apenas nas rosáceas.

ISSN: 2358-8829

Na Matemática, estas curvas são estudadas principalmente por suas propriedades e comportamentos matemáticos, como concavidade, pontos de inflexão, tangencias e assim por diante. Para além do olhar matemático, estas curvas impulsionam o estudante na construção de uma maior flexibilidade cognitiva, pensamento criativo e senso estético.





É nesse compasso que Matemática e Arte se encontram!

Os objetos matemáticos são refinados e aprofundados, as expressões crítica e criativa se alargam no estudo e desenvolvimento de cada curva.

A criação de curvas polares permite uma exploração criativa quase infinita. Pequenas alterações nos parâmetros, como as que desenvolvemos neste trabalho, faz gerar formas completamente novas, permite perceber a potência que estas equações polares podem. Isso incentiva tanto nosso aluno de matemática, futuros professores, quanto aos futuros alunos que com olhar de artistas vão explorar diferentes combinações de valores para criar algo visualmente único.

Este processo de experimentar com equações matemáticas para obter resultados visuais belos é um exemplo claro da convergência entre a Matemática e a criatividade artística.

ISSN: 2358-8829

É nesse compasso que preparamos futuros professores para a tarefa docente. Esta tarefa será mais assertiva se eles conseguirem contagiar seus futuros alunos desta paixão. Pois, de uma coisa sabemos. Só podemos ensinar aquilo que sabemos e só podemos contagiar o outro de paixão se nós mesmos estivermos contagiados da mesma.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho só foi possível graças ao engajamento da turma de sétimo semestre da Licenciatura em Matemática. Que privilégio foi trabalhar com esta turma. Uma turma feminina em sua totalidade. Uma turma de mulheres que tiveram inicio da sua graduação bem no início da pandemia. São mulheres fortes e determinadas, que enfrentando todas as adversidades que o mundo moderno impõe, sobretudo para as mulheres, não perderam o brilho nos olhos. Se permitiram contagiar de paixão para continuarem este legado contagiando seus futuros alunos.

A esta turma minha gratidão!

REFERÊNCIAS

BAPTISTA, C. R. *et al*. Inclusão e escolarização: múltiplas perspectivas. 2 ed. Porto Alegre: **Mediação**, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular.

CARL B. Boyer, Uta C. Merzbach; História da matemática [tradução de Helena Castro]. São Paulo: Blucher, 2012.

EVES, Howard Ev - Introdução à história da matemática / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 20 11.