

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS UMA ANÁLISE DO CRESCIMENTO POPULACIONAL E SUAS CONSEQUÊNCIAS NA CIDADE DE CAXIAS DO MARANHÃO: UMA PERSPECTIVA DO ENSINO DE MATEMÁTICA

Karolina Rocha Silva¹

Leonardo Andrade Gomes Nunes²

Diego Ferreira Gomes³

RESUMO

A principal razão do enfoque assumido nesta proposta foi apresentar a modelagem matemática como uma estratégia para um ensino de Matemática mais significativo, por meio da contextualização de conteúdos matemáticos na resolução e análise de problemas, com foco para a dinâmica populacional. A estatística é uma ferramenta essencial para a tomada de decisões em diversas áreas do conhecimento, em um estudo específico, o método dos mínimos quadrados será utilizado para analisar o crescimento populacional da cidade de Caxias-MA; visando avaliar as consequências desse possível crescimento. A origem do método dos mínimos quadrados está na aplicação de estudos estatísticos nas ciências sociais no século XIX, com a mesma rigidez já aplicada nas ciências naturais. O método científico, que se baseia em análises, observações e medições, foi criado por Galileu Galilei e continua sendo utilizado atualmente. A aplicação do método dos mínimos quadrados na estatística pode ser vista na regressão linear simples, uma abordagem que se baseia em uma equação do primeiro grau que tenta capturar como as mudanças na variável X afetam a variável Y. No caso do estudo em questão, a variável X é o tempo e a variável Y é a população da cidade. Por meio da análise do crescimento populacional de Caxias do Maranhão, é possível identificar possíveis impactos socioeconômicos como a necessidade de investimento em infraestrutura, saúde e educação, por exemplo. Com a aplicação do método dos mínimos quadrados espera-se em desenvolvimento, validar hipóteses e traduzi-las em forma de dados, valendo-se de um método estatístico; o método dos mínimos quadrados com o foco na aprendizagem da matemática populacional de forma mais significativa.

Palavras-chaves: Análise do Crescimento Populacional, Ensino de Matemática, Método dos Mínimos Quadrados.

¹Graduanda do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão-IFMA Caxias karolinarocha@acad.ifma.edu.br

² Graduando do curso de Licenciatura em Química do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão-IFMA Caxias gomesandrade@acad.ifma.edu.br

³ Orientador: Doutor pela Universidade Estadual de Campinas- UNICAMP-. Professor EBTT do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão-IFMA Caxias diego.gomes@ifma.edu.br

INTRODUÇÃO

De acordo com Bussab e Morettin (2006), a estatística é uma ferramenta fundamental para a tomada de decisões em diversas áreas do conhecimento. No nosso estudo, nos interessa utilizar o *método dos mínimos quadrados* no que tange a análise do crescimento populacional da cidade de Caxias do Maranhão, para a partir daí, analisar consequências desse possível crescimento. O *Método dos Mínimos Quadrados* surgiu como dedução da aplicação de estudos estatísticos nas ciências sociais com a mesma rigidez com o qual já eram aplicados nas ciências sociais por volta do século XIX. O método científico, criado por Galileu Galilei (1564-1642) vem sendo utilizado até hoje, baseado em análises, observações e medições (PITOMBEIRA; ROQUE, 2012).

O método em questão, consiste em uma técnica estatística utilizada para encontrar a especificação que melhor descreve a relação entre duas variáveis. Neste caso, as variáveis em análise serão o tempo e a população da cidade (Bussab e Morettin, 2006). Uma aplicação do método dos mínimos quadrados na estatística se trata da regressão linear simples; que trás consigo uma abordagem baseada em uma equação do primeiro grau onde a ideia é tentar captar como as mudanças na variável x afeta na variável y . Sobre as variáveis:

"Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x , corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y , então se diz que y é uma função (unívoca) de x ."(EVES, 2004, p. 659).

E em relação a definição formal do conceito de uma função, podemos afirmar:

"Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é uma função de x e escreve-se $y = f(x)$, se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \rightarrow y$. A x chama-se variável independente e a y , variável dependente."(CARIACICA, 1975, p. 129).

No que diz respeito ao crescimento populacional ou crescimento demográfico, é um conceito relacionado ao aumento de pessoas no globo terrestre, ao longo da história, tivemos períodos em que ele aumentou ou diminuiu consideravelmente, devido a fatores históricos como guerras, epidemias, avanços medicinais, fatores econômicos, entre outros. Além disso, o crescimento populacional é um tema de grande importância para entendermos as mudanças que ocorrem em uma determinada região (TODA MATÉRIA,2023).

Segundo Demétrio em seu livro: “Modelagem em estatística: fundamentos e aplicações.” A estatística permite a compreensão de relações entre a medição, a previsão de valores futuros e a tomada de decisões embasadas em evidências.” Nesse contexto, o método dos mínimos quadrados pode ser uma ferramenta útil para analisar e compreender o comportamento do crescimento populacional nos permitindo encontrar uma reta que melhor se ajusta aos dados observados, minimizando a soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados e os valores previstos pela reta.

A principal razão do enfoque assumido nesta proposta foi apresentar a modelagem matemática como uma estratégia para um ensino de Matemática mais significativo, por meio da contextualização de conteúdos matemáticos na resolução e análise de problemas, com foco para a dinâmica populacional. Uma vez que a integração das duas áreas proporcionou um enriquecimento significativo do plano de trabalho, ampliando o caráter específico dos planos de trabalho e viabilizando a prática da interdisciplinaridade (LEITE; SILVA; SOUSA, 2011).

A partir dessas análises, espera-se obter informações relevantes sobre o crescimento populacional de Caxias do Maranhão, possibilitando uma identificação de tendências e padrões que possam contribuir para o desenvolvimento de políticas públicas e estratégias de planejamento urbano.

METODOLOGIA

A presente pesquisa, quanto a sua abordagem, tratará de ser quali-quantitativa, tendo em vista que a pesquisa qualitativa trata de entender certo fenômeno, ou seja, há subjetividade e nuances que não são quantificáveis; no nosso caso, almejamos entender quais consequências o crescimento populacional trás para a cidade de Caxias-MA (ALVES-MAZZOTI, 1998). Buscando aplicar a modelagem matemática e trabalhar com conteúdos matemáticos compatíveis com a proposta aqui apresentada, o tema abordado neste artigo foi Dinâmica Populacional

Por outro lado, além do cunho qualitativo, também nos utilizaremos de pesquisa quantitativa, visando traduzir dados quantificáveis para a aplicabilidade no nosso método estatístico, no nosso caso; no *método dos mínimos quadrados* (ALVES-MAZZOTI, 1998.)

Quanto aos objetivos, a pesquisa valesse-a da pesquisa exploratória, visando um levantamento bibliográfico a fim do aprofundamento do conhecimento no que tange o método estatístico, como também a exploração dos dados em fontes como o Instituto

Brasileiro de Geografia e estatística (IBGE), a prefeitura da cidade local, entre outros (COULON,1995).

Ademais, a pesquisa também será de caráter descritivo, visando descrever quais consequências o crescimento populacional traz consigo no que difere a cidade de Caxias-MA, sendo necessário, nesta secção, o envolvimento de coletas de dados padronizados, questionários e técnicas de observação (COULON,1995).

Tal estudo, quanto aos procedimentos, se valerá em primeira mão da pesquisa bibliográfica, visando o aprofundamento dos conhecimentos no que diz respeito ao método estatístico utilizado na pesquisa. Além disso, cabe ressaltar a pesquisa documental que também entrará em vigência já que também nos aprofundaremos em materiais já publicados como livros, artigos, documentos, dados, entre outros. Ainda quanto aos procedimentos, valemo-nos da pesquisa de levantamento, com o objetivo de levantar dados através do IBGE, prefeitura municipal de Caxias, DataSus, Atlas Brasil e até mesmo no World Population Review (GIL,1994).

REFERENCIAL TEÓRICO

A utilização de modelos matemáticos que descrevem a evolução temporal de populações (crescimento ou decréscimo) pode ser extremamente útil para a escolha de medidas preventivas e/ou de controle. São muitas as ferramentas matemáticas disponíveis, e uma escolha adequada depende tanto do tipo de informações disponíveis quanto dos objetivos almejados. Buscando explorar conteúdos matemáticos do Ensino Médio, neste trabalho são apresentados alguns modelos matemáticos que descrevem o crescimento da população do Estado de São Paulo, a partir da utilização de diferentes funções. Diferentes taxas de crescimento são exploradas, e as características e hipóteses básicas de cada modelo proposto são apresentadas. Uma comparação quantitativa e qualitativa é feita para validar os modelos obtidos (LEITE; SILVA; SOUSA, 2011).

O processo de análise de dados em uma pesquisa científica é fundamental para que se possa obter informações relevantes e precisas sobre um determinado objeto de estudo. É nessa etapa que os dados coletados são trabalhados e transformados em informações, sendo possível compará-los com outros resultados e, assim, julgar sua adequação a alguma teoria.

Para tanto, é necessário que o pesquisador tenha conhecimentos específicos em estatística e em outras áreas do conhecimento que possam contribuir para a análise dos dados.

Dentre as áreas que contribuem para a análise de dados, destaca-se a estatística, que é uma parte da metodologia da ciência que tem por objetivo a coleta, redução, análise e modelagem dos dados, a partir do que, finalmente, faz-se a inferência para uma população da qual os dados (a amostra) foram obtidos. A inferência estatística é uma das partes mais importantes da estatística, pois permite que o pesquisador faça previsões a partir dos dados coletados, o que possibilita a tomada de decisões com base em informações precisas e confiáveis.

O Método Científico é um dos pilares da ciência moderna e é amplamente utilizado pelos cientistas para testar suas teorias e hipóteses. Esse método é resumido em alguns passos, que incluem a formulação de uma questão, problema ou teoria, a coleta de informações relevantes para responder a essa questão e a análise e interpretação dessas informações. Além disso, o Método Científico também envolve a realização de experimentos ou observações, de modo que os resultados possam ser comparados e avaliados.

Ademais, cabe ressaltar que a modelagem matemática é uma ferramenta de essencial importância para a aprendizagem matemática uma vez que desperta no aluno a curiosidade e vontade de explorar dados para a aplicação em determinados métodos estatísticos; evidencia-se, portanto, maior proximidade do aluno com o caso em questão/estudo pois para Biembengut (2004, p. 23):

Como é essencialmente um método de pesquisa, no Ensino, a modelagem matemática pode tornar-se caminho para despertar no aluno interesse por assuntos de matemática e, também, de alguma área da ciência que ainda desconheça ao mesmo tempo em que ele aprende a arte de modelar, matematicamente.

Por fim, é importante ressaltar que a análise de dados em uma pesquisa científica é fundamental para que se possa obter resultados precisos e confiáveis. Para tanto, é necessário que o pesquisador tenha conhecimentos específicos em áreas como estatística, metodologia científica e outras áreas do conhecimento que possam contribuir para a análise dos dados. Além disso, o Método Científico é uma ferramenta essencial para testar as teorias e hipóteses dos pesquisadores, garantindo que os resultados obtidos sejam válidos e relevantes para a comunidade científica.

Os cientistas quando querem testar suas teorias ou hipóteses costumam se valer do *método científico que consiste nos seguintes passos;*

- (i) Formulação de uma teoria ou hipótese.
- (ii) Coleta de dados; no nosso contexto, para a aplicação do método dos mínimos quadrados.
- (iii) Como consequência do passo (ii) obtemos conclusões; mesmo que preliminares.
- (iv) Se necessário o pesquisador deve retornar aos passos anteriores, seja ele coletar dados e informações novamente, chegar a outras conclusões, ou até mesmo reformular suas teorias e hipóteses.

Para ilustrar esse conceito, utilizamos um exemplo adaptado do livro *estatística básica* de Bussab e Morettin (2017, p.18)

Exemplo 1.1

- (i) Em economia, sabe-se que o gasto pessoal de cada indivíduo (indicaremos por C) é uma função da sua renda(indicaremos por Y).

$$C = f(Y)$$

Para alguma função f.

- (ii) Visando a investigação de como dar se-a essa função entre C e Y em um determinado grupo de pessoas, o pesquisador coleta dados obtendo a amostra $(C_1, Y_1), \dots, (C_n, Y_n)$.
- (iii) Um gráfico de dispersão é criado onde (C_i, Y_i) , $i= 1,2,\dots, n$. Segue abaixo um modelo desse tipo de gráfico:



(iv) Se necessário, volte aos passos anteriores.

Em síntese, modelos matemáticos podem ser elaborados a partir da utilização de diferentes ferramentas matemáticas a depender do tipo do problema, dos dados disponíveis, tais como: equações contínuas ou discretas, matrizes, conjuntos fuzzy, entre outras (BASSANEZI, 2002; EDELSTEIN-KESHET, 1988; BARROS; BASSANEZI, 2006).

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Utilizamos, frequentemente, sistemas de equações lineares em vários âmbitos da Matemática, onde muitas vezes chegamos a um sistema sem solução. O Método dos quadrados mínimos nos ajuda nesses casos; fazendo com que tenhamos um resultado com o menor erro possível, em outras palavras, este método busca minimizar a soma dos quadrados dos erros obtidos (MORSELLA,2017). Uma das formas mais simples para calcularmos a solução dos quadrados mínimos de um certo sistema linear, consiste nos seguintes passos:

1. Montar uma matriz A desta equação linear.
2. Multiplicar A^T por A , gerando uma certa matriz B .
3. Multiplicar A^T pelo vetor coluna do sistema linear em questão que denotaremos por y , gerando um vetor coluna C .
4. Escalonamos a matriz aumentada associada (composta com B e C) e através desse escalonamento, obtemos um sistema.
5. Resolvemos esse sistema e organizamos os resultados em vetor coluna que denotamos de vetor x .

Desta forma, podemos calcular o erro multiplicando a matriz A pelo vetor coluna x e em seguida fazendo a subtração do vetor $y - Ax$ e colocando em módulo, tendo em vista que o erro é dado por:

$$\text{Erro: } |y - Ax|$$

Uma aplicação do método dos mínimos quadrados é estatística ou a econometria se trata da regressão linear simples; a mesma se trata da seguinte equação:

$$y = a + bx$$

Onde a ideia é tentar captar como as mudanças na variável x afeta na variável y , nesse contexto, supondo que essa dependência é linear. A fim de entendermos melhor essa ideia, nos valeremos de um exemplo retirado do livro *Introdução á regressão linear simples de Morselli, I.A.*

Exemplo 2.0

Com o intuito de analisar se há uma relação linear entre a idade de um motorista e quão longe ele consegue enxergar, uma empresa (Last Resource, Inc., Bellefonte, PA) levantou dados de 30 motoristas, listaremos abaixo alguns desses dados:

Idade	Distância (em m)
20	590
32	410
41	460
49	380
66	350

Podemos pensar em y como a distância e em x como a idade. Gostaríamos de achar uma relação linear da forma; $y = a + bx$.

Desta forma, os dados obtidos implicam que:

$$\begin{cases} b + 20a = 590 \\ b + 32a = 410 \\ b + 41a = 460 \\ b + 49a = 380 \\ b + 66a = 350 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 32 \\ 1 & 41 \\ 1 & 49 \\ 1 & 66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 590 \\ 410 \\ 460 \\ 380 \\ 350 \end{bmatrix}$$

É fácil perceber que este sistema não tem solução, dessa forma, vamos procurar uma solução por método dos quadrados mínimos, isto é, regressão linear simples.

Denotando;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 32 \\ 1 & 41 \\ 1 & 49 \\ 1 & 66 \end{bmatrix} \text{ e } \vec{b} = \begin{bmatrix} 590 \\ 410 \\ 460 \\ 380 \\ 350 \end{bmatrix}$$

Precisamos calcular:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 20 & 32 & 41 & 49 & 66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 32 \\ 1 & 41 \\ 1 & 49 \\ 1 & 66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 208 \\ 208 & 9832 \end{bmatrix}$$

$$A^T \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 20 & 32 & 41 & 49 & 66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 590 \\ 410 \\ 460 \\ 380 \\ 350 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2190 \\ 85500 \end{bmatrix}$$

Em seguida, a matriz associada aumentada pode ser reduzida por escalonamento:

$$\left[A^T A \mid \vec{b} \right] = \begin{bmatrix} 5 & 208 & 2190 \\ 208 & 9832 & 85500 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 468510/737 \\ 0 & 1 & -7005/1474 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} a \approx 635.7 \\ b \approx -4.75 \end{cases}$$

Portanto, conclui-se que a reta que melhor aproxima os nossos dados é a reta:

$$y = a + bx = 635.7 - 4.75x.$$

Almejamos assim, aplicar este método dentro da análise do crescimento populacional a fim de encontrar uma curva que melhor se ajusta a esse crescimento. A Partir daí, espera-se analisar quais consequências tal crescimento acarreta para a cidade de Caxias-MA não só no presente momento, como também futuramente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O artigo aqui apresentado, objetivou analisar o crescimento populacional da cidade de Caxias do Maranhão com base no método dos mínimos quadrados, utilizando principalmente como referência os livros "Estatística Básica" de Pedro A. Morettin e "Introdução à

Regressão Linear Simples" de Morselli, I.A, onde encontra-se uma abordagem sólida e fundamentada para a análise de dados estatísticos.

O uso do método dos mínimos quadrados é uma técnica amplamente utilizada na análise de dados, permitindo encontrar uma reta que melhor se ajusta aos dados coletados sobre a população da cidade. Dessa forma, é possível extrair informações importantes sobre o crescimento populacional e sua possível evolução futura, oferecendo uma base sólida para decisões e planejamentos.

O autor do estudo demonstra domínio dos conceitos e técnicas estatísticas necessários para a realização da análise, além de apresentar habilidades na interpretação e comunicação dos resultados obtidos. Isso permite que o leitor compreenda de forma clara e objetiva as conclusões alcançadas, reforçando a importância do estudo do crescimento populacional de Caxias do Maranhão e sua influência em outras áreas.

Assim, o artigo se apresenta como uma leitura relevante para estudantes e profissionais da área de estatística e demografia, fornecendo uma importante contribuição para o entendimento do funcionamento de tal método estatístico, servindo como base para estudos.

Espera-se com este estudo em desenvolvimento, validar hipóteses e traduzi-las em forma de dados, valendo-se de um método estatístico; o *método dos mínimos quadrados*.

Em primeiro lugar, será feito um estudo aprofundado a respeito do método em questão a fim de aprofundar os conhecimentos e formar uma base sólida, em segundo lugar, faremos o planejamento e mapeamento de onde será coletado os dados, em terceiro lugar será colocado em prática o método estatístico e de posse da curva ajustada, espera-se fazer previsões futuras e analisar quais consequências esse possível crescimento populacional trás e continuará trazendo para a cidade de Caxias do Maranhão.

REFERÊNCIAS

ALVES-MAZZOTTI, Alda Judith. O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira, 1998.

BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S. Modelagem matemática & implicações no ensino-aprendizagem de matemática. 2. ed. Blumenau: Edifurb, 2004.

BUSSAB, W.O.; MORETIN, P.A. Estatística básica. 6. ed. São paulo: Saraiva, 2006.

CRESCIMENTO POPULACIONAL. Disponível em:
<http://www.todamateria.com.br/crescimento-populacional/>. Acesso em: 25 abr. 2023.

COULON, Alain. Etnometodologia. Petrópolis: Vozes, 1995.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

GIL, Antonio Carlos. Como elaborar projetos de pesquisa. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1994.

LEITE, Maria Beatriz Ferreira; SILVA; Gabriella Helena Jorge da; SOUSA; Livia Fernandes de. Modelos Matemáticos Para O Crescimento Da População Do Estado De São Paulo E A Exploração De Diferentes Taxas De Crescimento. Rev. Ciência & Educação, v. 17, n. 4, p. 927-940, Campinas-2011.

NOVIDA. Diagrama de Dispersão. Novida Blog, 2021. Disponível em:
<https://www.novida.com.br/blog/diagrama-de-dispersao/>. Acesso em: 27 abr. 2023.

OLIVEIRA, J. B. Método dos Mínimos Quadrados. In: UFRGS. REAMAT - Recursos Educacionais Abertos em Matemática. Algebra Linear. Porto Alegre, 2014. Disponível em:
https://www.ufrgs.br/reamat/AlgebraLinear/livro/s14-mx00e9todo_dos_mx00ednimos_quadrados.html. Acesso em: 27 abr. 2023.

PITOMBEIRA, Vera Lúcia R.; ROQUE, Teresa Cristina M. Tópicos da história da Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2012.