ISSN: 2358-8829

DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CARGA DE UM CAPACITOR

Isaac Costa [1]

Orlando Batista de Almeida [2]

INTRODUÇÃO

Este trabalho foi desenvolvido por meio de uma pesquisa em materiais bibliográficos tais como livros e arquivos digitais. Procurou-se desenvolver um estudo sobre as equações diferenciais ordinárias, aplicada nos circuitos elétricos. Para tanto, esta pesquisa é de cunho explicativo e tem como objetivo o estudo da Modelagem Matemática utilizando as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). O foco principal da pesquisa é investigar e utilizar um modelo matemático que utiliza as equações diferenciais para descrever a equação de carga de um capacitor.

A Matemática tem sido sempre uma ferramenta necessária para a compreensão, explicação e desenvolvimento das formulações e conhecimentos envolvidos nas mais diversas áreas, dentre elas a Física e a Eletrônica.

Pautando-se na importância desta, este artigo pretende demonstrar através de uma modelagem matemática aplicada a um circuito em série com elementos resistivos e capacitivos a dedução da equação de carga do capacitor, recorrente e importante em diversas aplicações na Física e na Eletrônica. As equações diferenciais são expressões matemáticas que tem sua importância na utilização de modelagens que podem ser aplicadas em situações e fenômenos físicos do cotidiano, objetivando compreender, prevenir e prever os demais fenômenos da natureza que nos cercam.

Todavia, a modelagem ou a dedução matemática, tem se apresentado como explicação de solução de problemas encontrados em algumas áreas das Ciências da Natureza, sendo apresentadas e expressas a partir de combinações e formulações envolvendo as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) ou através também de Equações Diferenciais Parciais (EDP). Portanto a aplicação e a construção do conhecimento matemático são importantes na hora de solucionar tais problematizações presentes no nosso cotidiano.

[1] Graduando do Curso de Matemática do Instituto Federal da Paraíba, IFPB - PB, isaactel.costa@gmail.com;
[2] Graduado em Matemática pela Fundação Universitária ao Ensino Pesquisa e Extensão, Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Campina Grande, UFCG - PB, orlando.almeida@ifpb.edu.br.

ISSN: 2358-8829

Sendo assim, utilizando-se de uma pesquisa de cunho explicativo, este artigo baseia-se em referenciais teóricos já estudados nos contextos dos circuitos elétricos e das Equações Diferencias Ordinária (EDO), as quais aplicadas com o auxílio de técnicas de derivação e integração, modeladas a um fenômeno físico e combinadas a diversos cálculos presentes na dedução verificaram-se que a equação de carga do capacitor, advém das Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem. Esse estudo teve como finalidade, descrever o circuito RC, com o intuito de observar e analisar a queda de tensão em cada componente do circuito, a fim de relacionar as quedas de tensões com a segunda lei de Kirchhoff e com a 1º Lei de Ohm, com o objetivo de encontrar equações diferenciais ordinárias e a partir de sua resolução, chegar à solução desejada por meio da modelagem matemática.

As equações diferenciais são expressões utilizadas para modelar situações do cotidiano, cujo objetivo de compreender, prevenir e prever os fenômenos que nos cercam e nos surpreendem, deixando-nos curiosos e preocupados, às vezes, com algum acontecimento que venha ser prejudicial para a população, sendo necessário decidir se devemos interferir ou não em seu processo de desenvolvimento

Segundo BOYCE (2006, p 15-16) o surgimento das equações diferenciais ordinárias deu início com o desenvolvimento do cálculo, durante o século XVII, através de Leibniz (1646-1716) e através de Isaac Newton (1646-1727), na tentativa de desenvolver uma linguagem e uma notação adequada. O desenvolvimento do cálculo proporcionou aos seus estudiosos, adquirir, ao longo dos anos, conhecimentos que foram de extrema importância na criação e elaboração de notação para a derivada, dando surgimento para as equações diferenciais.

Segundo BOYCE (2006, p 15-16) a modelagem é um processo muito rico de encarar situações e culmina com a solução efetiva do problema real e não com a simples resolução formal de um problema artificial.

> A modelagem matemática é uma arte, de formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias (BIEMBENGUT, HEIN, 2007, p. 13).

Uma equação diferencial que descreve algum processo físico é chamada, muitas vezes, de modelo matemático do processo. As equações surgiram na ânsia de se descrever fenômenos naturais, é comum pensarmos em sua aplicação direta na física.

ISSN: 2358-8829

Para se definir modelo matemático, tomaremos como base a definição de Bassanezi (2002):

> Modelo matemático e um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. O modelo pode ser considerado como uma síntese de reflexão sobre alguma parte da realidade. Seu objetivo e explicar ou entender a situação estudada para, eventualmente poder agir sobre ela e, mesmo as situações mais simples fornecem motivações para uma iniciação cientifica (BASSANEZI, 2002, p. 12).

Destacamos a definição do Professor Bassanezi, pois ele e um dos pioneiros no estudo de Modelagem Matemática a qual tem se dedicado por muitos anos com publicações e produções cientificas, orientações e tem atuado como professor titular nos maiores centros universitários brasileiros.

Alem de Bassanezi, outro nome que se destaca nas pesquisas sobre Modelagem Matemática e o de Dionísio Burak. Para esse autor,

> A modelagem matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo e construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos do qual o homem vive o seu cotidiano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões (BURAK, 1987, p. 21).

A iniciação cientifica proporciona, com a modelagem matemática, as aplicações da Matemática em outras áreas do conhecimento podendo ser aprofundada a partir das áreas de pesquisa da disciplina em questão, por exemplo, as Equações Diferenciais Ordinárias.

O aperfeiçoamento para o professor proporciona a especialização do docente para uma nova metodologia de ensino ou simplesmente renovar os conhecimentos já adquiridos anteriormente a respeito da modelagem.

Os cursos regulares, por exemplo, de Calculo Diferencial e Integral pode proporcionar um ambiente rico de aplicações e modelos matemáticos em diversas áreas como Engenharia, Biologia, Física, entre outras áreas do conhecimento, permitindo, assim, investigações por parte dos alunos em sua própria área de estudo.

ISSN: 2358-8829

REFERENCIAL TEÓRICO

A 1º Lei de Ohm: a intensidade da corrente elétrica em um circuito é diretamente proporcional à tensão aplicada e inversamente proporcional a sua resistência. Utiliza-se a 1° lei de Ohm para encontrar os valores da tensão (v), da corrente (I) e da resistência (R) em um circuito elétrico. Para encontrar o valor desejado é só conhecer dois valores entre os três valores da lei de Ohm.

O estudo do eletromagnetismo dá origem a algumas propriedades de corpos que, quando combinados de diferentes maneiras podem gerar efeitos que são desejados em vários usos. O exemplo disso o ser estudado é o capacitor, que utiliza o efeito capacitância para armazenar energia. Baseado nisso, deseja-se estudar como a carga e descarga de um capacitor, focando-se na tensão presente no capacitor, o que permite calcular a carga e também a energia presente no capacitor.

Quando uma tensão V é colocada no Gerador o processo de carga no capacitor é iniciado. A carga é feita em um intervalo de tempo que depende da capacitância C do capacitor e da resistência do resistor R em série no circuito, que pode ser até a resistência interna do próprio voltímetro. No nosso experimento será associado um resistor R em série com o capacitor.

Alguns componentes de um circuito.

Resistor: É um dispositivo com a finalidade de limitar a passagem de corrente elétrica em um circuito. Ele oferece uma resistência elétrica, ou seja, ele dificulta a passagem de energia elétrica.

FIGURA 1: RESISTOR

Fonte: Próprio autor

ISSN: 2358-8829

Capacitor: É um dispositivo que serve para armazenar cargas elétricas. O capacitor é um componente eletrônico constituído de duas placas condutoras de corrente elétrica separadas por um material isolante denominado de dielétrico (armaduras).

A principal característica de um capacitor é a sua capacidade de acumular cargas. Para a verificação da dedução da equação de carga de um capacitor, é necessária a aplicação da modelagem matemática em um circuito série RC.

FIGURA 2: CAPACITOR

Fonte: Próprio autor

Fonte de tensão: É um dispositivo que gera uma força eletromotriz entre seus terminais, ou seja, gera uma quantidade de energia para movimentar uma carga.

Circuito elétrico em série.

Todavia, o circuito em série é o circuito onde todos os elementos se encontram interligado em série com a fonte de energia. No circuito em série a corrente elétrica é a mesma em todos os pontos do circuito e a tensão é dividida proporcionalmente.

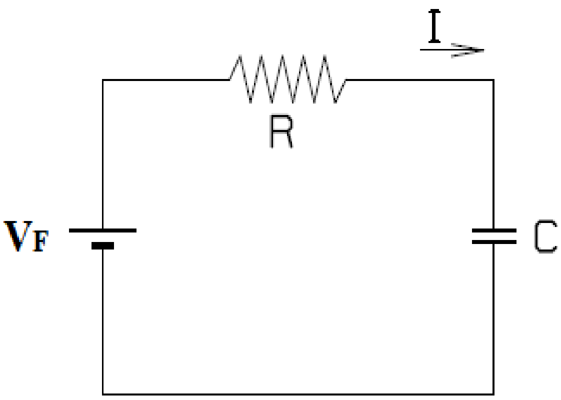
Em um circuito elétrico em série, as cargas se tornam dependentes umas das outras para seu funcionamento, e o motivo dessa dependência é simples: uma carga montada em série só utiliza um caminho para passagem da corrente elétrica. A corrente elétrica de um circuito em série se torna a mesma em todos os pontos onde as cargas são ligadas e a corrente elétrica de todas as cargas são iguais.

Circuito (RC) em série: resume-se em um resistor e em um capacitor, podendo esses dispositivos estar ligados em série ou em paralelos, onde o circuito é alimentado por uma fonte de tensão. Para estudar o comportamento de um circuito RC, podemos utilizar o circuito esquematizado na Figura 3.

Capacitância: é uma grandeza física que vai relacionar a quantidade de carga adquirida por um capacitor com seu potencial elétrico.

ISSN: 2358-8829

FIGURA 3: ESQUEMA SIMPLIFICADO DE UM CIRCUITO UTILIZADO PARA ENTENDER O PROCESSO DE CARGA DE UM CAPACITOR EM UM CIRCUITO RC.



Fonte: Próprio autor

Ao colocarmos uma tensão na fonte V, teremos:

$$V_R + V_C = V$$

Sendo V_R a tensão nos terminais do resistor e V_C a tensão nos terminais do capacitor. Com $T = R \cdot C$

Assim uma característica fundamental do circuito série é que a tensão da fonte VF, vista na Figura 3, divide-se entre cargas, presentes em seqüência ou série por todo o circuito.

Todavia, obedecendo a 1ª lei de Ohm, que anuncia que a diferença de potencial entre dois pontos de um resistor é proporcional à corrente elétrica que é estabelecida nele, teremos que a razão entre o potencial elétrico e a corrente elétrica é sempre constante para resistores ôhmicos.

Logo, nessas condições a queda de tensão no resistor é dada pela equação descrita abaixo.

$$VR = R \cdot I$$

Onde:

VR = Tensão do resistor

R = Resistência

I = Corrente elétrica do circuito

ISSN: 2358-8829

E que a tensão do capacitor é:

$$V_C = \frac{q}{C}$$

Também consideremos que, a corrente elétrica I:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Se apresentar como sendo a variação da carga q em função do tempo t.

2ª Lei de Kirchhoff (Lei das tensões ou Lei das malhas).

A eletrodinâmica é uma área da Física que pode parecer bastante complicada, principalmente nos exercícios que envolvem as leis de Kirchhoff. O nome "Leis de Kirchhoff" se dá porque elas foram criadas pelo físico alemão Gustavo Robert Kirchhoff, em 1845. Ele foi importante não apenas no campo da eletrodinâmica, como também nas áreas da espectroscopia e da termologia.

Uma malha é um caminho fechado de um circuito, não havendo outros caminhos dentro da mesma. Um único circuito pode ter várias malhas. A lei de Kirchhoff para a tensão (LKT) diz que a soma algébrica de todas as tensões em torno de um caminho fechado (ou laço) é zero. Essa Lei estabelece que seja nulo o somatório das quedas e elevações de tensão ao longo de um caminho fechado de um circuito elétrico;

$$\sum v = 0$$

Ou seja:

$$V1 + V2 + V3 + V4 + \cdots Vn = 0\ ,$$

Onde temos que, pela 1ª lei de Ohm, aplicamos:

$$R1I1 + R2I2 + R3I3 + R4I4 + \cdots RnIn = 0$$

Todavia, também temos que, a lei de Kirchhoff para a corrente (LKC) diz que a soma algébrica das correntes que entram em um nó é zero. Como também, a soma das correntes que entram em um nó é igual à soma das correntes que saem desse nó.

ISSN: 2358-8829

METODOLOGIA

A metodologia aplicada foi o uso de ferramentas matemáticas para a modelagem, usando de algoritmos de equações, regras de substituições e técnicas de derivação. Logo através destas, e dos conceitos teóricos aqui mencionados, usamos como base para esta demonstração, as definições usuais da 1ª Lei de Ohm aplicados a 2ª Lei de Kirchhoff para a tensão (LKT), no circuito RC da Figura 3, dando inicio assim a um modelo matemático equacionado para a malha do circuito RC.

Assim, separando as tensões em cada componente do circuito da Figura 3, teremos a seguinte fórmula:

$$V_F - V_R(t) - V_C(t) = 0$$

$$V_F - R \cdot i(t) - \frac{q(t)}{C} = 0$$

Equação (3)

Sendo VF constante (tensão da fonte não muda)! Assim. Subtraindo VF em ambos os membros da equação, temos:

$$-R \cdot i(t) - \frac{q(t)}{C} = -V_F$$

Multiplicando a equação por (−1), temos:

$$R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C} = V_F$$

Equação (5)

Substituindo a equação (3) na equação (5), obtemos:

$$R \cdot \frac{dq(t)}{d(t)} + \frac{q(t)}{C} = V_F$$

Equação (6)

Logo, chegamos em uma E.D.O (Equação Diferencial de Primeira Ordem). Para simplificar a equação (6) na forma mais simples em E.D.O iremos multiplicar os termos da equação por $\frac{1}{R}$ assim teremos:

$$\frac{1}{R}\left(R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{C}\right) = \frac{1}{R} \cdot V_F$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{RC} = \frac{V_F}{R}$$

Equação (7)

Assim, comparando a equação 7 com o modelo de uma E.D.O, Y ′ + p(x)Y = q(x), temos:

$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{RC} = \frac{V_F}{R}$$

Equação (8) $$q' + \frac{1}{RC} \cdot q = \frac{V_F}{R}$$

Diante disso, usaremos a propriedade do fator integrante: $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$

Para resolvermos a equação (8). Assim sendo, teremos:

$$p(t) = \frac{1}{RC}, \text{ teremos: } \mu(t) = e^{\int \left(\frac{1}{RC}\right) dt}$$

Logo teremos o nosso, F. I. (fator integrante) como sendo:

$$\mu(t) = e^{\left(\frac{t}{RC}\right)}$$

Multiplicamos a equação (8) pelo μ(t) (fator integrante).

$$e^{\left(\frac{1}{RC}\right)} \cdot q' + \frac{1}{RC} \cdot e^{\left(\frac{t}{RC}\right)} \cdot q = e^{\left(\frac{t}{RC}\right)} \cdot \frac{V_F}{R}$$

$$\mu \cdot q' + \mu' \cdot q = e^{\left(\frac{t}{RC}\right)} \cdot \frac{V_F}{R}$$ Derivada do produto

$$(\mu \cdot q)' = e^{\left(\frac{t}{RC}\right)} \cdot \frac{V_F}{R}$$

$$\left(e^{\left(\frac{t}{RC}\right)} \cdot q\right)' = e^{\left(\frac{t}{RC}\right)} \cdot \frac{V_F}{R}$$ Equação (9)

ISSN: 2358-8829

Integrando a Equação (9), iremos ter:

$$\int \left(e^{\left(\frac{t}{RC}\right)} \cdot q \right)' dt = \int \left(e^{\left(\frac{t}{RC}\right)} \cdot \frac{V_F}{R} \right) dt$$

$$e^{\left(\frac{t}{RC}\right)} \cdot q = \frac{V_F}{R} \cdot \int e^{\left(\frac{t}{RC}\right)} dt$$

Se temos,

$$\int e^u du = e^u + k \qquad u = \frac{t}{RC} \qquad du = \frac{1}{RC} dt$$

Fazendo,

$$dt = RC \cdot du$$

$$e^{\left(\frac{t}{RC}\right)} \cdot q = \frac{V_R \cdot RC}{R} \cdot \left[e^{\left(\frac{t}{RC}\right)} + K \right]$$

$$\frac{q}{C} = \frac{V_F}{e^{\left(\frac{t}{RC}\right)}} \cdot e^{\left(\frac{t}{RC}\right)} + \frac{k}{e^{\left(\frac{t}{RC}\right)}}$$

$$\frac{q}{C} = V_F + K \cdot e^{-}\left(\frac{t}{RC}\right).$$ Equação (10)

Se temos a Tensão no Capacitor como sendo,

$$V_C(t) = \frac{q}{C}$$

Equação (11) $$V_C(t) = V_F + K \cdot e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)}$$

Agora chegamos em um problema de P.V.I, assim teremos no momento inicial (quando t = 0). Com a tensão igual a zero, substituímos o valor da tensão por zero, então fica.

$$0 = V_F + K \cdot 1$$
$$k = -V_F$$

ISSN: 2358-8829

Afirmando o tal procedimento, podemos colocar a Tensão na Fonte, VF em evidência:

$$V_C(t) = V_F - V_F \cdot e^{\left(-\frac{t}{RC}\right)}$$

Aplicando, T = R•C

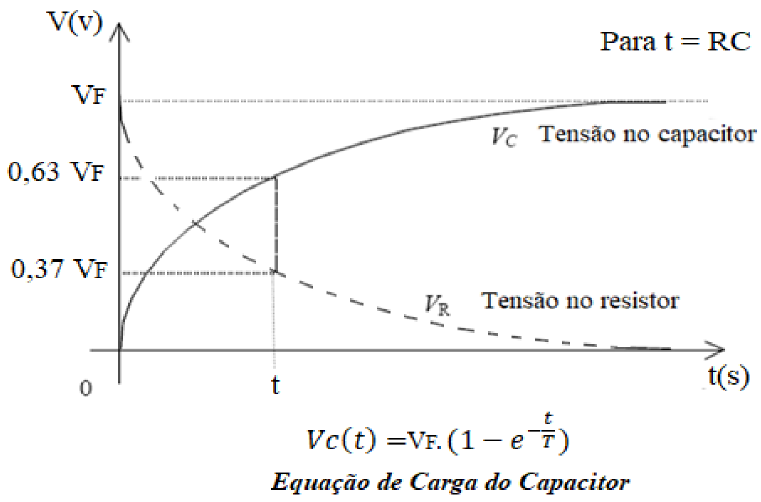
$$V_C(t) = V_F \cdot \left(1 - e^{\left(-\frac{t}{T}\right)}\right) \quad \text{c. q. d.}$$

Assim, chegamos na equação de carga de um capacitor. Essa equação tem aplicação imediata em um circuito em série, de um circuito filtro RC, usada para calcularmos a tensão da carga no capacitor no domínio do tempo.

RESULTADOS

Os cálculos foram manipulados para que através da modelagem matemática, fosse possível chegar a uma única fórmula, envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), e técnicas de integração, onde, fornecendo dados como resistência, capacitância e a tensão da fonte fossem possíveis determinar o valor do tempo de carga de um capacitor projetado em um circuito série filtro RC, por meio de uma única fórmula matemática.

GRÁFICO 4: GRÁFICO DA TENSÃO DE CARGA DO CAPACITOR EM FUNÇÃO DO TEMPO



Fonte: Próprio autor

Como pode ser observada no gráfico acima, a curva de carga do capacitor em um circuito RC, conforme previsto na dedução matemática é uma equação exponencial.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme os resultados apresentados foram possíveis comprovar que a dedução da fórmula de carga do capacitor é válida, e atende aos critérios da modelagem através das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO).

REFERÊNCIAS

FLORIN, D. **Introdução a Equações Diferencias:** Teoria e Aplicações, Rio de Janeiro: LTC, 2004.

CAPUANO, Francisco Gabriel; MARINO, Maria Aparecida Mendes. **Laboratório de eletricidade e eletrônica**. 24. ed. São Paulo: Érica, 2010.;

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**, São Paulo, Editora Contexto, 2002, p. 12

BURAK, D. **A modelagem matemática e relações com a aprendizagem significativa**, São Paulo, Primeira Edição, Editora CRV, 1987, p. 21

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2006