ISSN: 2358-8829

APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: DINÂMICA POPULACIONAL DA CIDADE DE PICUÍ

Érick Emanuel Teixeira da Silva [1]
Natanael Souza Costa [2]
Vanusa Eulália dos Santos Dantas [3]
Glageane da Silva Souza [4]

INTRODUÇÃO

Na cidade de Picuí situada no extremo norte do estado da Paraíba, a pesquisa realizada sobre a teoria de Malthus fornece um contexto importante para compreender os desafios do crescimento populacional. A partir de uma população relativamente pequena, e tendo em consideração de que a cidade experimentou um aumento significativo ao longo dos anos, mesmo sujeita à migração e ao crescimento natural de qualquer ambiente urbano. No entanto, essa expansão populacional trouxe um aspecto importante, na qual podemos observar que o crescimento populacional ocorre de forma exponencial, enquanto os recursos disponíveis para sustentar essa população crescem de forma mais lenta, tendo em vista que a cidade tem uma população muito pequena.

O objetivo principal da pesquisa consistiu em compreender as aplicações das equações diferenciais ordinárias, com o propósito de avaliar as variações de valores ao longo do tempo. Além disso, a pesquisa também buscou analisar o comportamento de uma cidade em um período específico, utilizando dados do IBGE, e aplicar o modelo de Malthus para posteriormente comparar os resultados obtidos.

Com efeito, a modelagem matemática procura um padrão a ser estudado, ou um modelo, seja ele de qualquer área do conhecimento. Segundo Borsoi e Almeida (2004), e Medeiros (2016), atualmente, é vista como um poderoso recurso no processo de ensino e aprendizagem, sendo recomendada por diversos autores como Bassanezi (2002), D'Ambrósio (1986), entre outros. Ao modelar um sistema, os dados são coletados e analisados para criar um modelo matemático que representa o comportamento do sistema. Em muitos casos, esse modelo pode ser descrito por uma ou mais EDOs.

[1] Graduando do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, erickemanuel2021@gmail.com;
[2] Graduando do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, souzanatanael882@gmail.com;
[3] Graduanda do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, vanusaeulalia@gmail.com;
[4] Professora orientadora: Doutora, Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, glageanemat@gmail.com.

ISSN: 2358-8829

As soluções de EDOs juntamente com o processo metodológico de modelagem matemática permitem prever como um sistema irá se comportar no futuro, com base em seu estado atual e em como ele muda ao longo do tempo, isso pode ser útil em diversas aplicações, desde a previsão do clima e previsão de tendências econômicas até o design de sistemas de controle automatizados, ora através da modelagem matemática o professor pode tratar diversos conteúdos e conhecimentos interdisciplinares e transversais.

Portanto, a modelagem matemática e a solução de EDOs são fundamentais para a compreensão e resolução de problemas que envolvem sistemas dinâmicos e têm aplicações em diversas áreas do conhecimento, desde a física e engenharia até a biologia e economia. Dessa maneira a modelagem matemática aplicada nas EDOs oferece variados caminhos onde podemos utilizar alguns modelos, na qual chegaremos a um determinado resultado.

METODOLOGIA (OU MATERIAIS E MÉTODOS)

Foi desenvolvido um estudo a respeito da modelagem matemática, na qual, foi utilizada em questão para que tenhamos o conhecimento a fim de estabelecer e concretizar o trabalho. Sendo assim, essa reformulação visa estabelecer uma base teórica sólida e apresentar a metodologia proposta, que consiste na construção teórica e na resolução analítica utilizando técnicas comumente empregadas nesse contexto.

O modelo utilizado na aplicação é a dinâmica populacional, no qual é comumente realizada por meio de modelos matemáticos, como os modelos de crescimento populacional. Esses modelos consideram variáveis como: taxas de natalidade, mortalidade, migração e interações sociais. A partir dessas informações, é possível realizar previsões sobre o comportamento futuro da população, identificar tendências e compreender os efeitos das alterações ambientais ou sociais. No contexto desta literatura, nosso foco será exclusivamente no Modelo de Malthus.

O modelo de Malthus (1798) é de suma importância para todos os estudos subsequentes acerca de modelagem de dinâmicas populacionais. O Modelo de Malthus, formulado por Thomas Malthus no século XIX, é amplamente reconhecido como um modelo clássico de crescimento populacional. Sua premissa fundamental é que a população humana tende a crescer de maneira exponencial, enquanto os recursos necessários para sustentar essa população têm um crescimento mais restrito.

Malthus descreveu o crescimento populacional através da seguinte equação:

ISSN: 2358-8829

$$\frac{d\,P(t)}{dt} = kP(t)$$

sujeita a condição inicial $p(0) = p_0$

- k é taxa de crescimento da população
- P é a população atual
- P_0 é a população inicial
- t é o tempo

a solução do valor inicial é dada por:

$$P(t) = p_0 e^{kt}$$

Demonstração: Pela hipótese de Malthus, temos que:

$$\frac{dP}{dt} = kP(\mathrm{t})$$

Resolvendo atraves do método de equações separáveis, teremos:

$$\frac{dP}{P(t)} = kdt$$

Integrando ambos os lados, obtemos:

$$\int \frac{dP}{P(t)} dt = \int kdt$$

Resolvendo as integrais,

$$\ln|P| = kt + c$$

Aplicando a função exponencial, em ambos os lados:

$$P = e^{kt+c}$$

Dai, aplicando uma propriedade dos expoentes,

$$P = e^{kt} e^{c}$$

Agora, chamando $e^c = P_{0,}$ na qual P_0 é a população inicial, temos:

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

fazendo $t = 0$, teremos

$$P(0) = P_0 e^{k0}$$

Portanto, concluimos que

$$P(0) = P_0$$

Após a explicação desse conceito, o modelo foi aplicado por meio da resolução de problemas utilizando dados reais da situação-problema em questão.

A aplicação se deu ínicio a aplicar o presente modelo de malthus na cidade de Picuí-PB entre os anos de 2010 a 2020 e comparar a discrepacia ou o aumento da população, tendo em vista, que o atual modelo utilizado é uma ferramenta de aproximação. Pois de acordo com Boyce e Diprima (2010) é necessário reconhecer que cada problema tem suas características e que a arte de modelar não é uma habilidade que pode ser reduzida a uma lista de regras.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Situação problema: A cidade de Picuí está situada no interior da Paraíba com uma área territorial 667,714 km², a população desse município em 2000 era de 17.896 habitantes já em 2010 a população passou a ser um pouco maior para 18.226 habitantes. De acordo com o modelo de crescimento populacional utilizando o modelo de Malthus qual será a população da cidade de Picuí em 2020?

Solução: tomando nossa população inicial do ano 2000 igual a 17.896 habitantes, utilizando a fórmula teremos

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

perceba que $P(0) = 17.896$ o que implica que

$$P(0) = P_0 e^{k0}$$

$$P(0) = P_0$$

Portanto,

$$P_0 = 17.896$$

Agora com o tempo de 10 anos, temos

$$P(10) = 17.896\ e^{10k}$$

$$18.226 = 17.896\ e^{10k}$$

$$\ln\left(\frac{18.226}{17.896}\right) = 10k$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{18.226}{17.896}\right)}{10}$$

$$k \cong 0.00182$$

substituindo k em $P(t) = 17.896\ e^{kt}$

$$P(t) = 17.896\ e^{0,00182t}$$

fazendo para $P(10)$ obtemos

$$P(10) = 17.896\ e^{0.00182 \times 10}$$

$$P(10) \cong 18.224$$

Percebe-se ao longo dos cálculos finais que a população em 2020 é de 18.224 habitantes.

COMPARAÇÃO DE RESULTADOS

Observando que, de acordo com o modelo de Malthus, a população estimada para o ano de 2020 é de 18.224 habitantes, enquanto os dados reais do IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (2022) mostram que a população é de 18.333 habitantes. Nesse sentido, é possível notar uma discrepância mínima de 109 habitantes, o que representa uma margem de erro de apenas 0,595%. Esses resultados indicam que os cálculos utilizados no modelo de Malthus são consideráveis e aceitos para a modelagem matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em conclusão, os cálculos utilizados no modelo de Malthus demonstraram-se notavelmente relevantes e aceitos para a modelagem matemática da população. A pequena diferença de 109 habitantes, com uma margem de erro de apenas 0,595%, entre a previsão do modelo e os dados reais do IBGE para o ano de 2020, ressalta a precisão e a eficácia do modelo no contexto de estimativas populacionais. No entanto, é essencial considerar que a aplicação desse modelo deve ser feita com cautela e considerando outras variáveis socioeconômicas, pois, embora apresente resultados significativos, a realidade demográfica pode ser influenciada por diversos fatores complexos. Portanto, o modelo de Malthus continua sendo uma importante ferramenta de análise, mas é imprescindível complementá-lo com abordagens e dados adicionais para obter uma compreensão abrangente das dinâmicas populacionais.

Nesse sentido, também pode ser feita a estimativa e a validação em diferentes regiões, a incorporação de mais variáveis ao modelo e comparações com outras abordagens demográficas. Essas iniciativas ajudariam a refinar e expandir nossos conhecimentos sobre a população, fornecendo subsídios valiosos para planejamento urbano, políticas públicas e desenvolvimento sustentável.

Palavras-chave: Equações Diferenciais, Modelagem, Aplicações, Crescimento, Modelo de Malthus.

ISSN: 2358-8829

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. **Contexto**, 2002.

BORSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. d. Modelagem matemática e aprendizagem significativa. **Educ. Mat. Pesqui**., São Paulo, v. 6, n. 2, pp. 91-121, 2004.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. Rio de Janeiro: **LTC**, 2010.

D'AMBRÓSIO U. Da realidade á ação: Reflexões sobre Educação Matemática, Campinas: **Sammus Edit.**, 1986.

IBGE – INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Censo Brasileiro de 2020**. Rio de Janeiro: IBGE, 2022.

MALTHUS, Thomas Robert. Um ensaio sobre o princípio da população (1798). **As Obras de Thomas Robert Malthus, Londres, Pickering & Editores Chatto**, v. 1-139, 1986.

MEDEIROS, E. F. Uma introdução ao estudo das Equações Diferenciais Parciais usando o modelo de Euler-Bernoulli para a vibração transversal de uma barra flexível. **Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG**, Graduação em Matemática Licenciatura, Rio Grande/RS, 2016.