

Matemática e Geografia: as contribuições da interdisciplinaridade da Geometria não-euclidiana e da Cartografia no ensino e aprendizagem

Luiz Tiago de Paula ¹
Ubiratan Barros Arrais ²

RESUMO

O presente trabalho tem dois desafios a explorar: o primeiro é de cunho pedagógico e epistemológico, com intuito de pensar a formação de professores, no ensino superior, por área de conhecimento, cujas experiências acadêmicas dos alunos extrapolem os limites formais e as especificidades disciplinares do conhecimento científico, especialmente, aos temas que se referem aos campos das ciências humanas e ciências exatas. E o segundo é (re)pensar a importância do fascínio com o saber: ao dar sentido aos objetos de estudos, dentro de uma perspectiva que não esteja totalmente subordinada aos domínios conceituais do conteúdo, procuramos uma metodologia que envolva as trocas de trajetórias dos alunos, incluindo a imaginação, criatividade e as estratégias de cooperação. A partir de uma sequência didática, unimos turmas de graduação dos cursos de Matemática e Ciências Humanas, na Faculdade Sesi de Educação, das unidades curriculares de Cartografia II e Geometrias Não-Euclidianas, e propomos uma oficina pedagógica. Procuramos trabalhar com os conceitos das Geometrias Não-Euclidianas de Bolyai e Lobachevsky, e episódios da História da Cartografia para criar uma atividade que (re)produzisse alguns preceitos do experimento de Eratóstenes que calculou a circunferência da Terra, no século III a.C.

Palavras-chave: Interdisciplinaridade, Geometrias Não-Euclidianas, Cartografia, Ciências Humanas, Matemática.

INTRODUÇÃO: ENFRETTAMENTO E SUPERAÇÃO DE PRECONCEITOS PEDAGÓGICOS

A especialização e a fragmentação do conhecimento científico, na modernidade, afetaram diretamente a estruturação dos currículos escolares, as metodologias de ensino e as próprias percepções de como alunos e professores compreendem os conteúdos ensinados – geralmente, restritos à uma ou outra disciplina, sem qualquer concepção crítica (JAPIASSU, 1994).

Expressões populares sobre os conteúdos de aprendizagem como “das humanas” ou “das exatas” ilustram bem como esse cenário tem desarticulado as relações intrínsecas das inúmeras possibilidades e formas do saber que se situam na intersecção entre as disciplinas acadêmicas. Assim, se considerarmos que o conhecimento científico tem como um de seus pilares metodológicos a prática da *observação*, esta, por sua vez, deve ser guiada por uma

¹ Professor de Ciências Humanas na Faculdade Sesi de Educação, luiz.tiago@faculdadesesi.edu.br;

² Professor de Matemática na Faculdade Sesi de Educação, ubiratan.arrais@faculdadesesi.edu.br;

curiosidade genuína que supere os limites teóricos entre os campos científicos já consolidados. Muitas vezes, estes campos criam e confundem o *rigor científico* com preconceitos que obstruem a possibilidade de dúvidas e hipóteses interdisciplinares.

Este ensaio procura demonstrar como a ciências humanas e as ciências exatas – especialmente a Matemática e a Geografia – podem compartilhar objetos pedagógicos com perspectivas integradoras, as quais se propõem, por diferentes ângulos, construir espaços onde a dúvida, a criatividade e a curiosidade sejam premissas de trocas e produções efetivas de conhecimento. Para isso, procuramos relatar uma experiência pedagógica na Faculdade Sesi de Educação de São Paulo, envolvendo professores e alunos dos cursos de graduação em Ciências Humanas e Ciências Exatas.

A partir de uma oficina didática das unidades curriculares de Cartografia e Geometrias Não-Euclidianas, nos propomos a contar histórias sobre cenários e personagens plurais da história das “cartografias” e das “geometrias”, percorrendo lastros históricos e contextos sociais que ambas as áreas se destacaram como seios de ações transdisciplinares, seja como arte, seja como necessidade humana.

Entre estes personagens, destacamos Eratóstenes de Cirene (276-196 a.C.) e seu experimento para calcular a circunferência da Terra, hoje classificada como Linha do Equador. Os alunos e alunas de graduação de ambos os cursos (Matemática e Ciências Humanas) tiveram que reproduzir técnicas do experimento em esferas de isopor que simulavam globos terrestres com transferidores para calcular coordenadas geográficas e encontrar a distâncias entre locais da superfície terrestre.

HISTÓRIA E MODERNIDADE: NATUREZA E EVOLUÇÃO DE “GEMOTRIAS” E “CARTOGRAFIAS”

O surgimento dos mapas ainda é um mistério entre geógrafos, historiadores e arqueólogos. Embora, comumente, consideramos a Cartografia como um campo do conhecimento que se consolida a partir do século XV, com o desenvolvimento náutico de sistemas de coordenadas que possibilitavam longas viagens intercontinentais, os mapas são muitos mais antigos – mais antigos, até mesmo, do que a própria escrita.

É na pré-história, período Paleolítico ou *Idade da Pedra Lascada*, há mais de 100 mil anos, que as primeiras formas de recursos iconográficos, como artes rupestres, rabiscavam arenitos e calcários, nos fundos das cavernas, com a clara intenção de registrar conhecimentos espaciais sobre os ambientes habitados por seres humanos. Obviamente, tratava-se de

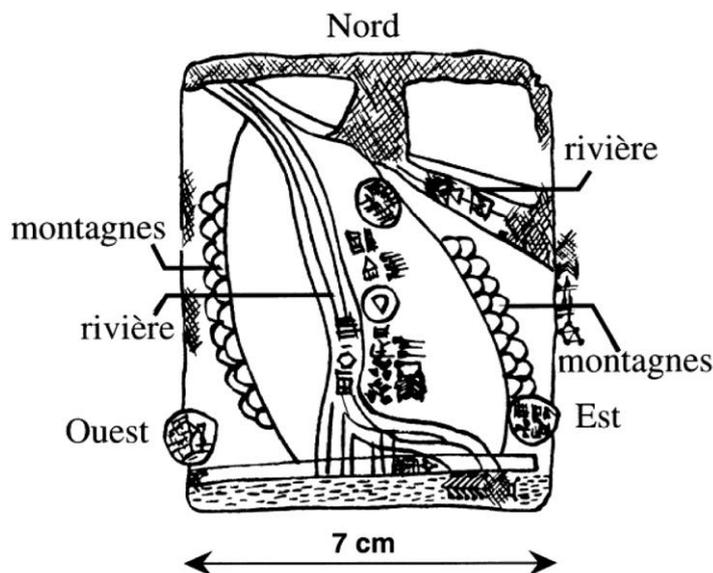
estratégias de sobrevivência e de uma função evolutiva, ao indicar e compartilhar a localização de alimentos, vegetais, caças, eventos perigosos como predadores e outras informações importantes, ajudariam à manutenção da espécie.



Fonte: Martin (1993, p.9)

Formas circulares, traçados lineares e outras figuras geométricas revelariam ali, se não a Cartografia como a concebemos hoje, o nascimento da Geometria e dos mapas, em um simples gesto artístico e representativo. À medida que as representações do espaço evoluíram, segundo as grandes revoluções técnicas, não causa espanto algum afirmar que a história da Cartografia e da Geometria se misturam às mudanças culturais e sociais da humanidade (OLIVEIRA, 1988). A necessidade de representar o espaço, para autores como Raisz (1969), é uma característica inata da humanidade. São vários os registros de relatos acerca da existência de técnicas rudimentares e esboços que se apresentam formas embrionárias de um “cartografar” e um “geometrizar” do espaço.

O mapa de Ga-Sur encontrado na cidade de Harran, na Mesopotâmia, foi esculpido em argila entre 2.500 a 4.500 a.C. O artefato é tão pequeno que cabe na palma de uma mão. Mas o que o torna mais intrigante é a forma de representação como o vale do rio Eufrates aparece. Sinuoso e de considerável extensão longitudinal, o rio é cercado por ambos os lados de montanhas desenhadas por semicírculos padronizados, revelando, portanto, uma tentativa de padronizar e generalizar aspectos da paisagem.



Fonte: British Museum. Domínio Público. Wikimedia Commons. Disponível em:

<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?search=map+ga-sur&title=Special:MediaSearch&go=Go&type=image> Acesso em: 25 de Agosto, 2023.

A geometria também foi utilizada, ainda no Egito Antigo, às margens do Rio Nilo para mensuração de suas vazões. Às margens, encontravam-se solos férteis formados pela deposição de sedimentos ricos em nutrientes às atividades agrícolas.

O conhecimento matemático tem papel fundamental no estabelecimento das eras históricas. Os saberes sobre valores numéricos e de relações espaciais colaborou até à transição da mera recolha de alimentos para a sua produção e da caça e da pesca para a agricultura, ou seja, entre paleolítico e o neolítico. A transformação se deu a partir de uma revolução na qual a atitude do ser humano perante a natureza deixou de ser passiva para se tornar ativa.

Nesse sentido, a geometria sempre circundou o cotidiano das pessoas. A escolha das geometrias não-euclidianas foi uma escolha pedagógica que a partir de experimentações de formas curvilíneas, elípticas e hiperbólicas se ampliasse o repertório e a própria compreensão desse campo matemático. Essas dimensões possibilitaram que se retirasse a compreensão também da cartografia e de sua projeção plano-euclidiana convencional.

A OFICINA: CARTOGRAFIA E GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

Nosso entendimento é de que ante às dificuldades para apreender, na alfabetização cartográfica, conceitos como o da bidimensionalidade e da tridimensionalidade, a geometria não-euclidiana e a prática transdisciplinar são suportes para o deslocamento da aprendizagem.

A partir de aportes do húngaro Bolyai e do russo Lobachevsky (COUTINHO, 2018), ambos no século XIX, a geometria não-euclidiana trouxe as explicações sobre os espaços curvos, que têm propriedades diferentes das formas planas da geometria euclidiana, e abriram caminho, inclusive, para que Einstein pudesse comprovar sua Teoria da Relatividade.

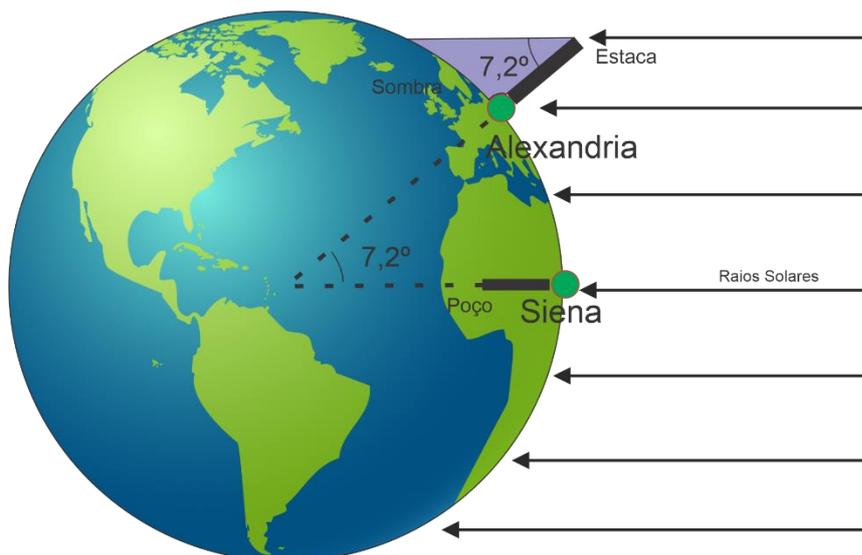
Joly (1990) nos convida a pensar as dificuldades de se transpor a definição exata das formas e dimensões da Terra, uma vez que “um mapa dá uma imagem incompleta do terreno” (1990, p.32). Isso posto, se coloca como um desafio ensinar a disciplina cartográfica, especialmente nos primeiros anos do Ensino Fundamental II, quando os estudantes ainda estão compreendendo conceitos além do plano bidimensional.

A proposta da oficina foi a prática interdisciplinar para transpor a experiência de Eratóstenes, importante matemático e geógrafo egípcio que viveu no século III a.C., e que, há mais de 2000 anos, mediu a circunferência da Terra, chegando a um número bem próximo ao que pôde ser comprovado muito posteriormente.

Sobre Eratóstenes, enquanto diretor da Biblioteca de Alexandria, teve acesso a anotações de outros pensadores da antiguidade. Certa vez, o egípcio notou que, ao meio-dia, no solstício de verão, o sol estava diretamente acima de Siena, tendo um ângulo zênite, fazendo com que o poço na cidade não produzisse sombras. No mesmo momento, em uma outra cidade ao norte do Egito, Alexandria, os objetos como colunas e torres, a partir de raios solares, projetavam uma sombra oblíqua. Eratóstenes sabia que a distância entre as duas cidades era de cerca de 800 km, então ele usou esse conhecimento, e a semelhança de ângulos a partir de retas secantes (normais), para comprovar que a Terra é esférica e calcular sua circunferência.

Ele percebeu que a diferença entre os ângulos formados pelos raios solares em Alexandria e em Siena era de cerca de 7° . Sabendo que essa diferença correspondia a cerca de $1/50$ da circunferência da Terra, ele calculou que a circunferência da Terra era de cerca de 40.000 km. Observe a ilustração³:

³ A figura é meramente ilustrativa, não correspondendo com as posições geográficas das cidades citadas.



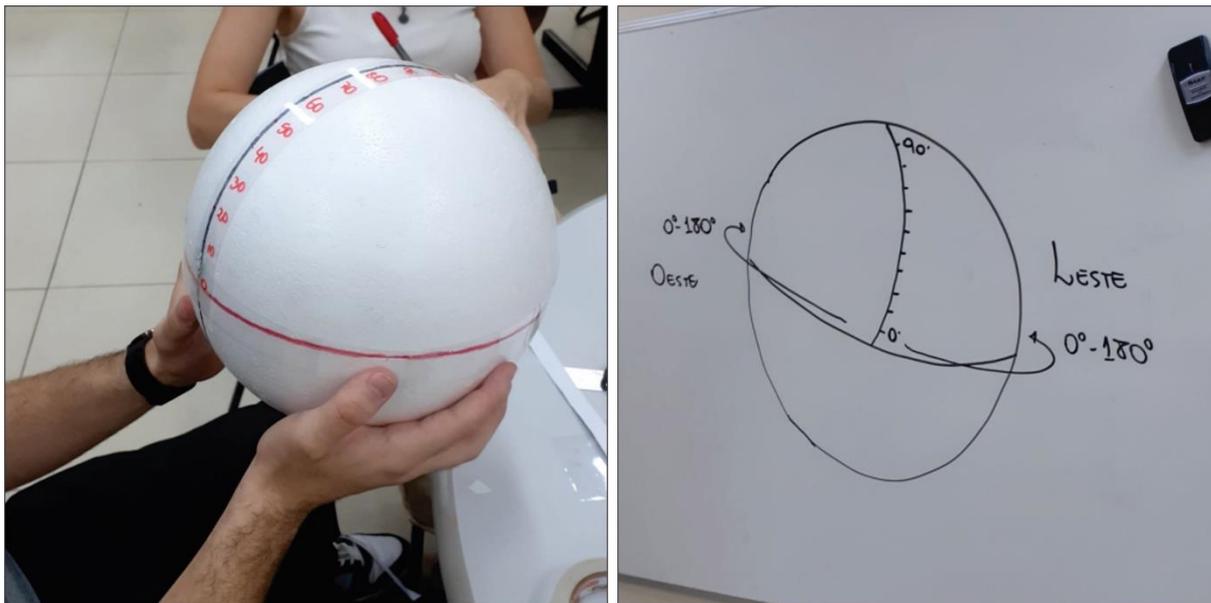
Elaboração: Luiz Tiago de Paula

Essa estimativa estava muito próxima da medida real da circunferência da Terra, que foi determinada mais tarde por outros meios mais tecnológicos. A contribuição de Eratóstenes foi importante porque mostrou que a Terra era semelhante a uma esfera, uma ideia que já havia sido proposta por outros filósofos gregos, mas que ainda era controversa.

Esse episódio da história da ciência foi amplamente explorado em debates ao longo das aulas com os alunos e alunas. Isto porque, apesar de um raciocínio, extremamente, sofisticado, a ideia de Eratóstenes, em essência, era simples e audacioso. A tenuidade da observação da projeção das sombras demonstrou que foi possível conhecer o mundo em sua maneira mais primitiva, ou melhor, telúrica de experimentação. Revelar propostas como estas pode criar diversas chaves epistemológicas e metodológicas na prática de formação docente que inclua o próprio conhecimento como objeto de estudo.

A OFICINA GEOMETRIA-CARTOGRAFIA EM SALA DE AULA

Após a exposição teórica e a discussão sobre a história da Cartografia e o advento das Geometrias Não-Euclidianas, desenvolveu-se as práticas pedagógicas. A intenção era fazer com que os alunos e alunas calculassem as distâncias entre quaisquer cidades, utilizando esferas de isopor, que representassem a Terra. Ao discriminar com diâmetros que substituíssem o Meridiano de Greenwich (Meridiano Principal) e a Linha do Equador, foram traçados intervalos de graus de referências para que as coordenadas geográficas dos locais fossem encontradas e suas distâncias medidas.



Fotografia: Luiz Tiago de Paula (2023)

Na proposta de simular a experiência em sala de aula, os professores entregaram aos alunos materiais como bolas de isopor, tesoura, acetato, régua e canetas.

O primeiro passo foi construir um transferidor esférico. A distância a ser medidas em graus e, depois, convertida em quilômetros seria sobre a superfície esférica do globo. A simples medição com qualquer instrumento euclidiano, ou seja, que considerasse a superfície plana, causaria distorção e possíveis erros de mensuração das distâncias.

O transferidor era composto por um círculo perimetral, que se encaixaria sobre a Linha do Equador. Porém, suas medidas seriam referentes aos dados da longitude, ao representar os graus que variassem os ângulos entre os hemisférios Leste e Oeste – 180° ao Ocidente e 180° ao Oriente.

O semicírculo, na parte superior do transferidor, variava de 0° a 90° graus de Norte a Sul, indicando os dados de latitude. A mobilidade do transferidor sobre o globo terrestre (esfera de isopor) permitia tentativas de pontuar a localização das cidades. Portanto, a partir de uma breve pesquisa na internet sobre a localização, por exemplo, do município de São Paulo, 23°33'01''S – 46°38'02''O, os estudantes marcassem com caneta sua suposta posição. O mesmo processo era feito para a segunda localização. Ao final, a distância em “linha reta” – na verdade, curva – era estimada em termos proporcionais: se, segundo Eratóstenes, 360° equivale a 40.000 quilômetros, a distância em graus entre as duas cidades seria uma variável “x”.

Esse cálculo simplificado por uma “regra de três”, de acordo com os instrumentos de cada grupo de alunos, poderia demonstrar resultados bem aproximados a depender da confecção

dos materiais dispostos. No entanto, o que se valorizou foi as trocas de experiências entre alunos de campos do conhecimento diferentes – ciências humanas e matemáticas – com a intenção de dar sentido aos seus objetos de estudo a partir de uma atividade a qual o quesito principal fosse o engajamento e a abertura à curiosidade, às possibilidades dos erros.

Percebemos que, mesmo a notável dificuldade, às vezes, de alguns estudantes ao domínio das operações matemáticas quanto aos cálculos de proporcionalidade, ou ainda, de compreensão sobre os conceitos envolvidos com as medidas de coordenadas geográficas, essas fragilidades representaram potências de trocas e novas oportunidade de aprendizagem. O engajamento pedagógico criou um espaço aberto ao não-entendimento, à revisão, contestação e novas propostas. Grupos encontraram diferentes maneiras de chegar aos resultados, cada qual sobre uma perspectiva singular de ver e enfrentar os problemas dentro do processo. Mas, em uníssono, chegaram a resultados muito parecidos.



CONCLUSÃO

A geometria não-euclidiana pode ajudar a entender a cartografia, fornecendo ferramentas matemáticas para representar superfícies curvas e reduzir as perspectivas que promovem distorções em mapas. A parceria entre as duas unidades curriculares permitiu, como aponta Japiassu (2006), ultrapassar os caminhos batidos e os saberes adquiridos, para chegar a conhecimentos e à proposições sobre um problema complexo: reproduzir a experiência de medir distâncias entre pontos na Terra e reforçar o aprendizado dos conceitos geométricos e cartográficos.

Em relação ao deslocamento da aprendizagem, vamos considerar as contribuições de Almeida (2001), na qual ela traz, a partir de aportes de Lev Vygotsky, que o domínio dos signos se tornou uma condição necessária para a ação: o acesso à informação e o desenvolvimento do pensamento se destaca, à medida que os conteúdos de representação espacial se legitimam. Portanto, discutir formas de representação possibilitam aos estudantes chegarem aos saberes cuja abrangência de compreensão ampliem sua leitura e cognição do mundo.

A experiência de criar soluções práticas aos problemas de aplicação prática à conteúdos teóricos colocou o protagonismo estudantil em primeiro plano, e cada aluno e aluna utilizou seus próprios recursos e habilidades para cooperar de acordo com as demandas dos grupos. Muitas vezes, os recursos que não se originariam de conceitos técnicos básicos, apresentavam soluções através de uma lógica espacial improvisada, como as alterações de escalas em decisões que envolviam o estabelecimento dos intervalos entre os marcos dos transferidores, ou até mesmo, o sentido geográfico do cálculo de distâncias – se de leste à oeste ou o contrário.

No âmbito da interdisciplinaridade, para muito além das atividades de aprendizado, o impacto das aulas esteve sobre o empoderamento da cartografia e da geometria como metodologia para o letramento cartográfico e matemático, ao dar sentido ontológico a estes objetos de estudos: a abstração dos conceitos se revelou como onipresente sobre o mundo ao qual vivemos e damos sentidos. A Terra está longe de ser uma bola de isopor, mas identificar que o caminho mais curto entre dois pontos não é uma reta sobre uma superfície esférica, torna, por exemplo, nossa perspectiva espacial um leque de possibilidades potentes ao processo de formação interdisciplinar de professores e professoras.

Os alunos pensaram, espacialmente, novas possibilidades de geometrias, que superassem postulados e axiomas euclidianos, e discutiram as noções da cartografia para além da planificação e distorções do espaço representado. Outras dúvidas foram sendo criadas, as quais ainda não encontramos respostas. Mas que, com toda certeza, geraram subsídio para a criação de novas perspectivas de reflexões sobre a interdisciplinaridade e o ensino.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, R. D. de. **Do desenho ao mapa: iniciação cartográfica na escola**. São Paulo, Contexto, 2001. 115p. (Caminhos da Geografia).
- COUTINHO, L. **Convite às geometrias não-euclidianas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2018.
- JAPIASSU, Hilton. A questão da interdisciplinaridade. **Seminário Internacional sobre Reestruturação Curricular**, Porto Alegre, 1994.
- JAPIASSU, Hilton. **O Sonho Transdisciplinar e as Razões da Filosofia**. São Paulo. Imago. 2006.
- JOLY, Fernand. **A cartografia**. Campinas: Papirus, 1990.
- MARTIN, Gabriela. “Arte Rupestre e Registro Arqueológico no Nordeste do Brasil”. In: *Clio – Série Arqueológica*, 1993.
- OLIVEIRA, Cêurio de. **Curso de cartografia moderna**. Rio de Janeiro: IBGE, 1988.