INTRODUÇÃO: O PRODUTO GEOMÉTRICO

Minha inspiração foi o livro de Hilbert, [Hil03] que me conduziu a escrever a primeira versão do que é hoje *Introdução à Matemática Universitária*, [Stá09], As propriedades do produto saem facilmente da multiplicação geométrica, como o caso $a < 0, b > 0 \implies ab < 0$ ou $a < 0, b < 0 \implies ab > 0$. Ele está baseado na equivalência de triângulos. Aqui estou mostrando que

$$ac = ca; (ab)c = a(bc); (-a)(-b) = ab; \tag{1}$$

Usei o editor gráfico `xfig` que me permite gravar o gráfico em vários formatos. Na última seção mostro que o produto de números de módulo menor do que 1 tem também módulo menor do que 1.

palavras chave: módulo do produto, produto geométrico, propriedades do produto, `xfig`.

PROPRIEDADES ASSOCIATIVA E COMUTATIVA DO PRODUTO

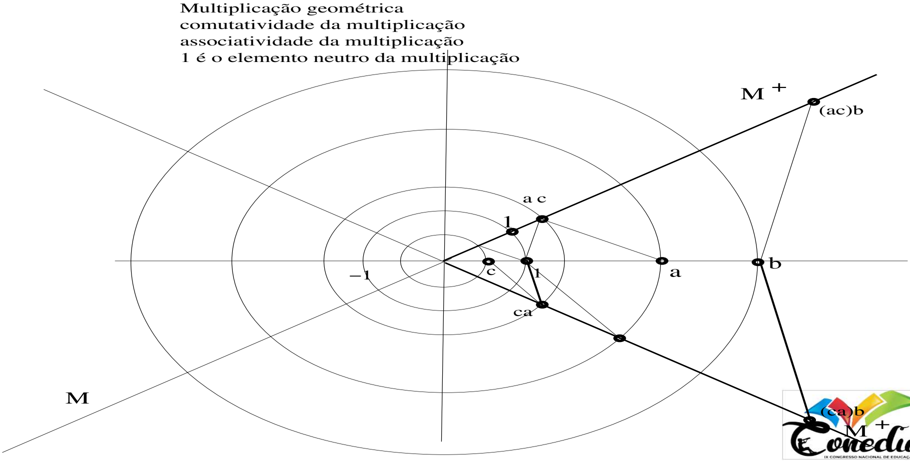
Vou mostrar como provar as propriedades comutativa e associativa da multiplicação, geometricamente. Depois vou reutilizar a figura para provar a *controvérsia* propriedade que tanto é apresentada como uma dor de cabeça,

$$a < 0, b > 0 \implies ab < 0 \text{ ou } a < 0, b < 0 \implies ab > 0; \tag{2}$$

Geometricamente fica simples. Ao final eu provo que se dois números forem de módulo menor do 1 o produto deles também tem módulo menor do que 1, e mais, o produto tem módulo menor do que o módulo dos multiplicandos.

METODOLOGIA

A multiplicação geométrica é baseada na equivalência de triângulos e ajuda muito usar o *círculo trigonométrico* com centro do cenário.



USANDO O CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Usando o *círculo trigonométrico* com centro do cenário torna as coisas mais fáceis e um pouco mais complicadas dentro dum editor gráfico porque nem sempre se consegue uma exata expressão da equivalência entre figuras, mas na figura eu consegui bons resultados.
O *círculo trigonométrico* dá-me o número 1 disponível para todas as operações. Acompanhe a discussão a partir da figura.

CONTINUANDO COM O CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Deixe-me começar com o produto ca que provei ser igual ao produto ac que usei depois com o produto $(ac)b$ para deixar tudo numa mesma figura. Ligando c ao *círculo trigonométrico* e depois passando uma paralela a este segmento passando pelo número a marcado sobre o eixo OX eu vou atingir o círculo de raio ac. Usando simplesmente a simetria, e ligando c ao *círculo trigonométrico*, mas agora abaixo do eixo OX e novamente passando uma paralela a este segmento passando pelo número a encontro o circulo de raio ca o que prova que

$$ac = ca; \tag{3}$$

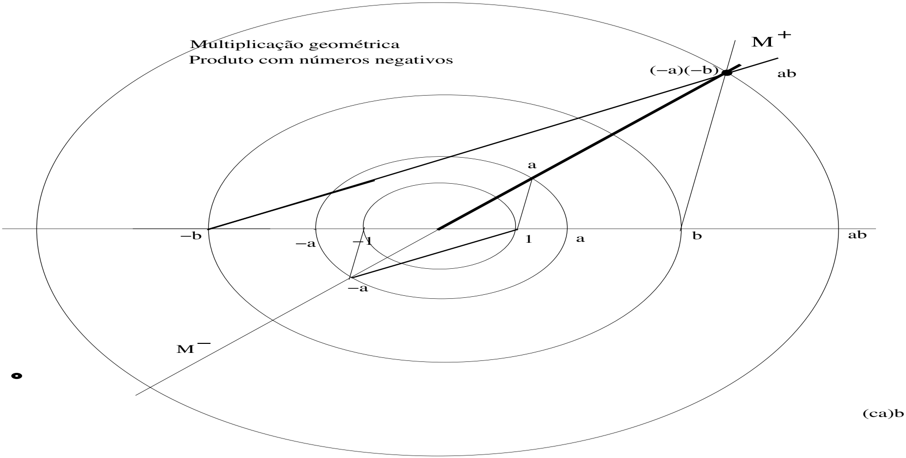
A PROPRIEDADE COMUTATIVA

Agora, aproveitando que *ca* e *ac* já se encontram ligados ao 1 sobre *círculo trigonométrico*, e passando uma paralela a qualquer dos dois segmentos eu provei que

$$(ac)b = (ca)b = (ac)b \tag{4}$$

porque já havia provado antes a propriedade comutativa.

O PRODUTO ENVOLVENDO NÚMEROS NEGATIVOS



Na figura eu desenhei a reta M que vai conter os resultados das multiplicações.

Eu preciso encontrar o valor de ab, geometricamente. Primeiro eu

A RETA PARALELA NA MULTIPLICAÇÃO

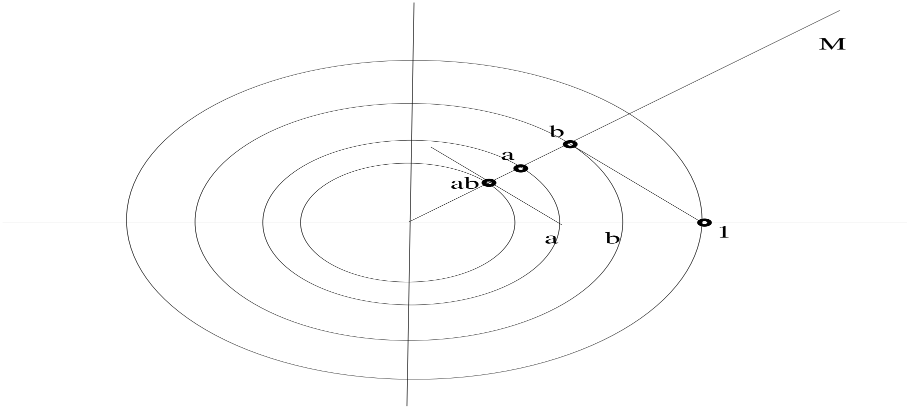
A reta paralela é que faz a construção de triângulos semelhantes. Passando a paralela ao segmento que liga 1 com a na reta M e depois uma paralela a esta passando pelo -1 vou encontrar $-a$ sobre a reta M o que mostra que multiplicar um número positivo a por -1 retorna um número negativo de mesmo módulo que a porque os dois se encontram também sobre o mesmo círculo de raio a.
Na figura, a reta M é o "*display*" dos resultados da multiplicação.

UMA PROPRIEDADE DA DESIGUALDADE

Vou demonstrar apenas uma propriedade entre desigualdade e multiplicação. Vou provar o caso em que se dois números tiverem módulo menor do que 1 então o produto deles também tem módulo menor do que 1. Este caso é bem interessante pelo uso que faz do *círculo trigonométrico*. Já ficou visível na figura (fig. ??) que se $|a| > 1, |b| > 1$ então $|ab| > 1$ porque todos os números foram escolhidos fora do círculo trigonométrico. Agora, na próxima figura, vou escolher $|a| < 1, |b| < 1$ colocando-os dentro do *círculo trigonométrico*.

Multiplicação geométrica

Propriedade do módulo



PRODUTO DE NÚMEROS MENORES QUE 1

Mostrando quando eu tiver $|a| < 1, |b| < 1$ então $|ab| < |a|, |ab| < |b|, |ab| < 1.$ Por que o círculo de raio $|ab|$ tem por raio um número real menor do que $|ab|, |a|, |b|, 1.$

Como nos casos anteriores, eu tracei a reta ligando 1 ao b e passando por a uma paralela a esta obtendo ab que está dentro de todos os demais círculos sobre a reta M que contém os resultados da multiplicação.

REFERENCIAL TEÓRICO

Essencialmente, como mostrei, a equivalência de triângulos. O assunto não é extraordinário e nem é nenhuma invenção apenas um trecho dos livros de Euclides enterrados em 2000 anos de História. O livro de Hilbert é antigo e já sofre os efeitos do tempo, mas ainda vale a pena ser lido.
O Ensino da Geometria sofre de dificuldades grandes e o intento aqui é precisamente trazer de volta a *equivalência de triângulos* um dos elementos de difícil assimilação. Apresentei *produto geométrico* várias vezes e observei reações distintas celebrando uma nova utilização da equivalência de triângulos agora servindo de apoio às propriedades da multiplicação. Renova o uso da Geometria como apoio visual e didático.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[Hil03] David Hilbert. *Grundlager der geometri*. B.G. Teubner, 1903.

[Stá09] Tarcisio Praciano-Pereira Stálio Rodrigues dos Santos. *Introdução à Matemática Universitária*. Sobral Matemática, 2009.