

O USO DE DERIVADAS NO ENSINO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Jordy dos Santos Gois¹
Deiziane Coutinho Miranda²

RESUMO

A função do segundo grau é umas das funções mais importantes dentro do ensino de matemática, e, isso não se difere ao ensino de derivadas. Deste modo, a pesquisa realizada analisou o ensino de função do segundo grau por meio do cálculo diferencial e integral, com o objetivo de simplificar conceitos e ideias e criar problemas específicos para investigações futuras. Foi identificado que as noções de derivadas e integrais podem ser utilizadas para aprimorar o ensino da Função do Segundo Grau. A pesquisa é qualitativa e teve como público-alvo estudantes de Licenciatura em Matemática que já cursaram Cálculo. Realizamos uma revisão bibliográfica para a coleta de dados e foi destacado que o conhecimento prévio de matemática é dos requisitos primordiais para o sucesso no ensino de Cálculo. A função quadrática é uma equação matemática importante para a modelagem e análise de fenômenos físicos e matemáticos em diversas áreas, e seu estudo é fundamental para a formação matemática e preparação para desafios acadêmicos e profissionais futuros. Em resumo, o estudo demonstrou a importância do uso de cálculo diferencial e integral no ensino de função do segundo grau bem como a factibilidade de sua aplicação, visando uma compreensão mais simplificada e aprimorada dos conceitos apresentando quatro situações adaptadas que envolvem o estudo de funções quadráticas.

Palavras-chave: Cálculo diferencial, Derivadas, Função quadrática

INTRODUÇÃO

O cálculo diferencial e integral foi desenvolvido na segunda metade do século XVII pelos matemáticos Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Newton, conhecido por obras como "Óptica" e "Princípios Matemáticos", aplicou o cálculo aos sistemas físicos, nomeando-o como "O Método de Fluxões e Séries Infinitas".

O estudo do cálculo diferencial e integral é uma parte essencial do currículo do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado da Bahia – UNEB/CAMPUS VII, no entanto, muitos alunos questionam a importância do cálculo devido às dificuldades encontradas na prática de suas resoluções e na sua aplicação direta no Ensino Médio.

Diante das dificuldades enfrentadas pelos alunos surgiram as inquietações dessa pesquisa, ocasionando o nosso objetivo que é analisar o ensino de função do segundo grau por

¹ Graduando do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado da Bahia – Campus VII, jordy.pessoal@gmail.com;

² Professora do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado da Bahia – Campus VII, deizianemiranda@hotmail.com/dcoutinho@uneb.br.

meio do cálculo diferencial e integral. O objetivo surgiu a partir da experiência docente e do alto número de reprovações nos Componentes Curriculares de Cálculo I, II, III e IV.

Essa motivação teve aumento com a participação na monitoria de ensino no Componente de Cálculo I e monitor no Projeto de Pesquisa e Extensão Matemática na Educação Básica: Materiais Didáticos Manipulativos, reforçando assim nosso interesse por essa temática.

A pesquisa pretende examinar como a derivada pode ser utilizada como meio de ensino para funções do segundo grau, correlacionando subtemas como função crescente ou decrescente, concavidades e taxas de variação de fenômenos reais. Também pretendemos, com essa pesquisa, ajudar a melhorar o ensino da função do segundo grau, tornando-o mais dinâmico com aplicações de derivadas.

Nesse sentido, este trabalho apresenta e discute quatro aplicações do Cálculo Diferencial no conteúdo de função quadráticas e, como isso pode influenciar na atuação docente no ensino de função quadrática no ensino médio.

Acreditamos com isso, que é possível utilizar derivadas no ensino de função do segundo grau, conseguindo assim simplificar e relacionar conceitos básicos de análise e construção de gráficos de funções do segundo grau por meio de aplicações de derivadas.

METODOLOGIA

Durante nossa vivência no Curso de Licenciatura em Matemática e após pesquisas e leituras, percebemos que existem dificuldades na aprendizagem dos componentes curriculares voltados ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Entretanto, embora haja diversos fatores que possam influenciar no desempenho estudantil durante a graduação, esses não serão foco da nossa pesquisa, nosso objetivo é abordar o ensino da Função do Segundo Grau sob o olhar do ensino de Cálculo Integral e Diferencial.

Surgem, então, inquietações que impulsionarão nossa pesquisa, tais como: quais são as principais dificuldades encontradas pelos alunos no ensino de Cálculo Diferencial e Integral? Quais são as possíveis relações entre o Cálculo Diferencial e Integral e o ensino de Função do Segundo Grau? Como podemos utilizar o estudo do Cálculo Diferencial e Integral no ensino de Função do Segundo Grau?

Assim, nossa pesquisa busca verificar e analisar como o ensino de Função do Segundo Grau pode ser realizado por meio da utilização dos conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral, além de analisar as possíveis dificuldades encontradas nos componentes curriculares de Cálculo

nos cursos de Licenciatura em Matemática, em especial no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado da Bahia, Departamento de Educação, Campus VII.

Essa pesquisa tem caráter qualitativo, pois busca examinar evidências em formatos de texto, palavras e imagens para entender um fenômeno em profundidade. Como Minayo (1995) afirma, a realidade não pode ser quantificada, pois abrange infinitos significados, motivos, valores e atitudes, mostrando a relação entre processos e fenômenos que não podem ser reduzidos apenas ao tratamento de variáveis ou números.

Para a coleta de dados, foi realizada uma revisão bibliográfica em livros e artigos científicos que abordam o ensino de Cálculo Diferencial e Integral e da Função do Segundo Grau. As fontes selecionadas foram escolhidas com base em sua relevância e atualidade, de modo a garantir informações precisas e atualizadas sobre o tema em questão.

A análise dos dados coletados permitiu uma compreensão mais aprofundada das principais dificuldades encontradas pelos estudantes no ensino de Cálculo e como as noções de derivadas e integrais podem ser utilizadas para aprimorar o ensino da Função do Segundo Grau.

O ENSINO DO CÁLCULO DIFERENCIAL

O Cálculo Diferencial e Integral é um ramo da Matemática que, dentre outros tópicos, estuda as taxas de variação de grandezas e cálculo de áreas, tornando-se uma poderosa ferramenta com vasta aplicação e funcionalidade. Percebemos que diversos fenômenos podem ser compreendidos e equacionados por meio de processos de derivação e integração, como, por exemplo, estudos sobre taxas de natalidade, inflações econômicas, lucro de empresas etc.

Ele está presente em diversos cursos de nível superior, como, por exemplo, cursos de engenharias, licenciaturas na área de exatas, entre outros, refletindo, assim, na importância do seu estudo. Reafirma essa ideia (Silva, 2010) ao citar que dominar conceitos desses conteúdos possibilitará realizar atividades com maiores níveis de complexidade exigidos, bem como, uma melhor assimilação em outros conteúdos.

Este último é fundamental para a formação de um futuro professor de Matemática, mesmo que este esteja atuando no Ensino Fundamental ou Médio, pois, o domínio de tais conceitos possibilita uma melhor compreensão e, conseqüentemente, torna o processo de ensino-aprendizagem menos complexo e mais adaptável.

Sobre derivada de uma função do segundo grau podemos afirmar que representa a taxa de variação instantânea da função em determinado ponto, essa interpretação pode ser usada para entender como a função muda em diferentes pontos e, assim, descrever fenômenos reais, como

a velocidade de um objeto em movimento. A derivada pode ser uma ferramenta útil para ensinar funções do segundo grau de uma forma mais intuitiva e aplicada, conectando os conceitos matemáticos à realidade do mundo em que vivemos.

Além disso, o estudo das derivadas possibilita tratar de taxas de variações nos mais diversos campos científicos. No âmbito escolar, os exemplos interdisciplinares demonstram sua fácil aplicação em conteúdos do Ensino Médio, tais como, o estudo do crescimento populacional da biologia, com as grandezas de natalidade e mortalidade variando entre si, análise de controle e disseminação de vírus, bactérias ou doenças, minimização ou maximização de custos na Matemática Financeira e estudo da derivação entre o espaço e tempo nas leis da física. São apenas alguns exemplos que demonstram seu vasto poder de modelagem de fenômenos cotidianos.

Ao que se refere o cálculo integral, este surgiu como método de resolução de problemas que envolviam cálculo de áreas, volumes e comprimento de arcos formados com linhas curvas e, assim como diversas origens de problemas matemáticos antigos, eles se dão por situações-problema envolvendo figuras geométricas.

Um das primeiras ideias de situações problemas cotidianos que envolvem o cálculo de área de figuras, até então, incomuns, é o Papiro Egípcio de Moscou (ou Golonischev), escrito aproximadamente em 1890 a.C., onde é procurada a área da superfície de um cesto, com um método de resolução que se assemelha às técnicas de integração. O Papiro em questão, apresentava também outros 24 problemas envolvendo cálculo de área e volumes de figuras geométricas.

Salientamos ainda, que conhecimentos prévios matemáticos que antecedem o ensino de componentes curriculares de Cálculo estão ligados diretamente com os indicies de reprovação ou dificuldade, e, com isso, a naturalização da reprovação vai se tornando algo corriqueiro e banal entre os alunos. Isso pode ser confirmado por Cristina (2012, p. 135) ao citar que:

Intimamente ligada à questão dos pré-requisitos está a reprovação. Na cultura de ensino de Cálculo em que se privilegia o linear, isto é, um conhecimento só é aprendido bem se o conteúdo que o antecede também for assimilado corretamente, a reprovação é uma consequência natural se esta sequência não for seguida à risca. Essa “dependência” é mais um elemento que naturaliza a reprovação. (CRISTINA, 2012, p.135).

Para além disso, percebemos que o tema gera poucas discussões no processo de formação do futuro professor e traz consigo uma bagagem gigantesca de vários outros conceitos matemáticos, possibilitando assim, uma maior modelação e aplicação em diversas outras ciências, embasando-o cientificamente para uma melhor atuação profissional.

A utilização de derivadas no ensino de função quadrática pode trazer benefícios significativos para os estudantes, segundo Lopes e Sá (2015), o uso de conceitos derivados pode contribuir para o desenvolvimento da habilidade de análise crítica, raciocínio lógico e resolução de problemas matemáticos. Além disso, o estudo das derivadas pode fornecer uma compreensão mais profunda das propriedades da função quadrática, como os pontos de máximo e mínimo e a concavidade da curva.

De acordo com Stewart (2011), a técnica da derivada é fundamental para a otimização de funções e tem aplicações em diversas áreas, como engenharia, física e economia. Portanto, a utilização de derivadas no ensino de função quadrática pode não apenas melhorar a compreensão dos estudantes sobre a função quadrática, mas também prepará-los para lidar com problemas mais complexos no futuro.

Diversos autores da área de educação matemática têm enfatizado a relevância do uso de derivadas no ensino de funções quadráticas. Em particular, a autora Graciela Savioli, em seu estudo intitulado "O Ensino de Função Quadrática através de um Enfoque na Derivada", destaca a importância das derivadas para uma melhor compreensão das propriedades e comportamentos das funções quadráticas, bem como, para sua aplicação em problemas reais.

Além disso, autores consagrados como James Stewart, Ron Larson e Bruce Edwards, em suas obras didáticas de cálculo, também ressaltam a importância das derivadas no estudo das funções quadráticas e em outras aplicações matemáticas.

FUNÇÃO QUADRÁTICA

A origem do estudo da função quadrática pode ser rastreada até as civilizações antigas do Egito, Babilônia e Grécia, onde matemáticos e astrônomos investigaram as propriedades das parábolas e suas aplicações geométricas. No entanto, de acordo com (Joseph, 2009) foi durante a Idade Média que os matemáticos indianos, como Brahmagupta e Bhaskara, fizeram importantes avanços no estudo das funções quadráticas, desenvolvendo métodos algébricos para resolver equações quadráticas e explorar suas propriedades aritméticas

David Burton (2011) afirma que foi durante o Renascimento, matemáticos europeus, como Tartaglia, Cardano e Ferrari, aprofundaram ainda mais o estudo da função quadrática, expandindo seus usos em problemas práticos, como a resolução de equações cúbicas e a análise de trajetórias de projéteis.

No século XVII, com o desenvolvimento do cálculo por matemáticos como Newton e Leibniz, a função quadrática se tornou uma das bases do cálculo diferencial, sendo fundamental

para o desenvolvimento de muitos conceitos matemáticos e físicos, como a teoria das equações diferenciais.

Desde então, a função quadrática tem desempenhado um papel fundamental em muitas áreas do conhecimento, como física, engenharia, economia e estatística. Sua aplicabilidade em uma ampla gama de fenômenos a tornou uma ferramenta indispensável na resolução de problemas complexos em diversas disciplinas. Através dos séculos, o estudo da função quadrática tem evoluído e se aprofundado, contribuindo significativamente para o desenvolvimento da matemática e de outras áreas do conhecimento.

A função quadrática é essencial na modelagem e análise de fenômenos físicos e matemáticos, sendo representada pela equação geral $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a , b e c são coeficientes reais.

Diversas áreas, tais como física, engenharia, economia e computação, reconhecem a importância do estudo da função quadrática, uma vez que, essa função pode ser utilizada para modelar a trajetória, a velocidade e a resistência do ar de um objeto em queda livre e na economia, é utilizada na maximização de lucros, na otimização de recursos e na tomada de decisões financeiras bem como para resolver problemas de otimização.

A compreensão dos conceitos fundamentais de função, domínio, imagem e propriedades específicas das funções quadráticas é crucial para a formação matemática dos estudantes do ensino médio. O estudo da função não só pode fornecer uma base sólida em matemática, mas também ajuda os estudantes a aplicar seus conhecimentos em problemas do mundo real, aprimorando suas habilidades de modelagem matemática.

Isso pode prepará-los para futuros desafios acadêmicos e profissionais em áreas como física, engenharia, economia e outras disciplinas. Além disso, podemos falar ainda sobre seu gráfico, caracterizado pela parábola, que é amplamente estudada na geometria analítica e aplicada em problemas complexos.

Assim, o estudo da função quadrática é crucial para a compreensão de uma variedade de fenômenos e para a resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento.

Fica perceptível que o estudo da função quadrática é de suma importância, pois, sua aplicação é vasta em diversas áreas do conhecimento, além disso, ela prepara os estudantes do ensino médio para enfrentar desafios acadêmicos e profissionais futuros.

Portanto, é essencial compreender a função quadrática enquanto ferramenta indispensável na resolução de problemas complexos em diversas disciplinas, contribuindo para o desenvolvimento da matemática e outras áreas do conhecimento.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Optamos por apresentar e discutir nesse artigo três aplicações do Cálculo Diferencial Integral relacionando-os com o ensino de função quadrática.

Dentre as aplicações mais relevantes do cálculo diferencial, destacam-se os desafios relacionados à otimização, que consistem em determinar a forma mais eficiente ou vantajosa de realizar determinada tarefa.

Exemplo 01: Equação da reta que toca o gráfico de uma função quadrática em um único ponto.

Uma questão do concurso de nível médio para o cargo de oficial do exército nos mostra o quão vantajoso é visualizar que podemos interpretá-la e resolvê-la utilizando o conceito primitivo de derivada.

(EsPCEEx 2018) Qual a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 6x + 1$, no ponto $(4, -7)$?

O coeficiente angular da reta tangente à uma curva dada num certo ponto é exatamente a derivada da função aplicada à abcissa desse ponto:

$$a = f'(4)$$

Agora, derivamos a função quadrática:

$$f'(x) = 2x - 6$$

$$f'(4) = a \Rightarrow 2 \cdot 4 - 6 = a$$

$$a = 2$$

Na equação da reta temos imagem -7 quando x assume o valor de 4

$$y = ax + b$$

$$-7 = 4a + b$$

$$b = -7 - 4 \cdot 2$$

$$b = -15$$

Com isso, a reta que tangencia nesse ponto tem sua equação descrita por:

$$y = 2x - 15$$

Exemplo 02: Problema de otimização

A economia é um ramo que se beneficia de várias aplicações matemáticas, pois, permite entender como as variáveis econômicas mudam em resposta a diferentes fatores e como essas mudanças afetam o comportamento dos consumidores e das empresas (Mankiw 2014). Logo abaixo adaptamos uma situação problema do curso de aplicações de derivadas do canal

“omatemático.com” disponível no Youtube, em que se deseja obter o lucro máximo produzindo a menor quantidade possível.

Uma empresa determina que x unidades de seu produto podem ser vendidas a p dólares a unidade, onde $x = 900 - p$

O custo de produção de x unidades diárias é: $C(x) = 2700 + 18x$

Já receita da empresa é dada pela multiplicação do preço dos produtos vezes sua quantidade, temos é: $R(x) = p \cdot x$

Escrevendo o preço em função das quantidades produzidas, temos:

$$R(x) = (900 - x) \cdot x$$

$$R(x) = -x^2 + 900x$$

O lucro de uma empresa é dado pela diferença entre a receita e o custo de produção.

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = (900 - x)x - [2700 + 18x]$$

$$P(x) = -x^2 + 882x - 2700$$

Para encontrarmos a quantidade mínima de unidades que gere o maior lucro possível, precisamos encontrar o x para que $P(x)$ tenha valor máximo. Para isso, vamos derivar a função $P(x)$ para encontrar o ponto crítico.

$$P'(x) = -2x + 882 + 0$$

$$P'(x) = 0$$

$$-2x + 882 = 0$$

$$x = 441$$

Portanto produzindo 441 unidades, teremos um lucro de R\$ 191.457,00.

Exemplo 03: Problema envolvendo distância de torres

Situação problema adaptada de Stewart (2013, Pag. 250)

Uma ponte suspensa tem duas torres que se elevam em 50 metros acima da estrada e são conectadas por cabos pendentes em forma de uma parábola que pode ser representada por:

$$y = \frac{1}{2} \cdot (x - 2200)^2 + 8$$

Em que x e y são medidos em metros e x é a distância da torre esquerda em direção à torre direita. Qual a distância entre as torres?

Utilizamos a derivada da função quadrática para encontrar o ponto em que os cabos tem declividade igual a 0. Ou seja, isso nos dará o ponto médio entre as duas torres e que também representa um mínimo local.



$$y' = \frac{1}{2} \cdot (x - 2200)^2 + 8 \frac{d}{dx}$$

$$\frac{1}{2}y' = x^2 - 4400x - 2200^2 + 0$$

$$\frac{1}{2}y' = 2x - 4400 - 0$$

$$y' = x - 2200$$

Igualando $y' = 0$

$$0 = x - 2200$$

$$x = 2200$$

Portanto a distância entre as duas torres é igual ao dobro de 2200 m que é 4400 m.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Constamos diversas aplicações do Cálculo Diferencial e Integral que se relacionam com estudo de função quadráticas, isso fortalece a ideia de sua utilização quando pensamos sobre como motivar o aluno a despertar interesse pelo estudo, geralmente, a falta de aplicabilidade em fenômenos reais e o desenvolvimento algébrico matemático sem um contexto são fatores que os desestimulam os alunos a buscarem conhecimento.

No entanto, é importante ressaltar que nós não visamos substituir os métodos e técnicas já utilizadas, mas, complementar o processo de ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

AQUINO, Italo de souza. **COMO ESCREVER ARTIGOS CIENTÍFICOS: sem arrodeio e sem medo da abnt**. 8. ed. rev. São Paulo: Saraiva, 2010. Disponível em: <https://www.academia.edu/35869641/Como_escrever_artigos_cientificos_italo_de_souza_a_quino_ed_saraiva>. Acesso em: 12/10/2022.

CAMPOS, J. J.; ALMEIDA, R. P. **O cálculo diferencial e integral no ensino médio: uma proposta de ensino**. Boletim de Educação Matemática, v. 27, n. 47, p. 101-123, 2013. Disponível em: <<https://ri.ufs.br/handle/riufs/12763>>. Acesso em: 03/03/2023.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**. Vol. 8. São Paulo: Atual, 1999.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo, volume 1**. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2012.

Disponível em:

https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5580657/mod_resource/content/2/Um%20Curso%20de%20C%C3%A1lculo%20Vol%2001.pdf>. Acesso em: 05/04/2023

LARSON, R. **Cálculo, volume 1**. São Paulo: McGraw-Hill, 2010. Disponível em <
<https://profcorey.files.wordpress.com/2015/02/larson-ron-cc3a1lculo-aplicado-2010.pdf>>
Acesso em: 29/04/2023

LEAL, A. L.; SALLES, L. A. **A utilização do cálculo diferencial e integral em problemas físicos do ensino médio**. Revista do Professor de Matemática, v. 1, n. 1, p. 23-32, 2017.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Harbra, 1994. Disponível em: <
[http://www.eletrica.ufpr.br/armando/index_arquivos/Louis%20Leithold%20-%20O%20C%C3%A1lculo%20com%20Geometria%20Anal%C3%ADtica,%20volume%201,%203%C2%AA%20Edi%C3%A7%C3%A3o%20%20\(1994,%20Harbra\).pdf](http://www.eletrica.ufpr.br/armando/index_arquivos/Louis%20Leithold%20-%20O%20C%C3%A1lculo%20com%20Geometria%20Anal%C3%ADtica,%20volume%201,%203%C2%AA%20Edi%C3%A7%C3%A3o%20%20(1994,%20Harbra).pdf)> Acesso em: 12/01/2023

SANTOS, R. M.; CAMARGO, I. F. **O cálculo diferencial e integral no ensino médio: uma proposta de atividade**. Educação Matemática Pesquisa, v. 20, n. 1, p. 82-98, 2018.

SILVA, J. B.; FARIA, F. C. **O ensino de cálculo diferencial e integral em um curso de licenciatura em matemática: reflexões e contribuições**. Boletim de Educação Matemática, v. 24, n. 39, p. 71-91, 2010. Disponível em: <
<https://periodicos.uffs.edu.br/index.php/EMSF/article/view/12970>> Acesso em 25/02/2023

SOUSA, A. G. L. (et al) **Aplicação do cálculo diferencial em situações cotidianas e na resolução de questões de exames de acesso ao ensino superior**.

STEWART, J. **Cálculo, volume 1**. São Paulo: Cengage Learning, 2011. Disponível em <
<https://tsxvpsbr.dyndns.org/arquivos/UFFS/James%20Stewart%20-%205%C2%AA%20Edi%C3%A7%C3%A3o%20-%20Vol.1.pdf>> Acesso em 26/07/2022

THOMAS, G. B. **Cálculo, volume 1**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009.

KATZ, Victor J. **A History of Mathematics: An Introduction**. 3rd ed. Boston: Addison-Wesley, 2008. Disponível em <
https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/6075667/mod_resource/content/1/Victor%20J.%20Katz%20-%20A%20History%20of%20Mathematics-Pearson%20%282008%29.pdf>. Acesso em: 29/04/2023