

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: UM OLHAR PARA A SALA DE AULA DE ALGUMAS ESCOLAS PÚBLICAS DO ESTADO DA PARAÍBA

Adriano Alves da Silveira ¹

RESUMO

O presente estudo trata-se de um recorte do nosso Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) que buscou analisar como os estudantes do 2º ano do Ensino Médio dos Municípios de Alagoinha - PB, Mulungu - PB e Rio Tinto-PB, provenientes de escolas públicas, resolvem problemas matemáticos a partir de situações reais que envolvem as ideias essenciais da Análise Combinatória. A escolha desta temática se justifica de duas maneiras: verificar como estava ocorrendo o ensino da Análise Combinatória em algumas escolas públicas do estado da Paraíba, identificando as dificuldades encontradas pelos alunos; e por se tratar de um tópico desafiador e estimulante da Matemática, com alto potencial de contextualização do cotidiano do aluno. Foram eleitos como sujeitos da pesquisa, seis turmas do 2º ano do Ensino Médio distribuídas nos Municípios de Alagoinha – PB, Mulungu –PB e Rio Tinto – PB, na qual aplicamos um questionário composto por quatro problemas de Análise Combinatória. Com o questionário, percebemos que as turmas, na qual a pesquisa foi realizada, não tiveram acesso ao ensino da Análise Combinatória, ou seja, os professores, por alguma razão, não trabalhou este tópico matemático em sala de aula. Por outro lado, mesmo não tendo contato com os conceitos de Análise Combinatória, algumas resoluções apresentadas pelos alunos sinalizaram o potencial para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, resolvendo os problemas por meio do Princípio Fundamental da Contagem, árvore de possibilidades e tabelas.

Palavras-chave: Análise Combinatória, Ensino Médio, Sala de Aula.

INTRODUÇÃO

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1997) apontam que os conceitos iniciais de Análise Combinatória devem ser discutidos no Ensino Fundamental. Contudo, o ensino de Análise Combinatória só começa a ser discutido na maioria das instituições escolares a partir do 2º ano do Ensino Médio. No entanto, o problema é mais preocupante do que parece, pois existem muitas escolas que na prática, negligencia o estudo da Análise Combinatória no chão da escola do Ensino Básico. Este fato pode ocorrer pela insegurança do professor de Matemática no conteúdo de Análise Combinatória e também por achar que, ao discutir tal tópico, seus alunos apresentarão dificuldades de compreender os conceitos matemáticos inerentes a Combinatória.

¹ Mestre do Curso de Ensino de Ciência e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, adriano.exatas@hotmail.com.

A Análise Combinatória pertence ao bloco de conteúdos Análise de Dados e Probabilidade, e deve ser discutido durante todos os anos de escolaridade do Ensino Básico. No entanto, este tópico matemático se desenvolve ainda muito timidamente, no ambiente escolar, apesar de sua potencialidade, de trabalhar, de forma eficaz, com algumas competências exigidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) (Brasil, 2002) de Matemática, tais como: representação; leitura; investigação e compreensão; capacidade de enfrentamento e resolução de situações problemas, dentre outras.

Com isso, o presente estudo trata-se de um recorte do nosso Trabalho de Conclusão de Curso que buscou analisar como os estudantes do 2º ano do Ensino Médio dos Municípios de Alagoinha - PB, Mulungu - PB e Rio Tinto-PB, provenientes de escolas públicas, resolvem problemas matemáticos a partir de situações reais que envolvem as ideias essenciais da Análise Combinatória.

A escolha desta temática se justifica de duas maneiras: verificar como estava ocorrendo o ensino da Análise Combinatória em algumas escolas públicas do estado da Paraíba, identificando as dificuldades encontradas pelos alunos; e por se tratar de um tópico desafiador e estimulante da Matemática, com alto potencial de contextualização do cotidiano do aluno.

METODOLOGIA

A pesquisa se situa numa abordagem qualitativa, visando buscar significados, interpretar e compreender as informações obtidas. Os autores Prodanov e Freitas (2013) enfatizam que esta é a melhor abordagem que podemos adotar, pois o ambiente natural é fonte direta para coleta de dados, interpretação de fenômenos e atribuição de significados.

Utilizamos um questionário como instrumento de coleta de dados. Este questionário foi composto por quatro problemas, na qual abordamos os conceitos do Princípio da Fundamental da Contagem, Arranjo Simples, Permutação Simples e Combinação Simples, a saber:

1. Daniela pretende ir à festa de São João na cidade de Alagoinha-PB. Considerando que ela tem 5 blusas e 4 saias. Determine quantos modos diferentes ela pode se vestir para ir à festa;

2. Cinco cavalos disputam um páreo qual o número de possíveis resultados para as 2 primeiras colocações?;

3. De quantas maneiras uma família de 3 pessoas pode sentar se num banco de 3 lugares?;

4. Dezesesseis times se inscreveram em um torneio de futsal amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o grupo A. Em seguida entre os times do grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria no ginásio de sua cidade, e o segundo seria o time visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para o grupo A e a quantidade total de escolhas de times do jogo de abertura podem ser calculadas através de que tipos de agrupamentos? a) Combinação e um arranjo, respectivamente; b) Um arranjo e uma permutação, respectivamente; c) Duas combinações; d) Um arranjo e uma combinação, respectivamente; e) Dois arranjos.

Os três primeiros problemas poderiam ser resolvidos utilizando o Princípio da Contagem, enquanto o último problema teve como objetivo identificar os tipos de agrupamentos, isto é, se tínhamos um problema de Arranjo Simples, Permutação Simples ou/e Combinação Simples.

Foram eleitos como sujeitos da pesquisa, seis turmas do 2º ano do Ensino Médio distribuídas nos Municípios de Alagoinha – PB, Mulungu –PB e Rio Tinto – PB, na qual aplicamos um questionário composto por quatro problemas de Análise Combinatória.

REFERENCIAL TEÓRICO

Os PCN (Brasil, 1997) apontam que, no decorrer do 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental, os alunos devem ser levados a desenvolver a familiarização com a contagem de agrupamentos, de maneira informal e direta, fazendo, por exemplo, uma lista de todos os agrupamentos possíveis para depois contá-los. Enquanto, para o 3º e para o 4º ciclo, ressaltam a relevância dos problemas de contagem, cujo objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades.

Nesse sentido, a Análise Combinatória tem um papel importante na teoria da Probabilidade. No entanto, como afirmam os PCN (BRASIL, 2006, p.79), “a Combinatória não tem apenas a função de auxiliar o cálculo das probabilidades, mas tem inter-relação estreita entre as ideias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações combinatórias”.

Os problemas de Análise Combinatória exigem dos estudantes uma tomada de decisão, na elaboração dos possíveis caminhos que levam a solução do problema. De acordo com Morgado *et al* (1991, p. 2),

Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução.

Silveira e Andrade (2020) pontuam que a Análise Combinatória apresenta dificuldade de natureza conceitual. Sobre isso, eles argumentam que é necessário realizar um trabalho em sala de aula que valorize a compreensão dos conceitos referente a esse tópico, já que o conhecimento das fórmulas garante muito pouco sobre como proceder em determinados problemas. Além disso, os autores percebem que os problemas de Combinatória não mantêm o padrão em suas resoluções. “Por isso, quando estamos diante de um problema referente a este tópico, é necessário pensar, em seguida fazer anotações, com o intuito de conhecer sua natureza, e como se procede, por exemplo, diante de uma enumeração sistemática” (Silveira; Andrade, 2020, p. 4).

Para Lima *et al* (2006), a postura diante de um problema de Combinatória é sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar.

Hariki (1996, p. 29) aponta dificuldades encontradas pelos alunos e professores,

Problemas envolvendo combinatória são usualmente considerados difíceis pela maioria dos alunos e professores de Matemática. Talvez a principal dificuldade seja a da conexão correta entre o problema dado e a teoria matemática correspondente. É difícil determinar se o problema combinatório dado é um problema de arranjo, de permutação ou de combinação, ou então se é suficiente usar diretamente o Princípio Fundamental da Contagem.

É preciso ressaltar que as estratégias como – a construção da árvore de possibilidades, utilização de tabelas, listar todas as possibilidades e o Princípio Fundamental da Contagem tem um papel crucial no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Em contrapartida, o PCN+ (Brasil, 2002), diz que o raciocínio combinatório é uma forma de pensamento matemático que consiste em decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis. Para este documento, esta nova forma de pensar em Matemática não deve ser aprendida como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação.

Pessoa (2009, p. 72) acrescenta que, “[...] a partir de determinadas estratégias ou fórmulas que envolvem conceitos combinatórios, podemos saber quantos elementos ou quantos eventos são possíveis numa dada situação, sem necessariamente ter que contá-los um a um”. A pesquisadora enfatiza o *raciocínio combinatório* como um tipo de pensamento que envolve contagem, mas que vai além da enumeração de elementos de um conjunto. Além disso, tem-se como estratégias de contagem: o raciocínio multiplicativo, grupos de possibilidades, por meio de uma ação sistemática, seja pelo uso de fórmula, seja pelo desenvolvimento de uma estratégia que dê conta de atender aos requisitos desses tipos de problemas, como a constituição de agrupamentos, a determinação de possibilidades e sua contagem.

Desse modo, “as fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande” (Brasil, 2002, p. 126-127).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Inicialmente, vamos apresentar os resultados do questionário em relação a cada Município.

Tabela 1: Desempenho do questionário aplicado aos alunos do Município de Alagoinha

Respostas dos alunos de Alagoinha – PB	Não sei	Resposta correta	Resposta parcialmente correta	Resposta incorreta	Total de alunos
1º problema	3	42	0	8	53
2º problema	2	0	0	51	53
3º problema	2	26	0	25	53
4º problema	47	0	1	5	53

Fonte: Dados da pesquisa

Tabela 2: Desempenho do questionário aplicado aos alunos do Município de Mulungu

Respostas dos alunos de Mulungu – PB	Não sei	Resposta correta	Resposta parcialmente correta	Resposta incorreta	Total de alunos
1º problema	0	19	2	19	40
2º problema	3	6	0	31	40
3º problema	3	4	0	33	40
4º problema	37	0	0	3	40

Fonte: Dados da pesquisa

Tabela 3: Desempenho do questionário aplicado aos alunos do Município de Rio Tinto

Respostas dos alunos de Rio Tinto – PB	Não sei	Resposta correta	Resposta parcialmente correta	Resposta incorreta	Total de alunos
1º problema	1	35	0	5	41
2º problema	4	0	1	36	41
3º problema	3	4	1	33	41
4º problema	38	0	1	2	41

Fonte: Dados da pesquisa

O primeiro problema tinha como objetivo trabalhar com o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) de forma direta, bastando realizar o produto entre o número de blusas e

saias. Observando as tabelas, notamos que o problema 1 os alunos apresentaram o melhor desempenho.

Ademais, os alunos apresentaram múltiplos/procedimentos de resolução de problemas. Veja a seguir,

Figura 1: Primeira resolução do problema 1, apresentada pelo aluno(a)

1 - Daniela pretende ir à festa de São João na cidade de Alagoinha-PB. Considerando que ela tem 5 blusas e 4 saias. Determine quantos modos diferentes ela pode se vestir para ir à festa.

20 modos diferentes. 5 blusas e 4 saias

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 2: Segunda resolução do problema 1, apresentada pelo aluno(a)

1º)

	s1	s2	s3	s4	s5
B1	///	///	///	///	///
B2	///	///	///	///	///
B3	///	///	///	///	///
B4	///	///	///	///	///

2º)

	s1	s2	s3	s4	s5
B1	///	///	///	///	///
B2	///	///	///	///	///
B3	///	///	///	///	///
B4	///	///	///	///	///

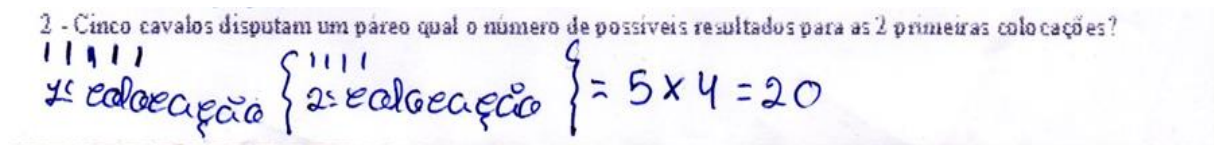
Fonte: Dados da pesquisa

Notamos que os principais erros cometidos pelos alunos neste problema consistia em apresentar as respostas de uma forma intuitiva, ou seja, sem justificar a solução. Outro tipo de erro foi que os alunos somavam as 5 blusas e as 4 calças obtendo 9 maneiras de se arrumar para ir à festa. Assim, observando as tabelas acima, constatamos que o município que apresentou o maior número de respostas incorretas foi Mulungu – PB, totalizando 19 respostas inadequadas.

Nos problemas propostas os alunos poderiam utilizar os conceitos referentes aos agrupamentos em foco ou utilizar o PFC; poderiam também enumerar todas as possibilidades para depois contar, utilizando tabelas e árvores de possibilidades.

Podemos verificar que em todas as resoluções corretas, os alunos utilizaram o PFC, ou seja, nenhum aluno percebeu que o problema 2 abordava o conceito de Arranjo Simples e por esse motivo poderia utilizar a fórmula referente a este tipo de agrupamento. No entanto, isso ocorreu de uma forma geral, pois todos os alunos não apresentaram qualquer tipo de fórmula para os problemas propostos. Veja abaixo a melhor solução dada pelo aluno ou aluna:

Figura 3: Resolução da questão 2, apresentada pelo aluno(a)



2 - Cinco cavalos disputam um páreo qual o número de possíveis resultados para as 2 primeiras colocações?

1 1 1 1 1
1 1 1 1

1ª colocação { 2ª colocação } = 5 x 4 = 20

Fonte: Dados da pesquisa

A principal resolução apresentada pela maioria dos alunos foi: $5 \cdot 2 = 10$. Na verdade isso ocorreu, devido ao primeiro problema que eles resolveram aplicando o PFC de forma direta. Assim, grande parte dos alunos realizaram o produto entre o número de cavalos e número de colocações. Na verdade, a contagem direta era impraticável neste caso, era preciso que os alunos identificassem as possibilidades para cada colocação.

Com relação ao problema 3, pretendíamos verificar se os alunos conseguiam utilizar o conceito de Permutação Simples, sendo o enunciado de fácil compreensão e que os alunos poderia enumerar todos os agrupamentos possíveis para depois contá-los, se caso não conhecesse a fórmula poderiam utilizar o PFC.

O principal erro cometido pelos alunos foi idêntico ao do segundo problema, pois tiraram os dados do problema e assim, utilizaram o PFC de uma forma direta, obtendo a seguinte resolução: $3 \cdot 3 = 9$ maneiras de sentar no banco.

No último problema dos 134 alunos que participaram da pesquisa, nenhum conseguiu responde-lo corretamente. Na verdade, para que a solução do problema fosse aceita como correta, seria necessário que explicasse a alternativa escolhida, distinguindo os tipos de agrupamentos, diferenciando Arranjo Simples, Combinação Simples e Permutação Simples. No entanto, o que foi constatado é que os alunos não conheciam esses tipos de agrupamento. E o que prova isto é que os alunos não conseguiram dar respostas nem incorretamente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o questionário, percebemos que as turmas, na qual a pesquisa foi realizada, não tiveram acesso ao ensino da Análise Combinatória, ou seja, os professores, por alguma razão, não trabalhou este tópico matemático em sala de aula. Podemos afirmar isso por vários motivos, como: todos os problemas foram resolvidos utilizando o Princípio Fundamental da Contagem (PFC); quando os problemas não abordavam o PFC de uma forma direta, a maioria dos alunos não conseguiram resolvê-lo; nos questionários aplicados, verificamos que não foi utilizado nenhum tipo de fórmula correspondente a qualquer tipo de agrupamento; e o motivo mais significativo é que em todos os municípios houve alguns questionamentos, referente ao problema quatro do questionário, tais como: o que é permutação? O que é arranjo? O que combinação? O objetivo desse problema era identificar o tipo de agrupamento, ou seja, era preciso perceber se a ordem é relevante ou não. Esse problema tinha um papel relevante nessa pesquisa, pois iríamos constatar se realmente o Ensino da Análise Combinatória estava ocorrendo.

Com as reflexões geradas em torno dos problemas, ficou evidenciado que os alunos não tiveram qualquer aproximação com o estudo da Análise Combinatória. Por outro lado, mesmo não tendo contato com os conceitos de Análise Combinatória, algumas resoluções apresentadas pelos alunos sinalizaram o potencial para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, resolvendo os problemas por meio do Princípio Fundamental da Contagem, árvore de possibilidades e tabelas.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática: ensino médio.** Brasília, DF: MEC, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** Brasília, DF: MEC, 2002.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio.** Brasília, DF: MEC, 2006.

HARIKI, S. **Conectar problemas: uma nova estratégia de resolução de problemas combinatórios.** Revista Educação e Matemática, nº37, 1º trimestre de 1996 (Portugal).

LIMA, Elon Lages *et al.* **Temas e problemas elementares.** Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, 12 ed. Rio de Janeiro, 2006.



MORGADO, Augusto César de Oliveira *et al.* **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: IMPA, 1991.

PESSOA, C. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio**. 2009. 267 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, 2009.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

SILVEIRA, A. A.; ANDRADE, S. **Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas no Ensino Médio**. Revista de Educação Matemática, São Paulo, v. 17, p. 01-21, 01 de maio de 2020.