

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO NO ENSINO MÉDIO POR MEIO DE UMA TAREFA MATEMÁTICA DE PROBABILIDADE

Lucas do Nascimento Corrêa ¹
Eliane Maria de Oliveira Araman ²

RESUMO

O desenvolvimento do Raciocínio Matemático é apontado por diversos documentos curriculares ao redor do mundo como um dos aspectos principais da aprendizagem matemática dos alunos. Pesquisas e estudos evidenciam os desdobramentos obtidos através da prática do professor com o desenvolvimento dos processos de Raciocínio Matemático na aprendizagem, que convergem para um entendimento mais profundo sobre o tema e definem, de forma clara e objetiva, estes processos. O presente trabalho segue os pressupostos metodológicos da pesquisa qualitativa e apresenta os processos e as características que compõem o Raciocínio Matemático – elemento central da pesquisa – discutidos a partir de uma tarefa matemática realizada pelos alunos de uma turma de 3º ano do Ensino Médio numa escola pública localizada no interior do Paraná – Brasil. Além disso, a pesquisa perpassa pelas ações do professor e sua relevância no desenvolvimento dos processos de Raciocínio Matemático dos alunos. Diante disso, a presente pesquisa se insere na temática do Raciocínio Matemático no contexto da Educação Básica e tem como objetivo identificar os processos de Raciocínio Matemático mobilizados por alunos do 3º ano do Ensino Médio e categorizar as ações de um professor durante a resolução de uma tarefa matemática sobre probabilidade. Como resultados, apresentamos neste artigo a discussão desenvolvida por uma dupla de alunos e destacamos que os alunos participantes mobilizaram os processos de conjecturar e justificar. Com relação às ações do professor desenvolvidas pelo professor estão previstas nas quatro categorias de ação: Convidar; Guiar/apoiar; Informar/sugerir; Desafiar e que elas foram essenciais para que os alunos avançassem na resolução da tarefa e no desenvolvimento do Raciocínio Matemático.

Palavras-chave: Raciocínio Matemático, Ações do Professor, Processos de Raciocínio, Ensino Médio, Educação Matemática.

INTRODUÇÃO

Recentemente, pesquisas em torno do tema do Raciocínio Matemático (RM) sinalizam para a importância do seu desenvolvimento em sala de aula de matemática e apontam que seus processos devem ser promovidos e, conseqüentemente, mobilizados pelos alunos desde os primeiros anos de escolaridade (Lannin, Ellis e Elliot, 2011; Mata-Pereira e Ponte, 2018; Stylianides, 2009). As orientações curriculares presentes em documentos oficiais norteadores, sugerem que os aspectos, conteúdos e o desenvolvimento de habilidades podem ser trabalhados envolvendo o RM. Na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018), por exemplo, o RM é relacionado com competências que envolvem raciocinar e é apresentado

1 Mestrando do Curso de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, lcorreia@alunos.utfpr.edu.br;

2 Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, Professora Associada do Departamento da Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR elianearaman@utfpr.edu.br

como um aspecto que se faz necessário a interação do estudante com o professor e os outros alunos para que se possa “investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática” (Brasil, 2018).

Diante disso, a versão apresentada pelos documentos curriculares, por mais que apresente alguns aspectos do RM, ainda não se faz suficiente ou não estabelece relação com as características dos processos que pressupõem o RM, bem como com as ações que são potencializadoras na mobilização desses processos. No âmbito internacional, Jeannotte e Kieran (2017), destacam que, embora a promoção do RM esteja presente nesses documentos, a forma como ele é descrito ainda não é muito clara. Desta forma, a literatura traz conceitos de RM semelhantes entre diversos autores que dissertam sobre sua relevância na aprendizagem matemática, que serão apresentados na próxima sessão.

Sendo assim, para a realização desta pesquisa, nos objetivamos apresentar, através da fundamentação teórica, os processos e características que compõem o Raciocínio Matemático e, por conseguinte, categorizar esses processos quando mobilizados por alunos, discutidos a partir de uma tarefa matemática realizada em uma turma de 3º ano do Ensino Médio numa escola pública, bem como evidenciar as ações – que contribuem para o desenvolvimento dos processos de RM – de um professor durante a resolução desta tarefa que tem como conteúdo a probabilidade.

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Uma ideia que é bastante recorrente na literatura, é que o RM possui uma definição semelhante entre os pesquisadores. Segundo Morais, Serrazina e Ponte (2018), o raciocínio matemático é um conjunto de processos mentais complexos pelo qual o aluno obtém novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas (conhecimento prévio). Stylianides (2009), considera o RM como um processo de inferência que utiliza informação matemática já conhecida para obter novo conhecimento ou novas conclusões. Por sua vez, Lannin, Ellis e Elliot (2011), definem o RM como um processo conjunto de conjecturar, generalizar, investigar, argumentar e refutar se necessário. Esses processos supracitados por Lannin, Ellis e Elliot (2011), estão relacionados ao aspecto processual do RM, visto que, Jeannotte e Kieran (2017) destacam dois aspectos que compõem o raciocínio matemático que, embora diferentes, se complementam: o estrutural e o processual.

Com base no aspecto processual do RM, Jeannotte e Kieran (2017), identificam oito processos: aqueles relacionados com a busca por semelhanças e diferenças e aqueles relacionados ao processo de validação. Nomeadamente, são eles:

- Busca por semelhanças e diferenças: Generalização, Conjectura, Identificação de Padrões, Classificação e Comparação.
- Validação: Prova, Prova Formal e Justificação.

Um nono processo que vem se destacando, é o de Exemplificação, que dá suporte aos processos dessas duas categorias. Desta forma, apresentaremos, de maneira sucinta, cada um desses processos. Além de compreender os processos de RM, outro aspecto a ser considerado, diz respeito às ações desempenhadas pelo professor que o apoiam. A interação do professor com o aluno tem um impacto direto em sua aprendizagem, consequência da mobilização de diferentes processos de Raciocínio Matemático.

AÇÕES DO PROFESSOR QUE APOIAM O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Segundo Mata-Pereira e Ponte (2018), é necessário que o professor tenha um conhecimento do próprio raciocínio matemático e dos processos de raciocínio dos alunos para que possa promovê-lo em sala de aula. Além disso, é imprescindível que o professor compreenda a maneira como ocorre o desenvolvimento dos processos de raciocínio matemático dos alunos, e saber quais as ações de ensino que melhor apoiam o desenvolvimento destes processos (Mata-Pereira; Ponte, 2018). Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013), apresentam as ações que melhor apoiam o desenvolvimento dos processos de RM nos alunos e organizam em quatro categorias: *Convidar*, *Guiar/apoiar*, *Informar/sugerir* e *Desafiar*. O Quadro 1 a seguir sintetiza o que as ações de cada categoria:

Quadro 1: Ações dos professores que apoiam o raciocínio matemático.

C A T E	Convidar	<ul style="list-style-type: none"> - Solicita respostas para questões pontuais. - Solicita relatos de como fizeram. 	A Ç
	Guiar/Apoiar	<ul style="list-style-type: none"> - Fornece pistas aos alunos. - Incentiva a explicação. - Conduzo pensamento do aluno. - Focaliza o pensamento do aluno para fatos importantes. - Encoraja os alunos re-dizerem suas respostas. - Encoraja os alunos a re-elaborarem suas respostas. 	

G O R I A S	Informar/Sugerir	<ul style="list-style-type: none"> - Valida respostas corretas fornecidas pelos alunos. - Corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos. - Re-elabora respostas fornecidas pelos alunos. - Fornece informações e explicações. - Incentiva e fornece múltiplas estratégias de resolução. 	Õ E S
	Desafiar	<ul style="list-style-type: none"> - Solicita que os alunos apresentem razões (justificativas). - Propõe desafios. - Encoraja a avaliação. - Encoraja a reflexão. - Pressiona para a precisão. - Pressiona para a generalização. 	

Fonte: Araman, Serrazina e Ponte (2019, p. 476)

Sendo assim, a ação de *Convidar* tem o objetivo de inserir o aluno na discussão sobre a resolução da tarefa feita por ele ou por outros alunos. As ações de *Guiar/apoiar* dizem aos momentos nos quais os professores conduzem os alunos a fornecerem explicações sobre seus pensamentos ao realizar a resolução de uma tarefa. Ações de *Informar/sugerir* são aquelas nas quais os professores fornecem explicações e informações que favorecem o raciocínio dos alunos e, por fim, a ação de *Desafiar*, na qual os professores desafiam os alunos a estenderem o seu raciocínio matemático.

METODOLOGIA

A presente pesquisa se insere no âmbito das pesquisas qualitativas de cunho interpretativo (Bogdan; Biklen 1994), e os dados analisados provêm da realização de uma tarefa de probabilidade aplicada por um professor numa turma de 3º ano do Ensino Médio numa escola situada no município de Cambé, localizado na região metropolitana de Londrina, no estado do Paraná. O objetivo do trabalho é buscar identificar os processos de raciocínio matemático mobilizados pelos alunos ao realizarem a tarefa e categorizar as ações do professor empenhadas em desenvolver os mesmos. Para tanto, faremos a transcrição dos áudios gravados no momento da resolução da tarefa aplicada pelo professor da turma, a tarefa está contida no livro *Focus in High School Mathematics* (NCTM, 2009, p. 81), e teve como adaptação a tradução para o português. O Quadro 2 ilustra a tarefa aplicada:

Quadro 2: Tarefa proposta aos alunos

Um clube de Ensino Médio possui cinquenta membros: dez meninas e quarenta meninos. O comitê das bebidas será formado por dois estudantes do clube selecionados aleatoriamente. Qual é a probabilidade de:

- a) Obter um comitê sem meninas?*
- b) Obter um comitê com exatamente uma menina?*
- c) Obter um comitê com duas meninas?*

Fonte: Adaptada de Focus in High School Mathematics (NCTM, 2009).

Nesta tarefa é descrita a formação de um clube de Ensino Médio para o comitê de bebidas. Um dos objetivos é que os alunos projetem uma simulação prática para estimar a probabilidade de cada um dos diferentes resultados possíveis para o número de meninas do comitê. Para a resolução desta tarefa, serão necessários entendimentos deste conteúdo de forma prévia.

Os sujeitos da pesquisa são o professor desta turma – que também é pesquisador e investigador em processos de RM – cujo nome não é citado a fim de garantir seu anonimato (LÜDKE; ANDRÉ, 2018). Para nos referirmos a ele, o chamaremos de *Professor*. Os alunos, cujos diálogos foram gravados em áudio, também tiveram seus nomes alterados para esta pesquisa e, como consideramos a discussão um fator importante para a realização de tarefas, os alunos foram organizados em duplas onde o *Professor* permitiu que eles próprios definissem suas duplas. Para a atribuição dos nomes que definem a dupla, escolhemos chamar os alunos da Dupla de *Aluno1* e *Aluno2*. Depois disso, as gravações em áudio foram transcritas para posterior análise.

Este trabalho é um recorte de um trabalho maior, onde apresenta a resolução de todas as questões da tarefa pelos alunos da turma. Desta forma, para este trabalho, será analisado somente a resolução do item “a” da tarefa e analisadas as discussões acerca dos aspectos de resolução apresentados.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os alunos sentam-se em pares e logo de início, quando o professor faz a entrega da tarefa, já se nota o *Aluno2* comentando, com o colega da dupla, as possibilidades para sua resolução antes mesmo do professor iniciar a explicação.

Aluno2: Não isso daí é... não é probabilidade!

Aluno1: Vê probabilidade aí! Mas eu não sei fazer esse negócio de probabilidade, eu não sei como que faz a conta. Você sabe fazer a conta? [pergunta para o colega].

Professor: Então, a gente tem o seguinte, olha... Um clube de Ensino Médio possui cinquenta membros: dez meninas e quarenta meninos. Aí eles têm que formar um comitê de bebidas, selecionando dois estudantes aleatoriamente. Desses cinquenta, são dez meninas e quarenta meninos, são dois aleatoriamente desses cinquenta. Aí a pergunta é a probabilidade de ter um comitê sem nenhuma menina, ou seja, qual a chance de eu selecionar aleatoriamente dois meninos em um clube de cinquenta, onde só quarenta são meninos? [professor faz a leitura da tarefa e direciona a explicação para a turma toda].

Aluno1: Duas de cinquenta...

Professor: Lembram da árvore de probabilidades? Tentem começar por lá. Vocês listam as possibilidades... **(Informar/sugerir)** Vão ser duas seleções, não vão ser?! A gente não precisa selecionar duas pessoas?! **(Guiar/apoiar)** [explica para a turma].

Alunos: Sim!

Professor: Então a gente tem que testar todas as possibilidades aqui. **(Guiar/apoiar)** Primeira coisa, a primeira vez... Qual é a chance de selecionar um menino? Qual é o total de pessoas desse clube aí? **(Guiar/apoiar)**

Alunos: Cinquenta!

Professor: Cinquenta! Ótimo! **(Informar/sugerir)** Qual é...? Quantas são meninas? **(Guiar/apoiar)**

Alunos: Dez!

Professor: O resto são meninos, não é? **(Guiar/apoiar)**

Alunos: Sim!

Professor: Dez meninas e quarenta meninos. A gente vai escolher duas pessoas aleatoriamente. Qual é a chance de não ter nenhuma menina entre essas duas [pessoas]? Não é cinquenta por cento porque não são cinquenta x cinquenta né?! [Referindo-se à quantidade de pessoas do clube em porcentagem]. Não está dividido igualmente! **(Informar/sugerir)** [ainda explicando para a turma toda].

Aluno1: Dois de quarenta...

Aluno3: Deixa eu pensar: se cinquenta é o 100... [referindo-se ao cem por cento, ou seja, ao total de pessoas]

Professor: Isso aí!! **(Informar/sugerir)**

Professor: Olha, como é que era a probabilidade? Como que a gente teria a probabilidade, lembram? - Olha, P de alguma coisa é igual... [referindo-se a fórmula para o cálculo da probabilidade] **(Informar/sugerir)**

Neste trecho, do início da discussão, o professor faz a explicação da tarefa para a turma toda, e a primeira ação desempenhada por ele é da categoria *Guiar/apoiar*, com o intuito de fornecer pistas aos alunos para que eles se lembrem da árvore de possibilidades. Ele desempenha também ações da categoria *Informar/sugerir*, fornecendo “pistas” sobre a estratégia de resolução da tarefa. O tempo em que o professor disponibiliza para que os alunos elaborem estratégias e reflitam sobre a tarefa se passa e o professor, notando a dificuldade dos alunos em iniciar a resolução dela, e percebendo a resistência deles em formular um pensamento que os levem ao desenvolvimento de uma *Conjectura*, apresenta explicações para que consigam formular hipóteses de resolução da tarefa, desempenhando ações previstas nas categorias *Guiar/apoiar* e *Informar/sugerir*. A partir disso, alguns alunos já começam a

pensar em algumas possibilidades, lembrando conceitos que auxiliam no cálculo da porcentagem ou da probabilidade.

Conseguimos perceber que, no fim deste trecho, as ações das categorias *Guiar/apoiar* e *Informar/sugerir* ainda são predominantes, pois o professor, empenhado em desenvolver o raciocínio dos alunos, consegue envolvê-los numa discussão sobre os aspectos da tarefa.

O professor prossegue com a discussão utilizando um exemplo:

Professor: Olha, P é o total aqui, em cima alguma coisa... Por exemplo: Qual a probabilidade de eu conseguir um “x” aqui? [O professor utiliza um exemplo com 5 “bolinhas” e 2 “x” desenhados no quadro formando uma árvore de possibilidades]. (**Informar/sugerir**)

Aluno1: Cinco dividido...

Professor: Probabilidade de “x”: dois de cinco. Por quê?! Pois são dois “x” em cinco, o total é cinco. (**Informar/sugerir**)

Aluno1: Ah! Então faz por quarenta... por dez, por dez... Dez divididos por cinquenta. (**Conjectura**)

Professor: Qual a probabilidade de eu obter dois “x” seguidos? (**Guiar/apoiar**) Aí eu teria que fazer a árvore de probabilidade. (**Informar/sugerir**)

Aluno1: Não, é menina, é menina... Apaga esse aí! [neste momento eles percebem que o primeiro item da tarefa era relacionado aos meninos e não às meninas] Quarenta dividido por cinquenta. (**Conjectura**)

Professor: Olha, vamos imaginar aqui: bolinha, bolinha, bolinha, “x”, “x”. É só um exemplo. [...] Probabilidade de eu conseguir “x”? (**Informar/sugerir**) São cinco, não é? Não são cinco eventos ali?! (**Guiar/apoiar**)

Alunos: São...!

Professor: Quantos são “x”? (**Guiar/apoiar**)

Alunos: Dois!

Professor: Dois quintos! [referindo-se à probabilidade de ser “x” no exemplo usado] Essa é a probabilidade de eu conseguir “x” (**Informar/sugerir**). Dois em cinco. Agora, qual a probabilidade de eu conseguir “x” duas vezes seguidas? (**Guiar/apoiar**) Imaginem que a gente vai selecionar duas vezes. Seleciona bolinha na primeira vez, todas essas probabilidades vão se dividir. Vão ser, bolinha, bolinha, bolinha, “x” e “x”. (**Informar/sugerir**)

Aluno1: Aqui você faz dez divididos por cinquenta, igual a zero vírgula dois por cento de chance. (**Conjectura**)

O professor, ainda empenhado em guiar o pensamento dos alunos, continua com o exemplo para a turma toda de forma que os eles se lembrem dos conteúdos de probabilidade supostamente já vistos. Suas ações são da categoria *Informar/sugerir*, em que o professor fornece explicações e informações. Ainda com relação a essa categoria, o professor relembra da fórmula do cálculo de probabilidade, o que faz com que os alunos iniciem o processo de *Conjecturar* no trecho onde eles já percebem aspectos semelhantes da tarefa no exemplo dado pelo professor e aplicam na resolução da mesma. A conjectura feita pelos alunos está relacionada ao algoritmo para o cálculo da probabilidade; eles percebem que o evento é o número de meninos e o espaço amostral/Universo é o total de pessoas deste conjunto, e ao perceberem isto, realizam a divisão.

As ações da categoria *Guiar/apoiar* desempenhadas pelo professor neste trecho foram necessárias para que, explicando o exemplo, ele conseguisse refinar o pensamento dos alunos para os aspectos necessários à elaboração da conjectura na resolução da tarefa.

Após lembrar os conceitos de probabilidade no exemplo dado, o professor continua com a explicação da tarefa:

Professor: Primeira vez, quantas meninas são? (*Guiar/apoiar*)

Alunos: Dez!

Professor: Olha, então aqui é menina, aqui é menino. Por quê?! Quatro para um, a mesma coisa do que quarenta para dez (*Informar/sugerir*) Ao invés de eu fazer cinquenta, eu faço... (*Guiar/apoiar*) Aí o que é que acontece?! Você vai selecionar duas vezes, não vai? Então isso aqui vai se repetir depois, olha. Para cada vez vai acontecer isso aqui de novo. (*Informar/sugerir*) Quais são as possibilidades? (*Desafiar*) Montem essa árvore... (*Informar/sugerir*)

Neste momento, o professor mostra a árvore de probabilidade para os alunos para que eles se lembrem da forma como é esquematizada e pede para que eles continuem no mesmo raciocínio. Suas ações são da categoria *Informar/sugerir*, em que o professor fornece explicações sobre o conteúdo, e também da categoria *Guiar/apoiar*, questionando os alunos sobre elementos da tarefa. Em seguida, o professor solicita respostas com uma questão não pontual e desafia os alunos a encontrarem as possibilidades, ação prevista na categoria de *Desafiar*. Ao perceber que os alunos não respondem a este desafio, o professor sugere que eles montem a árvore de possibilidades para esta questão. Após este momento, o professor deixa que os alunos façam suas anotações sobre a resolução, enquanto caminha pela sala observando os registros feitos.

Aluno1: Professor? É assim...? [perguntando sobre a maneira como fizeram a resolução]

Professor: Isso mesmo! (*Informar/sugerir*) Qual a probabilidade de não ter nenhuma menina então? [fazendo o questionamento da questão “a” da tarefa]. (*Desafiar*)

Dupla: Cinco por cento de chance!

Professor: Faz na sua folha isso aí, olha... Cinco por cento de chance?! (*Guiar/apoiar*)

Aluno1: Ué, não é cinco menina...?

Professor: Não, não...! Faz a probabilidade daquele jeito, olha... [referindo a probabilidade na forma de frações]. (*Informar/sugerir*)

Aluno1: Ah! Cinco dividido por cinquenta daí...?!!!

Professor: Não pensa em porcentagem ainda! (*Informar/sugerir*)

Aluno1: Cinco dividido por cinquenta! [Repete]

Professor: Olha, na primeira vez, isso representa a primeira vez... [mostrando na árvore de probabilidade feita pelos alunos]. (*Guiar/apoiar*) E isso a segunda... [ainda mostrando]. Por exemplo, se você selecionou uma menina na primeira vez... Olha, qual é o total disso aqui? Quantas possibilidades você tem? (*Desafiar*)

Aluno1: Como assim?

Professor: Cinquenta, não é?! (*Guiar/apoiar*)

Aluno1: Sim!

Professor: Então, na primeira vez, qual é a chance de você selecionar menina? (*Guiar/apoiar*)

Aluno1: Uma!

Professor: Uma em quantas? (*Guiar/apoiar*)

Aluno1: Uma de quatro!

Professor: O total não é quatro! (*Informar/sugerir*)

Aluno1: Uma de cinquenta!

Professor: Não! Uma de cinco, né?! (*Informar/sugerir*) Dez de cinquenta ou uma de cinco! (*Informar/sugerir*)

Aluno1: Sim!

Professor: Então tá...! Só que você quer um comitê sem nenhuma menina. Então é a outra probabilidade que você quer, não é?! (*Guiar/apoiar*) Qual a probabilidade de não ter menina na primeira seleção? (*Guiar/apoiar*)

Aluno1: Um...!

Professor: Não ter menina...?! (*Guiar/apoiar*)

Aluno1: Eu “buguei” agora...!

Professor: Pensa aqui, olha: qual a probabilidade de não ter menina? (*Guiar/apoiar*)

Aluno1: Quatro! Quatro de quarenta...

Professor: Quatro de...? (*Guiar/apoiar*)

Aluno1: Cinquenta! Que é o total.

Professor: Tá...! Então não é quatro, então é...? (*Guiar/apoiar*)

Aluno1: Quarenta, ué...

Professor: Quarenta! (*Informar/sugerir*) Isso! Então escreve isso aí... Na primeira. “P” é...

Neste trecho, notamos que, após algum tempo de elaboração dos registros, os alunos da dupla apresentam uma resolução procuram o professor para que ele a valide. Neste momento, o professor desempenha, novamente, ações da categoria *Desafiar* com o intuito de fazer com que os alunos apresentem justificativas para a resolução feita e, frente à resposta equivocada, o professor desempenha as ações das categorias *Informar/sugerir* e *Guiar/apoiar*. Para a categoria *Informar/sugerir*, o professor desempenha a ação de corrigir as respostas incorretas fornecidas pelos alunos e em outros momentos (re)elabora essas respostas fornecidas. Para a categoria *Guiar/apoiar*, o professor faz questionamentos aos alunos encorajando-os a (re)elaborarem as respostas apresentadas durante a discussão feita e conduzindo o pensamento dos alunos ao fazer estes questionamentos.

Os alunos conseguem encontrar a resolução para a primeira parte da questão que é calcular a probabilidade de selecionar o primeiro menino para o comitê, para isso ele recorre a primeira conjectura elaborada pela dupla (para encontrar a probabilidade de um evento efetuar-se a divisão entre o evento e o universo que é o número total de elementos). Entretanto, não fazem isso de forma espontânea, o professor precisa desempenhar diferentes ações para que os alunos consigam avançar nessa questão. Após este momento, os alunos buscam concluir a questão da tarefa:

Professor: Calma aí! Você está adiantado aí... Porque olha, são duas seleções, não são?! Não são duas pessoas? (*Guiar/apoiar*) Então essa representa a primeira... [mostrando a primeira parte da questão já feita] Agora a segunda possibilidade... (*Informar/sugerir*)

Aluno1: Mas daí é só somar, não é? Zero vírgula oito, mais zero vírgula oito, mais zero vírgula oito... (0,8 + 0,8 + 0,8)

Professor: Não! Não dá certo isso... (*Informar/sugerir*) Lembra que era multiplicação das probabilidades? (*Informar/sugerir*)

Aluno1: Mas vai ter que multiplicar elas...?

Professor: Multiplicar... (**Informar/sugerir**) Só que você descobriu a primeira probabilidade e qual vai ser a segunda...? (**Desafiar**) Você já selecionou uma pessoa! (**Guiar/apoiar**)

- É assim: agora a gente está trabalhando com algumas hipóteses, por exemplo, você... De que você não selecionou uma menina na primeira vez né?! (**Guiar/apoiar**)

Aluno1: Sim!

Professor: Dentro dessas chances aqui que vocês chegaram, quarenta em cinquenta. Depois, tirando uma pessoa do total, vai diminuir, não vai? Vai para quanto? (**Guiar/apoiar**)

Aluno1: Vai para quarenta e nove!

Professor: Agora o seu total é quarenta e nove! (**Informar/sugerir**). Qual é a chance de não selecionar menina de novo? (**Desafiar**)

Aluno1: Quarenta dividido por quarenta e nove!

Após questionar o aluno sobre a segunda seleção a ser feita, o professor se afasta e deixa com que a dupla pense sobre os cálculos a serem feitos a partir da reflexão feita no trecho anterior. Para tanto, o professor desempenha ações da categoria *Guiar/apoiar*, *Informar/sugerir* e *Desafiar*. Para a categoria *Guiar/apoiar*, a ação desempenhada é a de focalizar o pensamento dos alunos para o fato de se ter que fazer duas seleções e, portanto, teria que haver mais um cálculo de probabilidade levando em consideração a primeira seleção. Em outros momentos, esta categoria tem a ação de conduzir o pensamento destes alunos. Para a categoria *Informar/sugerir*, as ações desempenhadas são a de fornecer informações, refutar uma estratégia de resolução apresentada pelos alunos, e fornecer estratégia de resolução (ao dizer que, para realizar o cálculo entre as duas probabilidades obtidas a partir das duas seleções, os alunos teriam que multiplicá-las) e, por fim, na categoria *Desafiar* é desempenhada a ação de encorajar a reflexão para e propor desafios que os façam buscar respostas para o que é solicitado na tarefa e, assim, concluem a questão. Neste momento, a dupla inicia diálogos sobre a forma de resolução:

Aluno3: O professor falou que tinha mais coisas aqui... [aluno de outra dupla referindo-se à segunda seleção a ser feita como pede a atividade].

Aluno1: Então... Tinha mais coisas, mas eu não entendi essa coisa...

Aluno1: Porque, tipo, ele [professor] disse que era aquilo..., mas será...?

Aluno2: Tem que pegar o número daqui... tipo, aqui eu acho que pega desse né?! [o Aluno2 refere-se a usar os dados obtidos anteriormente no cálculo da probabilidade para a primeira seleção como explicado pelo professor].

Aluno1: Então, tem que pegar desse daqui agora, esse daqui já foi...

Aluno2: Mas então não ficaria um para quatro? (**Conjectura**)

Aluno1: Então, eu não entendi...

Aluno: Será que ficaria cem dividido por cinquenta? (**Conjectura**)

Aluno2: Ou dez dividido por quarenta? (**Conjectura**)

Aluno1: Pode ser, porque daí já tira uma menina! (**Conjectura**)

Aluno3: Já tira uma menina... Dez pra quarenta! (**Conjectura**)

Aluno2: Porque ele disse que teria que tirar uma pessoa, porque já foi escolhido uma sem menina...

Aluno3: Então, dez pra quarenta!

Aluno1: Tenta fazer esse daí... dez pra quarenta.

- Zero vírgula vinte e cinco (0,25)?

Os alunos apresentam dificuldade na compreensão e resolução da tarefa, mas, ainda empenhados em resolver o restante da questão, começam a pensar sobre os dados contidos na primeira seleção. Com isso, mesmo que de forma equivocada, começam a elaborar *Conjecturas* o que se torna relevante para o refinamento das ideias até a resolução da tarefa por completo. Neste momento de dúvida os alunos ouvem o professor interagindo com outras duplas e questionam se faz sentido o que entenderam da explicação. Após isso, eles repensam sobre a resolução da segunda parte da questão. Após um tempo de conversa, voltam a focar na resolução, pois o terceiro aluno reflete sobre a forma que pensaram e diz:

Aluno2: Selecionar meninas é com zero...

Aluno3: Só falou isso?! Não entendi...

- É com zero? Não faz sentido!

- Vai diminuir...

Aluno1: Quarenta por cinquenta! Será que tipo...?

Aluno3: Vai ser trinta e nove agora, dividido por cinquenta? (*Conjectura*)

Aluno1: Por que tirou uma menina? Zero vírgula setenta e oito! [0,78]

Aluno3: Pode ser! Vai diminuir! (*Conjectura*)

Aluno1: Porque diminuiu um membro do total. (*Justificação*)

Aluno3: Muda tudo! Como tirou uma pessoa, muda tudo! (*Justificação*) Fica trinta e nove dividido por quarenta e nove.

Aluno2: Não entendi!

Aluno1: Nossa!

Aluno3: Entendeu?! Tira um de cada... Fica trinta e nove por quarenta e nove. [se referindo a divisão feita entre o número total de alunos e o número de meninas, visto que um já foi escolhido na primeira seleção]. (*Justificação*)

Aluno1: É... Porque, como tirou um sem menina, agora já tem a segunda parte...

Aluno2: Zero vírgula setenta e nove [0,79]! [Resultado do cálculo efetuado pelo aluno ao dividir o número de meninas que restaram depois da primeira seleção pelo número de pessoas que restaram também a partir da primeira seleção].

Aluno3: Mas não acabou não! Tem mais coisa o professor falou! Vai dar zero vírgula sete [0,7]. [neste momento, o aluno faz um truncamento para a primeira casa decimal do resultado obtido].

Aluno2: E agora?

Aluno1: Agora eu não sei! O que é que faz depois da probabilidade?

Aluno3: Vai dar zero vírgula um [0,1]. Por que não diminui?! Será que subtrai daqui? [o aluno faz a subtração entre a probabilidade encontrada na primeira seleção e a probabilidade da segunda seleção]. (*Conjectura*)

Aluno1: Será que não dividia por dez?

Aluno3: Ou não soma?!

Aluno1: Tipo... sete... Soma os dois e depois divide por dez que é o total de meninas!?! (*Conjectura*)

Aluno2: É o total de meninas!

Aluno1: Ou multiplica ou...

Aluno2: Vai multiplicar os dois! (*Conjectura*)

Aluno3: Vai... zero vírgula oito vezes zero vírgula sete... [fazendo a multiplicação na calculadora]

Aluno2: Zero vírgula cinquenta e seis [0,56]

Neste trecho, conseguimos perceber que, após o professor ter desempenhado todas as ações que achou necessário, os alunos mobilizaram processos de RM de forma que conseguissem chegar em partes da resolução das questões “a” e “b” da tarefa. Para isso, foram

mobilizados por eles processos de *Conjectura* e *Justificação*. As conjecturas feitas pelos alunos foram baseadas em pensar sobre o número total de pessoas do comitê retirando um menino, mas esquecendo que este menino também compõe o total de pessoas. Logo após isto, eles percebem que o resultado do cálculo irá diminuir, visto que um menino já foi selecionado e, conseqüentemente, não participa do número total de meninos.

Após um tempo de reflexão, o *Aluno3* consegue refutar a *Conjectura* que grupo havia elaborado, de cinquenta pessoas ao invés de quarenta e nove para realizar a divisão. É possível observar isso no trecho em que ele diz: “Muda tudo! Como tirou uma pessoa, muda tudo! Fica trinta e nove dividido por quarenta e nove”. Neste momento, ele ainda justifica o seu pensamento para os colegas possibilitando que eles entendam o seu raciocínio. Ao longo da discussão, os alunos ainda apresentam dúvidas em relação à qual operação matemática realizar com as duas probabilidades obtidas: soma, subtração, multiplicação ou divisão. Mas acabam por realizar a multiplicação, como havia sido explicado pelo professor no início, e chegam à conclusão da questão “a” (o resultado teve um valor aproximado do valor real pois os alunos fizeram o truncamento para a primeira casa decimal do resultado da probabilidade da segunda seleção).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo do trabalho, a princípio, era identificar os processos de RM mobilizados pelos alunos ao realizarem a tarefa proposta. Porém, os dados obtidos e analisados tornaram relevante compreender o papel das discussões entre o professor, mostrando o quão importante as suas ações foram para o desenvolvimento e a mobilização desses processos.

É essencial que o professor estimule o raciocínio do aluno, fazendo questionamentos necessários às reflexões. Para Ponte (2005), esses momentos são “oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novos conhecimentos” (PONTE, 2005, p. 16). Wood (1999) destaca que é pertinente que o professor explore essas situações para que a capacidade de argumentação seja desenvolvida e, conseqüentemente, os processos de Raciocínio Matemático. Desta forma, as reflexões realizadas pelos alunos sobre a tarefa só foram, de fato, efetivadas, por meio das intervenções do professor que, de forma incansável, garantiu uma discussão com as duplas.

Percebemos que os alunos da Dupla 1 conseguiram concluir apenas a questão “a” da tarefa a partir de interferências do professor e de processos de raciocínio mobilizados. Em consequência disso, os alunos tiveram mais segurança e autonomia na resolução do item “b”,

sendo menos necessária a interferência do professor. Desta forma, destacamos a importância da aplicação da tarefa aliada com as ações do professor na mobilização dos processos de Raciocínio Matemático trazidos na análise e de outros processos elencados na fundamentação teórica deste trabalho, não identificados com dados analisados.

AGRADECIMENTOS: Os autores agradecem a Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

REFERÊNCIAS

- ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L. Processos de raciocínio matemático na resolução de tarefas exploratórias no 3º ano de escolaridade. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 09, n. 18, p. 118 – 136, 2020.
- BOGDAN, R; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**. Porto: Porto Editora, 1994.
- BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.
- JEANNOTTE, D; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 96, n. 1, 2017.
- LANNIN, J.; ELLIS, A. B.; ELLIOT, R. **Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2011.
- LÜDKE, M; ANDRÉ, M. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. 2. ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2018.
- MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 781–801, 2018.
- NCTM. **Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making**. Reston: NCTM, 2009.
- PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; HENRIQUES, A. **O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior**. *Práxis Educativa*, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 355-377, jul./dez. 2012.
- SERRAZINA, M. L.; RODRIGUES, M.; ARAMAN, E. M. O. Envolver os alunos em processos de raciocínio matemático: as ações do professor. **Psicologia em Pesquisa**, Juiz de Fora, 14(1), p. 18 – 36, 2020.
- STYLIANIDES, G. Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 11, n.4, p. 258-288, 2009. doi: 10.1080/10986060903253954.