Utilizando Análise Combinatória para Explicar a Mega-Sena e a Loteca

Ronaldo Costa da Silva [1]
Hugo Victor Vital Alves Silva [2]
Joelson da Cruz Campos [3]

INTRODUÇÃO

Segundo PIAGET, J. (1998, p. 67), o processo de ensino e aprendizagem tornou-se um campo de possibilidades, onde o educador deve proporcionar meios que estimulem a procura do conhecimento. Com isto, se torna proveitoso utilizar abordagens de jogos de loteria durante o aprendizado dos alunos, como suporte metodológico apoiando os processos de ensino e aprendizagem matemática, assim também como fomentando o pensamento analítico dos alunos.

A utilização de jogos é incentivada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, de acordo com o PCN+ (BRASIL, 2002, p. 56), e se torna imprescindível sempre que possível a utilização de problemas reais no ensino como ferramenta educacional. Desse modo, a utilização de jogos de loterias como os citados visa estimular um aprendizado de forma lúdica.

> “decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação” (BRASIL, 2002, p.126).

Esse trabalho tem como objetivo explicar como funcionam os valores das apostas dos jogos da Mega-Sena e da Loteca, bem como explicar os ganhos em caso de apostas combinadas para com isso motivar o estudo dos principais conceitos de análise combinatória.

De acordo com LAAN, V. D. e RODRIGUES, C. (2018), a loteria brasileira surgiu em 1784, desde então ganhou notoriedade sendo dividida em diversas modalidades, atualmente os jogos são divididos em loterias de prognósticos numéricos, esportivos e de bilheteria e são administrados pelo Banco Caixa Econômica Federal.

---

[1]Graduando do Curso de Estatística da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, ronaldo.costa@estudante.ufcg.edu.br;
[2]Graduando do Curso de Estatística da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, hugo.alves@estudante.ufcg.edu.br;
[3]Professor orientador: Doutor, Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, joelson.cruz@professor.ufcg.edu.br

A Mega-Sena é a loteria com maior número de apostadores, segundo CORREA, H. C. (2019), entre meados de 2017 e meados de 2018, “quase 70 % dos jogadores (4 milhões de pessoas) apostaram nessa modalidade lotérica”, isto ocorreu devido aos grandes prêmios em dinheiro e pela ampla divulgação realizada na mídia fazendo com que várias pessoas apostem nesse jogo com o sonho de ficarem ricas. Para jogar na Mega-Sena é necessário o jogador marcar de 6 a 15 números num quadro numerado de 1 a 60, sendo que a aposta mínima (nesse caso, chamada de simples), consiste em selecionar 6 números dentre os 60 custa R$ 4,50 e o preço de cada aposta combinada é estabelecido pela multiplicação do preço unitário da aposta simples pela quantidade total de apostas simples que ela corresponde. Para ganhar o prêmio máximo é necessário acertar a “sena”, ou seja, os 6 números que são sorteados, além disso, pode-se ganhar prêmios menores acertando a “quina” ou a “quadra”, respectivamente 5 ou 4 números, independentemente da ordem com a qual os números foram sorteados.

A Loteca por sua vez consiste em uma loteria ideal para quem entende de futebol, para jogar o apostador deve marcar o seu palpite para cada um dos 14 jogos do concurso, vitória, empate ou derrota, é também pago um prêmio a quem acertar 13 palpites, a aposta de menor valor com direito a um duplo (ou seja, em uma partida escolher dois entre os três possíveis resultados) custa R$ 3 e ela equivale a realizar duas apostas simples (que corresponderia a R$ 1,50, caso fosse possível de jogar), e assim como na Mega-Sena todas as apostas combinadas possuem seus preços estabelecidos multiplicando o valor de uma aposta simples pelo número de apostas simples que a aposta combinada corresponde.

METODOLOGIA (OU MATERIAIS E MÉTODOS)

Esse trabalho foi feito por meio de uma iniciação científica dentro do Programa de Educação Tutorial (PET) de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG) no qual foram realizados encontros semanais no intuito de trabalhar os principais conceitos de análise combinatória, utilizando como referência MORGADO, A. C. et al. (2020), e posteriormente elaborar a fundamentação teórica para determinar os valores a pagar por apostas combinadas das loterias Loteca e Mega-Sena, bem como a premiação total obtida com apostas combinadas caso acerte-se todos jogos.

REFERENCIAL TEÓRICO

Uma importante área da matemática que visa estudar de forma simples e rápida os métodos de contagem em conjuntos finitos é a *análise combinatória*. Essa área é construída com base em dois princípios chamados de *princípio aditivo* e *princípio multiplicativo*, os quais apresentamos por meio de um exemplo e enunciamos sua forma geral em seguida.

Suponha que uma casa lotérica tenha 3 opções de loterias esportivas e 2 opções de loterias numéricas e Antônio só tenha dinheiro para fazer 1 jogo (aposta), quantas opções de escolhas Antônio tem? Nesse caso, Antônio tem 5 opções de escolha que são escolher um dos 3 jogos esportivos ou um dos 2 jogos numéricos, diante disso nós temos uma situação na qual utilizamos o que chamamos de *princípio aditivo* para contar o número de maneiras de tomar uma decisão, em dois conjuntos de decisões sem opções em comum (disjuntos). Em sua forma geral o princípio aditivo nos diz que, se temos k conjuntos 2 a 2 disjuntos, denotados por $A_1, A_2, \ldots, A_k$, e queremos saber o número de maneiras de tomar uma decisão nesses k conjuntos podemos tomar essa decisão de $n(A_1 \cup \ldots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} n(A_i)$ maneiras, em que n(A) correspondente ao número de elementos do conjunto A, nesse caso, número de decisões.

Por outro lado, suponha agora que Antônio possa escolher jogar um jogo de cada tipo (esportivo e numérico), quantas opções de escolhas diferentes ele tem? Nessa situação, ele pode escolher primeiro um dos 3 jogos esportivos e em seguida escolher um dos 2 jogos numéricos ou vice-versa, ou seja, para cada escolha de um entre os três jogos esportivos ele possuíra duas formas de escolher uma das duas loterias numéricas, logo ele tem $3 \times 2 = 6$ opções de escolhas diferentes, nesse caso utilizamos o que chamamos de *princípio multiplicativo*. O princípio multiplicativo em sua forma geral nos diz que se temos k conjuntos de decisões, denotados por $A_1, A_2, \ldots, A_k$, e queremos saber o número de maneiras de tomar uma decisão em cada um dos k conjuntos de forma sucessiva, podemos tomar essa decisão de $n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot \ldots \cdot n(A_k)$ maneiras, que corresponde ao número de elementos do produto cartesiano dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

A partir desses dois princípios desenvolvemos três importantes conceitos de análise combinatória, o de permutação, o de arranjo e o de combinação que servirão como base para obtenção de nossos resultados.

Considere uma loteria em que n números são sorteados no conjunto $\{1,2, \ldots, n\}$ e o jogador deve acertar a sequência exata com a qual os números aparecem. Nesse caso, devemos estar interessados em descobrir o número de ordenações que podemos obter, a esse número damos o nome de *permutação simples*, denotado por P_n. Para calcularmos basta usarmos o princípio multiplicativo e observarmos que temos n números para colocar na primeira posição, $n-1$ para colocar na segunda posição e assim por diante até que tenhamos 1 número para colocar na última posição, ou seja, o número de permutações diferentes (formas de ordenar) é $n(n-1)\ldots 1$ o qual denotaremos por $n!$ (onde se lê n fatorial), logo,

$$P_n = n!.$$

Considerando que na loteria criada no exemplo anterior ao invés de sortear n números sejam sorteados $p < n$, poderíamos novamente pensar no número de sorteios possíveis. A esse problema no qual sorteamos p números de um conjunto com n no qual a ordem é um fator importante damos o nome de *arranjo simples*, denotado por A_n^p. Para obtermos o valor de A_n^p basta usarmos o princípio multiplicativo e observarmos que temos n números para colocar na primeira posição, $n-1$ para colocar na segunda posição e assim por diante até que tenhamos $n-(p-1)$ para colocar na p-ésima posição. Assim,

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(p-1)) \text{ no qual, } 1 < p \leq n,$$

multiplicando o numerador e denominador por $(n-p)!$ Obtemos que

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Com base no problema anterior de arranjo simples, levando em consideração que a ordem agora não é um fator importante, o problema de determinar o número de sorteios corresponde a um problema que chamamos de *combinação simples de n objetos tomados p*, denotado por C_n^p, onde temos n números (ou objetos) distintos e queremos formar agrupamentos com p objetos. Para resolvermos esse problema e obtermos o valor de C_n^p basta observarmos que se a ordem fosse importante teríamos como solução A_n^p, porém como a ordem não é um fator importante devemos ter que.

$$A_n^p = C_n^p \cdot p! \Leftrightarrow C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!},$$

multiplicando o lado direito da última equação por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$ obtemos que

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \text{ onde } 0 < p \leq n.$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Conforme mencionamos anteriormente o valor de uma aposta combinada da Loteca é feita pela multiplicação do preço unitário da aposta simples, a qual consiste em selecionar uma das opções vitória, empate ou derrota do mandante para cada um dos 14 jogos (caso pudéssemos fazer essa aposta custaria o valor de R$ 1,50), pelo número de apostas simples que a aposta combinada corresponde. O valor mínimo de um jogo na Loteca é R$ 3 e nesse jogo o apostador tem direito a preencher um cartão com 1 duplo, isto é, das 14 linhas disponíveis no volante deve-se preencher as 13 linhas com vitória, empate ou derrota do mandante e na linha restante preencher duas colunas por exemplo, empate e vitória do mandante, ou seja, uma aposta de R$ 3 equivale a 2 apostas simples. Cabe observar que ao jogar uma aposta combinada com d apostas duplas e t apostas triplas, caso sejam acertados os resultados dos 14 jogos, acertam-se também $d + 2$t vezes 13 jogos, isso ocorre porque acertando os 14 jogos com apostas combinadas podemos errar uma aposta em exatamente um dos d duplos ou um dos t triplos, sendo que em cada duplo haverá uma única possibilidade de erro e em cada triplo duas, logo pelo princípio aditivo o número de apostas com 13 jogos corretos é $d + 2t$.

Diante disso, suponha que desejamos realizar um jogo com 1 duplo e 1 triplo, pelo princípio multiplicativo, isso equivale a realizar $2^1 \times 3^1 = 6$ apostas simples, portanto esse jogo deve custar $6 \times R\$\,1{,}50 = R\$\,9$ e consequentemente em caso de acerto dos 14 jogos acertamos 3 vezes 13 jogos. Por outro lado, considerando um jogo com 3 duplos e 2 triplos, pelo princípio multiplicativo temos que isso equivale a realizar $2^3 \times 3^2 = 72$ apostas simples, portanto este jogo deve custar $72 \times R\$\,1{,}50 = R\$\,108$ e consequentemente acertando os 14 jogos, nesse último caso, acerta-se também 13 jogos outras 7 vezes.

Por sua vez, para calcularmos o valor de uma aposta da Mega-Sena devemos lembrar primeiramente que serão sorteados apenas 6 números e que uma aposta simples custa R$ 4,50. Diante disso, podemos calcular o número de resultados possíveis com uma combinação simples tendo em vista que a ordem dos números não muda o sorteio final, com isso observamos que temos então um total de $C_{60}^{6} = 50.063.860$ resultados possíveis de acontecer.

Uma vez que sabemos disso, para calcularmos o valor de uma aposta na qual selecionamos k números $6 \leq k \leq 15$, devemos responder à pergunta: Um cartão com k números selecionados equivale a quantos cartões com 6 números? Essa pergunta nesse momento possui uma resposta simples C_k^6. Diante disso, uma aposta com k números deverá custar $R\$\, C_k^6 \cdot 4{,}50$. Um fato interessante e pouco explorado é que conforme vimos ao jogarmos um cartão com k números na verdade na verdade estamos jogando C_k^6 jogos simples e nesse caso acertando os 6 números não se ganha apenas o prêmio máximo, pois acertam-se também $C_6^5 \cdot C_{k-6}^1$ quinas (número de maneiras de acertar 5 números e errar 1 escolhendo k números, sabendo-se que acertou as 6 dezenas) e $C_6^4 \cdot C_{k-6}^2$ quadras (número de maneiras de acertar 4 números e errar 2 escolhendo k números, sabendo-se que acertou as 6 dezenas).

Assim, por exemplo, em uma aposta que um jogador seleciona 9 números ele deve pagar o valor de $C_9^6 \times 4{,}50 = 84 \times 4{,}50 = 378$ reais e caso venha acertar a sena acerta também $C_6^5 \cdot C_{9-6}^1$=18 quinas e $C_6^4 \cdot C_{9-6}^2$=45 quadras. Enquanto isso, um apostador que deseja marcar 11 números deve pagar $C_{11}^6 \times 4{,}50 = 462 \times 4{,}50 = 2.079$ reais por sua aposta e caso venha acertar a sena acerta também $C_6^5 \cdot C_{11-6}^1$=30 quinas e $C_6^4 \cdot C_{11-6}^2 = 150$ quadras.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho, ressaltamos a importância da análise combinatória e das técnicas de contagem para o cálculo dos valores das apostas lotéricas e das premiações em caso de apostas combinadas o que pode ser usado como instrumento motivador para trabalhar os conceitos de análise combinatória no ensino médio. Além disso, podemos observar também que ao fazermos uma aposta combinada não está sendo concedido nenhum desconto ao jogador por parte da Caixa, mas sim um meio mais rápido e eficiente de fazer várias apostas com um único cartão.

REFERÊNCIAS

CORREA, H. C. **O Perfil dos Apostadores de Loteria no Brasil**: análise de box-cox double hurdle model com microdados da POF 2017-2018. Monografia – Faculdade de Ciências Econômicas, Minas Gerais, p. 71. 2019.

LAAN, V. D. e RODRIGUES, C. **A Regulação de Loterias e a Responsabilidade Social no Financiamento das Entidades Filantrópicas**. Monografia - Escola de Administração Fazendária, Brasília, p. 51. 2018.

BRASIL, **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)**. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2002. BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacionais

PIAGET, J. **Psicologia e Pedagogia**. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1988.

MORGADO, A. C. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade:** com as soluções dos exercícios. Rio de Janeiro: SBM, 2020.