



COLA, PAPEL E TESOURA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

Lucilene de Souza Tatagiba ¹
Jocilea de Souza Tatagiba ²

RESUMO

Este estudo visa apresentar uma proposta de aula para o ensino de Geometria Espacial, em que se utilizou o material concreto para facilitar a visualização das figuras tridimensionais. Muitos autores destacam a dificuldade que os estudantes têm em visualizar as figuras espaciais quando desenhadas na lousa, dessa forma, a utilização de material concreto tem auxiliado nessa percepção. Esse trabalho foi realizado com estudantes do segundo ano do Ensino Médio, em uma escola pública estadual do Rio de Janeiro. Foram realizadas diferentes atividades para que o aluno através da observação, construção e manipulação dos sólidos fosse capaz de compreender e identificar os poliedros. Além disso, os alunos puderam verificar a validação da Relação de Euler. Foi possível observar que as atividades que envolveram o material concreto proporcionaram uma melhor visualização e facilitou a compreensão dos conceitos abordados. O aluno se mostrou mais ativo e participativo durante a aula, que por sua vez, tornou-se mais dinâmica.

Palavras-chave: Geometria Espacial, Relação de Euler, Poliedros, Material concreto, Aprendizagem.

INTRODUÇÃO

A Matemática, considerada por muitos um bicho-papão, é vista como uma das disciplinas mais difíceis da escola e também é a que mais se relaciona com o nosso cotidiano, seja representando dados estatísticos, construções, arquiteturas, modelos matemáticos etc.

Uma das áreas da Geometria que tem o seu processo de aprendizagem tido como complexo é a Geometria Espacial, visto que o aluno, além de precisar dos pré-requisitos da Geometria Plana, precisa visualizar o objeto tridimensional, passando do plano 2D para o plano 3D.

Em suas aulas, muitos professores representam os sólidos geométricos utilizando, apenas, a lousa, o que pode obstaculizar a visualização dos alunos, pelo fato dela ser plana. Essa situação faz com que muitos alunos não compreendam os conceitos, uma vez que eles não

¹ Mestre em Matemática pelo PROFMAT da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ e docente da SEEDUC/RJ, lucilenetatagiba@gmail.com;

² Mestre em Educação pela Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ e docente da SEEDUC/RJ, jocileatatagiba@gmail.com

conseguem associar o que ele estuda com os objetos do seu cotidiano, criando a ideia de que a Matemática é algo abstrato. Nessa perspectiva, a Geometria "é considerada como uma ferramenta para descrever e interagir com o espaço no qual vivemos, usada em aplicações tanto tradicionais como inovadoras e, talvez, a parte da Matemática mais intuitiva, concreta e ligada à realidade." (SALIN, 2013, p.262).

Com o decorrer do tempo, percebem-se várias mudanças significativas no processo de ensino de matemática ligadas aos conteúdos e às metodologias utilizadas. Desde o lançamento dos Parâmetros Curriculares nacionais (PCN), nota-se a preocupação com a contextualização e a interdisciplinaridade. Tais orientações continuam sendo enfatizadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Nela, são citadas várias habilidades relacionadas à geometria, especificamente. Segundo a BNCC (2018, p. 271), a "Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento".

Nesse aspecto é necessário buscar metodologias que aproximem o aluno do mundo em que ele vive e que a sua aprendizagem seja algo prazeroso e repleta de descobertas, mostrando, assim, que a matemática não é algo fora de sua realidade.

Para o aluno, mais importante que conhecer essas verdades matemáticas, é obter a alegria da descoberta, a percepção de sua competência, a melhoria da auto-imagem, a certeza de que vale a pena procurar soluções e fazer contestações, a satisfação do sucesso, e compreender que a matemática, longe de ser um bicho-papão, é um campo de saber, onde ele, aluno, pode navegar. (LORENZATTO, 2006, p.25 apud SALIN, 2013, p.2).

2. ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA

São vários estudos e/ou relatos de experiência que abordam as dificuldades no ensino e aprendizagem da Geometria Espacial. Dentre eles, citamos Silva e Braz (2017) que, através de um relato de experiência, constaram algumas dificuldades para o ensino de Geometria Espacial. Dentre elas foram observadas: falta de domínio dos conteúdos relacionados com a Geometria Plana, por exemplo, área de polígonos; visualização de sólidos geométricos; compreensão das fórmulas; relacionar os conteúdos estudados com o cotidiano e interpretação dos enunciados dos exercícios.

Alguns alunos não tiveram contato com a Geometria Plana no ensino fundamental e acabam levando esse déficit para o ensino médio. O professor ao invés de apenas revisar os conteúdos da Geometria Plana acaba tendo que ensinar tal conteúdo. E, ainda, por falta de



material, alguns docentes acabam trabalhando a Geometria Espacial somente com "quadro e giz". O que nos remete à fala de Kaleff (1994, p. 21):

Em nossa própria prática pedagógica, temos observado que poucas crianças são capazes, à primeira vista, de perceber as faces "ocultas", de um cubo desenhado no quadro-negro, mesmo quando usamos linhas pontilhadas e sombreados para indicá-las.

Tais ideias corroboram com o pensamento da professora Castilho ao afirmar que seria ingenuidade se esperássemos “que as crianças interpretassem com facilidade as representações habituais das figuras de três dimensões, onde a ideia de perspectiva é passada de linhas pontilhadas que visam denotar a profundidade.” (CASTILHO, 1989 apud KALEFF, 1994, p. 21).

Tal fato acaba dificultando a visualização dos sólidos pelos alunos e isso vai acarretando a não compreensão dos conceitos, levando o aluno a não fazer a associação daquilo que estuda com o seu cotidiano, e muitas vezes, eles decoram as fórmulas e não sabem como aplicá-las.

Tem-se observado que as dificuldades relacionadas à Geometria Espacial se referem também à resolução de problemas. Salin (2013) faz uma crítica referente ao isolamento da prática escolar com a resolução de problemas, onde o aluno não consegue ser o autor da sua aprendizagem, é como se fosse um ensino paralelo para a resolução de problemas, o discente necessita escolher basicamente uma técnica ou utilizar formas de resolução memorizadas. A ideia seria o mesmo arrumar uma estratégia que solucionasse o problema. Para a autora, a resolução de problemas é importante, uma vez que, eles "permitem ao aluno colocar-se diante de questionamentos e pensar por si próprio, possibilitando o exercício do raciocínio lógico e espacial e não apenas o uso de fórmulas". (SALIN, 2013, p. 262).

2.1. A utilização de material concreto no ensino da geometria

Atividades lúdicas como: jogar, cortar, colar, montar, pintar entre outras, são consideradas por alguns profissionais como mero divertimento, perda de tempo e conseqüentemente perda e/ou atraso de conteúdo. Acreditam que através delas não há aprendizagem. Todavia, "tais atividades não só são importantes para o desenvolvimento da intuição espacial e de habilidades para visualizar, desenhar, interpretar e construir, mas têm relação com a formação do pensamento geométrico dedutivo". (KALEFF, 1994, p.21).

Mais importante que "designar" e "definir", como ações meramente repetidoras das palavras e proposições que o professor fala ou escreve, é observar, descrever, comparar, tocar, construir. Esta fase inicial, se caracteriza por atividades ligadas a ação: o aluno manipula e constrói objetos das mais variadas formas para então analisar



suas características físicas e geométricas. (CASTILHO, 1989 apud KALEFF, 1994, p. 22).

Estudos ligados à Geometria Espacial são frequentemente abordados em dissertações. Nelas, os autores procuraram práticas que levassem os alunos a compreenderem tais conteúdos através de materiais concretos ou virtuais. Pesquisas do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) têm sugerido diferentes metodologias e atividades para abordar o tema em sala de aula.

Quadrat (2013) e Cardia (2014) realizaram suas investigações apresentando propostas semelhantes. Os autores buscaram trabalhar com os alunos a ideia de área e volume por meio de embalagens de produtos vistas em seu cotidiano. Para a realização do trabalho, a turma foi dividida em grupos que deveriam recriar uma nova embalagem para o produto escolhido, justificando sua escolha. Por exemplo, houve um grupo que escolheu um determinado formato de embalagem visando economizar no material; outro grupo visou à praticidade para o consumidor; e etc. Os alunos também deveriam criar propagandas para a defesa da nova embalagem.

No trabalho de Quadrat (2013), os alunos tiveram que expor suas criações para os demais estudantes e também para a comunidade, uma vez que, muitos trabalhos apresentavam uma proposta de conscientização ambiental. Já Cardia (2014), na conclusão de sua pesquisa, verificou os resultados e os comparou com o rendimento destes mesmos alunos em bimestres anteriores, constatando uma melhora em suas notas.

Andrade (2014) e Moraes (2014) se basearam nas teorias de Van Hiele (Geometria Plana), Gutiérrez (Geometria Espacial) e na Neurociência. Na teoria de Van Hiele o aluno tem vários níveis a serem atingidos para alcançar a aprendizagem geométrica, conforme ele vai atingido um nível, ele avança para o próximo. A Teoria de Gutiérrez contempla as habilidades de visualização espacial que o aluno necessita para compreender tal conteúdo. E na Neuropedagogia que se relaciona com a neurociência, o aluno através das suas emoções consegue armazenar no córtex cerebral as informações e não as esquecer. A memória humana é seletiva e armazena experiências atreladas às emoções positivas e negativas.

A proposta de Andrade (2014) foi trabalhar com a montagem dos poliedros utilizando jujuba e palitos para ensinar a Relação de Euler, diagonal do paralelepípedo e do cubo. Os alunos faziam suas observações, análises e fotografavam os sólidos. A professora obteve resultados positivos do conteúdo abordado com o uso do material concreto tanto nas avaliações internas quanto nas avaliações externas, aplicadas pelo governo.

A proposta de Moraes (2014) foi trabalhar a resolução de problemas através da montagem dos sólidos com dobraduras, canudos e linhas e utilizar quebra-cabeças como desafio para os alunos montarem outros sólidos geométricos. Apesar de não ter relatos de aplicação com os alunos, percebe-se que a intenção da autora era que, por meio das atividades os estudantes pudessem visualizar, manipular e explorar as características e propriedades dos poliedros.

Nogueira (2014) fez uma análise do estudo da Geometria Espacial trabalhando com duas turmas diferentes. Em uma turma ela abordou o conteúdo de forma lúdica, com material concreto e virtual, e na outra, de forma tradicional, explicando a teoria utilizando o quadro e exercícios de fixação. A autora aplicou um teste antes de abordar o conteúdo e um teste posterior para a sua análise. No pré teste as turmas estavam no mesmo nível e no pós teste ela percebeu que ambas as turmas tiveram uma melhora, porém, a turma que utilizou os recursos concretos e virtuais apresentou melhor rendimento. Isso nos leva a refletir sobre a importância do professor se manter atualizado e aberto a adoção de novas didáticas de ensino.

Valentim (2017) em sua pesquisa abordou o ensino da Geometria Espacial através das tecnologias utilizando a realidade aumentada, em que é possível transpor objetos virtuais no campo real através de um software que utiliza a câmera do computador, smartphone ou tablet. A proposta era que os alunos identificassem as arestas, vértices e faces dos sólidos geométricos. Além da imagem apresentada no dispositivo possuir profundidade (cor clara e cor escura), o aluno podia girá-la, o que auxiliou na visualização dos sólidos. Desse modo, o discente teve mais facilidade na contagem e aplicação da relação de Euler. O autor obteve resultados positivos, principalmente na facilidade com que os alunos tiveram em visualizar os objetos no plano tridimensional, realizando as atividades.

Através dessas análises, podemos perceber que o material concreto e o virtual auxiliam no ensino e na aprendizagem, pois ambos ajudam na visualização do objeto em 3 dimensões, requisitos para o aluno obter um nível adequado de abstração, como relata Kaleff (1994):

Portanto, para que uma criança possa interpretar um desenho de um sólido espacial ou representar um sólido espacial por meio de um desenho, ela necessita de um nível adequado de abstração que deve ser desenvolvida através das atividades diversas de construção, inclusive as que utilizam materiais concretos, como argila, papel cartão, cartolina, dobraduras de papel e outros. (KALEFF, 1994, p. 22)

METODOLOGIA

Trata-se de um relato de experiência em que se utilizou o material concreto para auxiliar no estudo da Geometria Espacial. Tal atividade teve como objetivo facilitar a visualização dos

sólidos geométricos e foi realizada com alunos do 2º ano do Ensino Médio, em uma escola pública estadual do Rio de Janeiro.

Inicialmente, a professora trabalhou com a planificação dos poliedros regulares. Para tal, ela levou as imagens impressas e as distribuiu aos alunos que estavam divididos em grupos. Os alunos recortaram as figuras e com o uso de cola, fizeram a montagem dos sólidos.

Em um segundo momento, os alunos identificaram as faces, identificando o polígono correspondente a cada sólido e posteriormente contaram as mesmas, dando nome aos poliedros. Nesse momento, eles associaram a quantidade de faces com o nome dos sólidos.

Na segunda atividade, os alunos fizeram a montagem dos sólidos com palitos de dente e massinha de modelar, nessa atividade eles iriam estudar: arestas, vértices e faces. Posteriormente, eles iriam preencher uma tabela e verificariam a validade da Relação de Euler. Nessa atividade eles poderiam visualizar e contar os vértices (massinha de modelar), as arestas (palitos de dente) e as faces, os polígonos formados com os palitos de dente.

Tabela 1: Vértices, Faces e Arestas.

Poliedro	Vértice (V)	Faces (F)	Aresta (A)	V+F	A
Hexaedro					
Tetraedro					
Octaedro					
Pirâmide de base quadrada					
Pirâmide de base pentagonal					
Prisma de base triangular					
Prisma de base retangular					
Dodecaedro					
Icosaedro					

Fonte: As autoras, 2022.

Assim, os estudantes poderiam verificar a validade da Fórmula $V+F=A+2$ através do preenchimento da tabela e dos cálculos.

4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

No início da aula, ao se depararem com tesoura, cola, folha e massinha de modelar, os alunos ficaram receosos. Alguns disseram que não gostavam de brincar com "aquilo", referindo-se ao material, e que essa "fase" de sua vida já havia passado. Porém, no decorrer das atividades, os mesmos foram se animando e se mostraram otimistas. Explicamos-lhes que aquele processo iria auxiliá-los na visualização e os ajudariam a compreender o conteúdo que seria abordado no bimestre.

Na primeira atividade, os alunos precisavam observar as figuras planejadas em uma folha, cortá-las de acordo com as linhas, depois dobrar e cola-las, observando assim, a planificação e posteriormente, a figura em 3 dimensões. Depois dessa etapa, os mesmos precisavam contar as suas faces para nomear os poliedros. Os alunos gostaram e a impressão que tiveram foi que eles estavam apenas brincando. Todos conseguiram nomear as figuras e aqueles que tiveram dificuldades, a professora auxiliou-os dando dicas, dizendo, por exemplo: "se um time for 8 vezes campeão, ele será o que?". Aqueles que gostavam de esporte rapidamente respondiam.

Vê-se que apesar dos alunos acharem que era apenas uma brincadeira, eles estavam aprendendo um pouquinho do conteúdo de forma divertida e sem a pressão de ter que decorar os nomes dos sólidos e as suas planificações.

Nas imagens temos a ilustração do processo da atividade 1: os alunos tinham a planificação dos sólidos, recortavam, colavam e analisam as suas características.

Figura 1: Planificação e montagem dos sólidos



Fonte: As autoras, 2022.

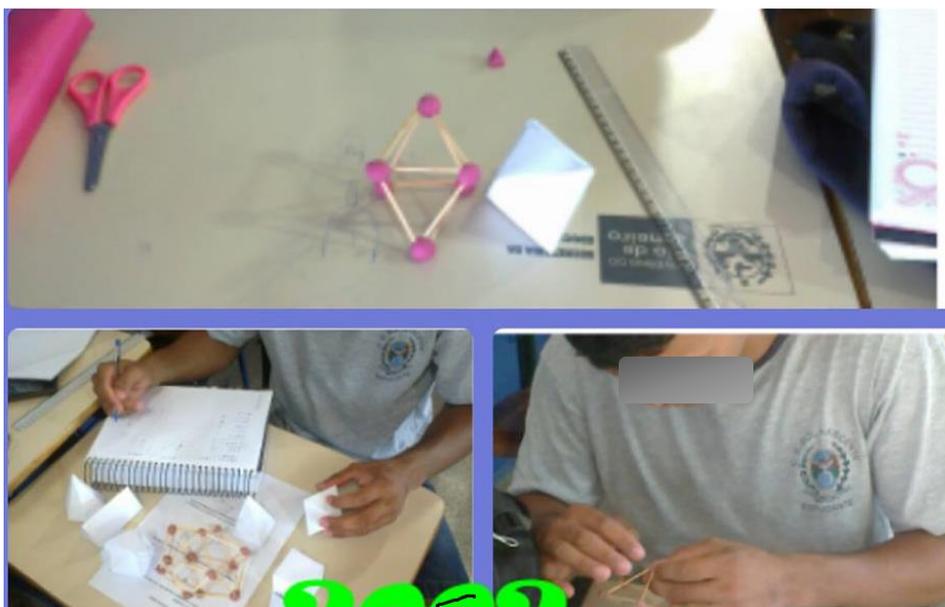
Na segunda atividade, os alunos fizeram a montagem dos poliedros através do uso da massa de modelar e de palitos de dente. Através das suas análises eles precisavam deduzir e/ou

compreender a fórmula de Euler. Alguns alunos tiveram dificuldades na montagem do dodecaedro e do icosaedro, pois a massinha não estava firme e os sólidos estavam se desconfigurando, mas, com o uso de mais massinha foi possível deixar os objetos firmes.

Nessa atividade, os alunos aprenderam sobre os vértices e as arestas de um sólido e puderam analisar as faces de outra forma, diferente da forma vista na atividade anterior. Eles fizeram a contagem para preencherem a tabela (tabela 1). A maioria dos alunos teve dificuldade na contagem das arestas e dos vértices do icosaedro e do dodecaedro. Após conseguirem contar os vértices com a ajuda dos colegas, a professora orientou os mesmos a analisarem o que acontecia com os sólidos anteriores, observando a tabela preenchida. Fizeram os cálculos e descobriram que em todos os sólidos o número de arestas era sempre 2 unidades a menos do que a soma das faces com o número de vértices. Após essa verificação foi possível encontrar os valores das arestas dos sólidos (icosaedro e dodecaedro) sem fazer a contagem. Assim, eles conseguiram chegar à fórmula.

A professora, ao explicar o motivo desse fato ocorrer em todos os poliedros regulares, formalizou o conceito. Os alunos ficaram surpresos por conseguirem deduzir a fórmula de Euler. Alguns perguntaram se precisariam decorá-la; outros, já disseram que não era necessário pois bastava se lembrar que sempre faltavam duas unidades para a aresta ficar igual ao número de faces mais o número de vértices.

Figura 2: Alunos montando os poliedros com massa de modelar e palitos de dente



Fonte: As autoras, 2022.



Através dessa atividade, percebemos que os alunos se mostraram mais ativos e puderam compreender os conceitos, verificando as propriedades através da manipulação, montagem, visualização e cálculos. O material concreto facilitou o processo de aprendizado, pois tornou a aula mais dinâmica.

Quando a visualização espacial não é desenvolvida, o aluno passa a ter dúvidas em outros conceitos da Geometria Espacial, como no cálculo da área e do volume. Nesse sentido, é essencial que a metodologia utilizada pelo professor minimize tais dificuldades e auxiliem tanto no ensino quanto na aprendizagem.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Geometria tem grande relação com o mundo em que vivemos, talvez seja a parte mais intuitiva e concreta da Matemática que se relaciona com o cotidiano dos alunos. Logo, era para ser considerada uma das disciplinas mais fáceis e compreensíveis da escola. Infelizmente não é isso que tem acontecido.

Ao abordar a Geometria Espacial, percebemos que alguns alunos não possuem os requisitos básicos para a compreensão, tais como, conhecimentos prévios da Geometria Plana; visualização espacial - o aluno precisa imaginar um sólido geométrico; falta de compreensão dos enunciados e, isso acarreta a não associação do que ele aprende com o que ele vive no seu dia a dia. O discente acaba só decorando as fórmulas para a realização das avaliações.

Alguns autores relataram que muitas vezes o ensino da geometria é baseado em aulas expositivas utilizando apenas o "quadro e giz", o que dificulta a compreensão, pois o professor estará representando um objeto 3D em um plano 2D.

Nesse trabalho, utilizamos o material concreto, onde o aluno podia pegar, cortar, colar, visualizar e manipular. O estudante observava uma folha, o objeto planificado, e através do recorte e da colagem o "transformava" em um objeto em 3 dimensões, formando um sólido. Através desse processo ele pode compreender alguns conceitos abordados, pois visualizou o objeto no plano bidimensional e depois no tridimensional. Alguns alunos associaram os objetos formados com os objetos do seu cotidiano, como caixa de leite, balão, pirâmide do Egito, entre outros. Após essa etapa, o aluno fez a mesma atividade de montagem, porém, agora, utilizando palitos de dente e massa de modelar para analisar a Relação de Euler.

Portanto, utilizar recursos concretos no ensino da Geometria Espacial faz com que o aluno seja ativo na sua aprendizagem, assumindo o papel de protagonista do seu aprendizado.



Ele analisa, ele observa e ele compreende os conceitos através da manipulação do objeto e o professor é aquele que vai auxiliá-lo nesse processo de construção do seu conhecimento.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, F. C. Jujubas: Uma proposta lúdica ao ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio. 2014. 63 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, **Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro**, Rio de Janeiro, 2014.

CARDIA, L. S. Uma abordagem do ensino de Geometria Espacial: A Otimização de embalagens como contextualização do conceito de áreas de figuras planas e volumes dos sólidos geométricos. 2014. 98 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - **Instituto de Matemática Pura e Aplicada**, Rio de Janeiro, RJ, 2014.

FAINGUELERNT, E. K. O Ensino de Geometria no 1º e 2º Graus. A Educação Matemática em Revista. Rio de Janeiro: **SBEM**, n. 4, p. 29-32, 1995.

KALEFF, A. M. Tomando o ensino de Geometria em nossas mãos. A Educação Matemática em revista, **SBEM**, v. 2, p. 19-25, Jan/jun 1994.

MORAES, L. S. A Geometria Espacial no Ensino Médio: Um estudo sobre o uso do material concreto na resolução de problemas. 2014. 57 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, **Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro**, Rio de Janeiro, RJ, 2014.

NOGUEIRA, F. Uma Experiência no ensino de geometria espacial no terceiro ano do ensino médio. 2014. 61 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, **Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro**, Seropédica, RJ, 2014.

QUADRAT, R. V. Mudando a Forma e Mantendo o Volume: Um Projeto Interdisciplinar com Embalagens no Ensino de Geometria Espacial Niterói. 2013. 45 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Matemática e Estatística, **Universidade Federal Fluminense**, Niterói, RJ, 2013.

SALIN, E. B. Geometria Espacial: A aprendizagem através da construção de sólidos geométricos e da resolução de problemas Spatial Geometry: The learning by the geometric solids' construction and problem-solving. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 8, n. 2, p. 261-274, 2013.

SILVA, M.A.A; BRAZ, L.H.C. Geometria Espacial no Ensino Médio: investigação sobre as dificuldades no ensino-aprendizagem. **VII CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA**. ULBRA – Canoas – Rio Grande do Sul – Brasil.2017. Disponível em: <<http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii/paper/viewFile/6783/3311>>. Acesso em: 28 abri. 2020.



VALENTIM, T. A. O uso da realidade aumentada no ensino da Geometria Espacial. 2017. 43 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Matemática, **Universidade Federal do Rio de Janeiro**, Rio de Janeiro, RJ, 2017.