O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DO JOGO SENHA

Pedro Vítor dos Santos Barbosa [1]
Ester Vanderlei Silva Avelino [2]
Ísis Vieira Fernandes [3]
Josefa Itailma da Rocha [4]

INTRODUÇÃO

A realidade de muitas salas de aula de matemática é a presença constante de um ensino tradicional, onde o professor apresenta o assunto de forma passiva, normalmente por meio de uma aula expositiva, e o aluno tem como objetivo reproduzir os conhecimentos expostos, priorizando principalmente a memorização e a mecanização. Entretanto, sem tirar a importância do ensino tradicional, trabalhar apenas com essa metodologia, proporciona aos alunos uma matemática descontextualizada da realidade, sem significado e muito pouco atrativa, além de não promover a reflexões, a indagações e a criatividade dos alunos.

Dessa forma, existem outras metodologias de ensino em que tornam a matemática mais atrativa e interessante para os estudantes, que assim, deixam de apenas ouvir as explanações do professor e passam a interagir e considerar a aula menos monótona. Dentre elas está a utilização de jogos no ensino de matemática, que pode ser considerada uma metodologia lúdica na qual o aluno tem a liberdade de criar suas estratégias, raciocínios e criatividade.

Além disso, essa metodologia permite que o professor facilite a compreensão de vários conceitos matemáticos. Sobre isso, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) destacam que "um aspecto relevante dos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer" (BRASIL, 1997, p. 49) e ainda, segundo Mumbach; Wolkmer e Prusler (2013) "esse interesse e prazer fazem emergir as relações necessárias as aprendizagens".

Ainda vale destacar que

> Um dos motivos para a introdução de jogos nas aulas de Matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. (MACHADO; SILVA; CIABOTTI, 2013, p.4)

---

[1] Graduando do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, pedrovt91@gmail.com;
[2] Graduanda do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, ester.vanderlei91@estudante.ufcg.edu.br;
[3] Graduanda do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, isisvf11@gmail.com;
[4] Professora orientadora: Doutora, Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, itailma@mat.ufcg.edu.br;

À vista do que foi exposto, buscamos, por meio desse trabalho, abordar alguns métodos para o ensino de análise combinatória de forma mais lúdica ao aluno, por meio do jogo senha, trabalhando com algumas situações possíveis de serem encontradas pelo jogador e que podem ser resolvidas também de forma dedutiva. Para isso, seguiremos as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), focando principalmente nas habilidades do ensino médio:

> (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
> (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. (BRASIL, 2018)

METODOLOGIA

O presente trabalho é proveniente de um seminário interno do grupo PET – Matemática e Estatística – UFCG com orientação da professora Josefa Itailma da Rocha. Inicialmente, foram analisadas as diversas situações presentes no jogo e as possibilidades de solução em cada uma delas. Em seguida, o conteúdo foi ajustado para uma abordagem mais objetiva e focada em trabalhar os tópicos de análise combinatória em turmas de ensino médio.

REFERENCIAL TEÓRICO

Jogo senha

Criado em 1970 pelo israelense Mordechai Meirovitz, o jogo senha tem como objetivo descobrir a senha escolhida pelo seu adversário dentro da quantidade disponível de tentativas. A senha em questão dispõe de 4 pinos coloridos que são escolhidos dentre 6 peças de cores distintas. Para vencer, o desafiado precisa descobrir as 4 cores, e em ordem certa, da senha escolhida.

O jogo não é baseado apenas em sorte, já que após cada tentativa sem êxito do desafiado, este recebe uma resposta codificada em pinos pretos e brancos apresentados pelo desafiador. Cada pino preto representa que uma peça de cor presente na senha está na posição correta, já as brancas representam peças de cores presentes, porém em posições diferentes da predefinida.

A matemática do jogo começa ao fim da primeira tentativa, quando o desafiado analisará seu chute e verá como cada movimento altera a disposição de pinos brancos e pretos, podendo traçar a melhor estratégia para vencer a partida.

Análise combinatória

Quando tratamos de análise combinatória, um dos assuntos mais essenciais é a permutação. “Permutar é sinônimo de trocar. Intuitivamente, nos problemas de contagem, devemos associar a permutação à noção de embaralhar, isto é, trocar objetos de posição” (DANTE, 2016, p. 206).

Ou seja, a permutação representa de quantas formas podemos organizar uma fileira com n coisas. Quando os agrupamentos não apresentam repetições, chamamos de permutações simples e é com essas que iremos trabalhar.

A permutação de n objetos, denotado por P_n, é dada por $n!$, ou seja,

$$P_n = n! = \ n \cdot \ (n-1) \cdot \ (n-2) \cdots \ 2 \cdot \ 1.$$

Exemplo 1: 5 pessoas podem se organizar de 120 maneiras diferentes em uma fila, pois

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ possibilidades.}$$

Um arranjo simples representa o agrupamento ordenado de elementos dentro de um conjunto. Podemos calcular um arranjo de k elementos dentre um total de n através da seguinte fórmula:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Exemplo 2: Podemos formar 840 números de 4 algarismos com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, pois

$$A_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{5040}{6} = 840 \text{ números.}$$

Outro conceito muito importante da análise combinatória que será abordado através do jogo senha é o de combinação simples, sendo um conceito atrelado à escolha de subconjuntos quando não há repetição.

Definição 1: “Dados n elementos distintos, chama-se combinação desses n elementos tomados k a k (com $k \ < \ n$) qualquer subconjunto formado por k elementos distintos, escolhidos entre os n”(IEZZY. *et al*, 2016, p. 244).

A fórmula para a combinação de k elementos dentre n totais é dada por

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \ \cdot k!} \ .$$

Exemplo 3: Ao escolher 2 sabores de sorvete dentre 5 opções possíveis, existem 10 combinações possíveis, pois

$$C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = \frac{120}{12} = 10 \text{ combinações.}$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com base no que foi exposto na seção anterior, vamos apresentar uma proposta de atividade que utilize situações que ocorrem durante uma partida de jogo senha para trabalhar os conceitos de análise combinatória. Nesse momento, cabe ao professor trabalhar tais questionamentos de forma que guie o raciocínio lógico dos alunos, o que gerará um maior engajamento dos estudantes.

É importante explicitar que a exposição teórica do conteúdo deve ocorrer previamente, para que os alunos tenham conhecimento do assunto que servirá como ponto de partida para traçar a melhor estratégia de vitória para o jogo. Apesar de não ser necessário que os alunos provem as fórmulas utilizadas, é interessante que as situações sejam tratadas de forma mais intuitiva.

Apresentação do jogo senha:

Em um primeiro momento, o professor deve apresentar o jogo aos alunos, exibindo suas regras. Ao mostrar o jogo, deve ser atentado que a ordem em que as cores são dispostas interferem nas senhas formadas e questionar se seria apenas sorte que definiria o sucesso em uma partida.

A ordem das cores:

Sem responder diretamente ao questionamento anterior, o professor deve mostrar aos alunos que as possibilidades de formação de uma senha aleatória são muito maiores que o número de tentativas do jogo, que são, em média, dez.

Dessa forma, o professor deve tomar uma senha qualquer formada por 4 peças de cores distintas e perguntar aos alunos quantas senhas diferentes podem ser formadas apenas com aquelas cores. Após algum tempo eles devem relacionar o exemplo à permutação simples de 4 elementos que pode ser calculada da seguinte forma:

$$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ possibilidades.}$$

As senhas possíveis:

Outra observação importante a ser feita é no total de combinações que podem ser realizadas ao gerar uma senha. Para isso, o docente pode levar tal questionamento aos alunos, que por sua vez devem associar tal problema com o conceito de arranjo simples, que quando aplicado à situação, resulta em

$$A_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{720}{2} = 360.$$

Logo, fica explícito que palpites aleatórios e a dependência unicamente da sorte não seriam boas alternativas para vencer o jogo, então restaria utilizar as dicas fornecidas pelas peças brancas e pretas.

Analisando os pinos brancos e pretos:

Uma vez apresentado o contexto do jogo, o próximo passo seria a utilização das dicas dadas pelo desafiante para calcular quantas possibilidades existem dada aquelas situação e quais são elas.

Portanto, o professor deve trabalhar em conjunto com a turma as onze diferentes dicas possíveis simbolizadas pelos pinos brancos e pretos. É recomendado que tal análise tenha início por casos mais simples.

Exemplo 4: Após o primeiro chute, o desafiador apresenta 3 pinos pretos e nenhum branco. Quantas possibilidades de senha existem nessa situação?

Veja que nesse caso, apenas uma das quatro peças está errada, então basta retirá-la e trocar pela peça correta que pode ser qualquer uma das duas que estão fora do chute, logo temos um total de

$$C_{4,1} \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8 \text{ possibilidades.}$$

Exemplo 5: Após o primeiro chute, o desafiador apresenta 2 pinos pretos e 2 pinos brancos. Quantas possibilidades de senha existem nessa situação?

Note que nessa situação, tudo que nos resta é identificar quais as 2 peças dentre as 4 da senha que estão nas posições erradas e então inverter suas posições. Logo, existem apenas

$$C_{4,2} = 6 \text{ possibilidades.}$$

Em sala, demais casos podem ser abordados e situações em jogo podem ser simuladas para que os alunos utilizem tais conhecimentos para obter a vitória em uma partida.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta de atividade pode ser aplicada principalmente em turmas de 2° e 3° ano do ensino médio, quando o assunto é, geralmente, introduzido. É interessante notar a diferença da abordagem dos alunos com o jogo, pois uma vez que confrontados pelos questionamentos levantados em sala de aula, tendem a pensar melhor suas ações e direcionar suas tentativas com base nas possibilidades.

Esperamos que essa proposta, se utilizada, traga uma visão mais chamativa e divertida acerca do conteúdo, podendo assim cativar o aluno, despertando, talvez, um maior interesse pela matemática.

Palavras-chave: Ensino de Matemática, Análise Combinatória, Jogo Senha.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio . Acesso em: 10 Setembro 2022.

DANTE, L.R. **Matemática: contexto & aplicações:** ensino médio, V. 2. 3 ed. São Paulo: Ática, 2016.

IEZZI, G. *et al*. **Matemática: ciência e aplicações:** ensino médio, V. 2. 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

MACHADO, Amanda Aparecida. Rocha; SILVA, Joana Dos Santos; CIABOTTI, Valéria. Elaboração De Jogo De Fixação De Aprendizagem Em Estatística Para O Nono Ano Do Ensino Fundamental. In: **Anais XI Encontro Nacional de Educação Matemática**. XI ENEM. Curitiba, 2013.

MUMBACH, Morgani; WOLKMER, Leandro; PREUSSLER, Roberto. Tangram: Uma Alternativa Para Aprendizagem De Conceitos Geométricos. In: **Anais XI Encontro Nacional de Educação Matemática.XI** ENEM. Curitiba, 2013.

SANTOS, R. C. Explorando análise combinatória no jogo senha. **Revista do Professor de Matemática**, V. 64, 2007. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/64/8.html . Acesso em: 15 julho 2022.