

QUESTÕES DE TRIGONOMETRIA NO ENEM 2021: UMA ANÁLISE SOB A LUZ DOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

Giovana Carpes Malescha¹
Vitória Emilly da Silva Calmon²
Ingrid Rabelo Cruz³
Arthur Gonçalves Reis⁴
Wagner Gomes Barroso Abrantes⁵

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa foi realizada pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática do Instituto Federal do Triângulo Mineiro – IFTM, Campus Paracatu, a partir do projeto de ensino intitulado “Um percurso pelos Três Mundos da Matemática no âmbito da Trigonometria: um grupo de estudos para futuros professores de Matemática”.

O objetivo foi analisar as habilidades necessárias aos participantes do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM 2021 para realizar as questões de Trigonometria, sob a luz do aporte teórico dos Três Mundos da Matemática, Tall (2013), compostos pelos Mundos Corporificado, Simbólico e Formal.

Foram identificadas duas questões que poderiam ser resolvidas utilizando conhecimentos de Trigonometria. Na primeira questão, poderiam ser utilizadas outras ferramentas matemáticas para sua solução. Contudo, o participante que buscasse resolvê-la por meio da Trigonometria, deveria partir da corporificação do triângulo equilátero, com altura dada e ângulos deduzidos, e buscar no simbolismo das relações trigonométricas as ferramentas de operacionalização para chegar ao perímetro do triângulo.

Na segunda questão, o participante deveria partir do mundo simbólico com as funções trigonométricas dadas como fórmulas e corporificá-las por meio do sistema massa-mola e da sua representação gráfica, ambos apresentados no enunciado da questão. Neste caso, a relação

¹ Graduanda do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Triângulo Mineiro – IFTM – Campus Paracatu, giovanamalesc@gmail.com;

² Graduanda do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Triângulo Mineiro – IFTM – Campus Paracatu, vikcalmon@gmail.com;

³ Graduanda do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Triângulo Mineiro – IFTM – Campus Paracatu, ingridrc.rabelo@gmail.com;

⁴ Graduando do Curso de Engenharia Elétrica do Instituto Federal do Triângulo Mineiro – IFTM – Campus Paracatu, artmadara159753@gmail.com;

⁵ Doutor em Educação Matemática e Professor do Instituto Federal do Triângulo Mineiro – IFTM – Campus Paracatu, wagnercn@hotmail.com.



da corporificação como grandeza física e como gráfico possibilita a compreensão da variação da amplitude e do período, contribuindo para a representação simbólica da função.

Em ambas as questões, os participantes deveriam transitar entre os Mundos simbólico e corporificado. Contudo, na primeira questão, parte-se do corporificado para o simbólico, enquanto que na segunda questão, parte-se do simbólico para o corporificado. Além disso, a segunda questão traz duas representações no Mundo Corporificado (como grandeza física e como representação gráfica), o que exige do participante transitar entre elas.

MATERIAIS E MÉTODOS

Conforme mencionado no tópico anterior, esta pesquisa foi realizada a partir de um projeto de ensino com alunos do GEPEM do IFTM - Campus Paracatu e teve duração de aproximadamente quatro meses. Todos os participantes são alunos de cursos superiores da área de ciências exatas, sendo três de Licenciatura em Matemática e um de Engenharia Elétrica.

Nos dois primeiros meses do projeto, buscou-se fazer estudos de artigos científicos que possibilitassem o conhecimento da fundamentação teórica: os Três Mundos da Matemática, de Tall (2013), e sua relação com a Trigonometria no âmbito da educação básica, como abordado por Abrantes e Galvão (2020). O professor orientador disponibilizava artigos quinzenalmente, que eram estudados pelos alunos e, posteriormente, em encontros presenciais, discutidos e aprofundados pelo grupo de estudos.

Nos dois meses subsequentes, foi feito um levantamento das questões que tratavam de Trigonometria no ENEM de 2021 em Brasil (2022). Identificadas duas questões sobre esse tema, foram discutidas possíveis soluções para elas com posterior análise das habilidades necessárias aos participantes para a resolução das mesmas, sob a perspectiva dos Três Mundos da Matemática, de Tall (2013).

OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA E A TRIGONOMETRIA

Os Três Mundos da Matemática se relacionam às experiências acerca do desenvolvimento do conhecimento e construção do conceito matemático em longo prazo. Segundo Tall (2013), a aprendizagem da matemática está associada a três distintos e interligados mundos da matemática: o mundo conceitual corporificado (ou apenas

corporificado), o proceitual simbólico (ou apenas simbólico) e o axiomático formal (ou apenas formal).

O mundo corporificado é aquele dos objetos corporificados, tais como de gráficos, tabelas, construções geométricas e outros que podem ser fisicamente manipulados ou concebidos mentalmente.

O mundo simbólico é aquele que utiliza os símbolos para cálculos e manipulações na álgebra e na aritmética, por exemplo, inter-relacionando processos e conceitos. Esse mundo leva em consideração os proceitos, caracterizado por Tall (2013) como símbolos ou ideias que representam, ao mesmo tempo, um processo e um conceito.

O mundo formal é aquele composto pelos axiomas, teoremas, propriedades, definições que formam o sistema axiomático com o qual se desenvolve a matemática formal.

Para entendermos os três mundos da matemática no âmbito da trigonometria, recorremos a Abrantes e Galvão (2020), que buscam alguns conceitos e propriedades da geometria plana e, nesse sentido, ao se construir um triângulo ABC, retângulo em C, e alterar as medidas de seus catetos (Figura 1), mantendo fixo o ângulo β , obtém-se os triângulos retângulos $AB'C'$ e $AB''C''$ semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo ABC.

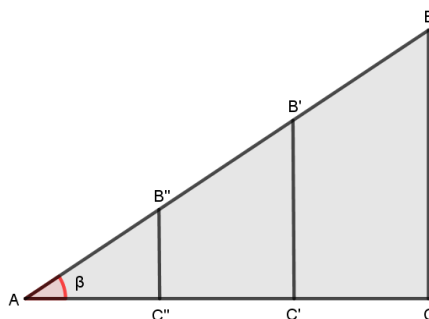


Figura 1 – Semelhanças dos triângulos retângulos

Por serem semelhantes, as razões entre os lados que formam os ângulos retos (catetos) serão sempre iguais, isto é, a razão entre BC e AC é igual à razão entre $B'C'$ e AC' que, por sua vez, é igual à razão entre $B''C''$ e AC'' . Nesse contexto, surge a ideia de se construir tabelas com as razões entre os lados de um triângulo retângulo, para os diversos ângulos agudos β , dando origem às razões trigonométricas (Figura 2).

$$\text{seno de } \beta = \frac{\text{cateto oposto a } \beta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cosseno de } \beta = \frac{\text{cateto adjacente a } \beta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tangente de } \beta = \frac{\text{cateto oposto a } \beta}{\text{cateto adjacente a } \beta}$$

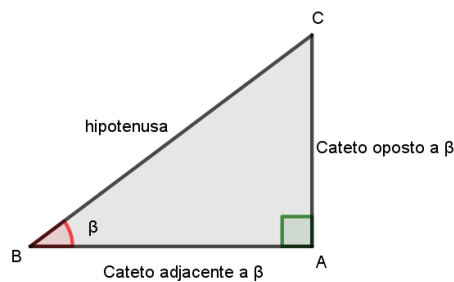


Figura 2 – Razões trigonométricas no triângulo retângulo

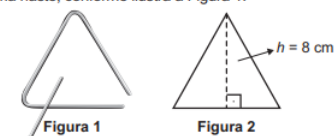
Nesse sentido, Tall (2013) afirma que o percurso nos três mundos da matemática se inicia com a definição de seno, cosseno e tangente como razões dos lados de um triângulo retângulo ABC e, com isso, entendemos que essas definições, baseadas no caminho corporificado-simbólico-formal acima descrito, marcam o início desse percurso a partir do mundo corporificado e dão subsídios para a interação com o mundo simbólico, ao se configurarem, dentro de um pensamento proceitual, como “fórmulas” que viabilizarão as relações com a aritmética e a álgebra.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foram identificadas no ENEM 2021 duas questões que poderiam ser resolvidas utilizando conhecimentos de Trigonometria, sendo que na primeira questão (Figura 3-a) poderiam ser utilizadas diversas ferramentas matemáticas para sua solução.

Questão 146 enem2021

O instrumento de percussão conhecido como triângulo é composto por uma barra fina de aço, dobrada em um formato que se assemelha a um triângulo, com uma abertura e uma haste, conforme ilustra a Figura 1.



Uma empresa de brindes promocionais contrata uma fundição para a produção de miniaturas de instrumentos desse tipo. A fundição produz, inicialmente, peças com o formato de um triângulo equilátero de altura h , conforme ilustra a Figura 2. Após esse processo, cada peça é aquecida, deformando os cantos, e cortada em um dos vértices, dando origem à miniatura. Assuma que não ocorram perdas de material no processo de produção, de forma que o comprimento da barra utilizada seja igual ao perímetro do triângulo equilátero representado na Figura 2.

Considere 1,7 como valor aproximado para $\sqrt{3}$.

Nessas condições, o valor que mais se aproxima da medida do comprimento da barra, em centímetro, é

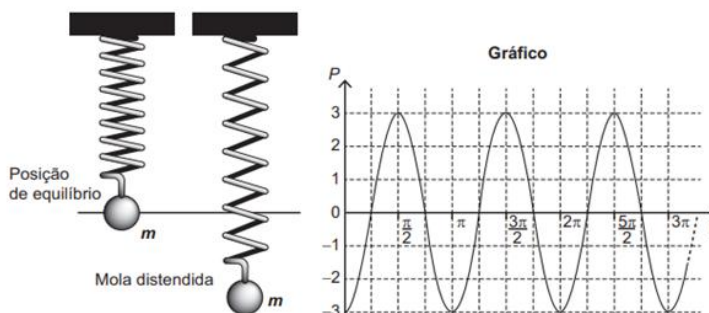
- A 9,07.
- B 13,60.
- C 20,40.
- D 27,18. ←
- E 36,24.

(a)

Questão 161 enem2021

Uma mola é solta da posição distendida conforme a figura. A figura à direita representa o gráfico da posição P (em cm) da massa m em função do tempo t (em segundo) em um sistema de coordenadas cartesianas. Esse movimento periódico é descrito por uma expressão do tipo $P(t) = \pm A \cos(\omega t)$ ou $P(t) = \pm A \sin(\omega t)$, em que $A > 0$ é a amplitude de deslocamento máximo e ω é a frequência, que se relaciona com o período T pela fórmula $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Considere a ausência de quaisquer forças dissipativas.



A expressão algébrica que representa as posições $P(t)$ da massa m , ao longo do tempo, no gráfico, é

- A $-3 \cos(2t)$ ←
- B $-3 \sin(2t)$
- C $3 \cos(2t)$
- D $-6 \cos(2t)$
- E $6 \sin(2t)$

(b)

Figura 3 – Questões de Trigonometria no ENEM 2021. Fonte: Brasil (2022).

Contudo, o participante que buscasse resolvê-la por meio da Trigonometria, deveria partir da corporificação do triângulo equilátero, com altura conhecida, e buscar no simbolismo das relações trigonométricas as ferramentas para chegar ao perímetro do triângulo.

Neste caso, sabendo que os ângulos de um triângulo equilátero são todos iguais a 60° , o participante poderia calcular a medida L do lado triângulo por meio da “fórmula” $\text{sen } 60^\circ = \frac{8}{L} \Rightarrow L = \frac{16\sqrt{3}}{3}$. Logo, o perímetro do triângulo é $16\sqrt{3} \cong 16,1,7 = 27,2$.

Na segunda questão (Figura 3-b), o participante deveria partir do mundo simbólico com as funções trigonométricas e corporificá-las como sistema massa-mola e por meio da sua representação gráfica, ambos apresentados no enunciado da questão. Neste caso, a corporificação permite a compreensão da variação da amplitude e do período, possibilitando a representação simbólica da função.

Neste caso, o aluno parte do simbolismo das funções trigonométricas, mas deve transitar entre as corporificações para identificar os parâmetros desejados e a função a ser utilizada. Como o gráfico da função não passa pela origem do plano cartesiano, a função correta a ser utilizada é a função cosseno. Neste caso, o participante deve interpretar que a amplitude é representada pelo parâmetro A e corporificá-la como a distância entre a posição de repouso e a posição de máxima distensão, isto é, $A = 3$. Além disso, deve-se usar o sinal negativo (-), pois no instante inicial, o corpo está abaixo da posição de repouso, ou seja, o gráfico passa pelo ponto $(0, -3)$ do plano cartesiano.

O gráfico nos mostra também que o período da função é dado por $T = \pi \Rightarrow \omega = 2$. O período pode ser corporificado como o tempo que o corpo leva para sair da posição inicial (de máxima distensão) e voltar à ela. Com isso, a função que melhor representa a posição do corpo é $P(t) = -3\cos(2t)$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em ambas as questões, os participantes deveriam transitar entre os Mundos Simbólico e Corporificado. Contudo, na primeira questão, parte-se do corporificado para o simbólico, enquanto que na segunda questão, ocorre o contrário. Além disso, a segunda questão traz duas representações no Mundo Corporificado, o que exige do participante transitar entre elas. Neste sentido, é possível evidenciar que o aporte teórico escolhido permitiu uma análise detalhada das questões de Trigonometria do ENEM 2021.



Palavras-chave: Três Mundos da Matemática; Trigonometria; Habilidades; ENEM.

AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de externar nossos agradecimentos ao Instituto Federal do Triângulo Mineiro, que incentivou e viabilizou a realização do projeto de ensino intitulado “Um percurso pelos Três Mundos da Matemática no âmbito da Trigonometria: um grupo de estudos para futuros professores de Matemática” e, conseqüentemente, dessa pesquisa por meio de bolsas de incentivo aos projetos de ensino concedidas pelos editais: nº 5/2022/CGEPE-PTU e nº 3/2022/PROEN-REI.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, W.G.B.; GALVÃO, M.E.L. **Um percurso pelos Três Mundos da Matemática a partir de questões de Trigonometria.** In: XIV Encontro Paulista de Educação Matemática, 2020, São Paulo. Anais. São Paulo, SBEM-SP, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. **Avaliações e Exames Educacionais.** Disponível em: < <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais> > Acesso em: 17 ago. 2022.

TALL, D. **How humans learn to think mathematically: exploring the three worlds of mathematics.** Cambridge: Cambridge University Press, 2013.