ARTE DE LADRILHAR: PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE POLÍGONOS REGULARES

Ester Vanderlei Silva Avelino [1]
Ísis Vieira Fernandes [2]
Josefa Itailma da Rocha [3]

RESUMO

O ladrilhamento é uma arte que consiste em preencher um plano, por moldes, sem que haja superposição de figuras ou espaços vazios entre elas. Esse tipo de arte já era contemplado no Egito há mais de 5000 a.C. E ainda hoje é possível encontrar essa técnica de ladrilhamento em vários objetos do dia a dia, como em pisos de cerâmicas e estampas de tecido. Entretanto, o ladrilhamento não é encontrado apenas em criações humanas, mas na natureza, por exemplo em cascos de tartaruga e na casca de abacaxi. Pensando nisso, esse trabalho tem como principal objetivo propor uma contextualização de conteúdos na área de Geometria Plana com o ladrilhamento. Para isso, foi realizada uma sequência didática interligando o assunto de polígonos regulares e suas propriedades com o ladrilhamento no plano. Ademais, sugerimos algumas atividades voltadas ao uso da tecnologia aliada ao ladrilhamento, sendo uma oportunidade para o aprofundamento dos conteúdos sobre polígonos, além de gerar motivação em sala de aula. Esse trabalho foi elaborado a partir de estudos atrelados ao PET Matemática e Estatística - UFCG, procurando promover aulas de matemática mais dinâmicas e interativas. Em síntese, temos que o uso do ladrilhamento em sala de aula diversifica a aprendizagem sobre polígonos regulares.

Palavras-chave: Ladrilhamento no Plano, Geometria Plana, Polígonos Regulares, Matemática, Arte.

INTRODUÇÃO

Dentro do meio estudantil é notório observar uma presente aversão dos alunos à disciplina de Matemática. Muitas vezes, por considerá-la complicada, monótona ou sem graça. Em contrapartida, existem as aulas de Arte, que geralmente tem o apreço dos estudantes, por trazer atividades concretas, manuais, a criatividade e a imaginação. Entretanto, existem várias relações entre essas disciplinas, sendo possível ver a Arte na Matemática e a Matemática na Arte.

[1] Graduanda do Curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Campina Grande - UFCG,ester.vanderlei@estudante.ufcg.edu.br;
[2] Graduanda do Curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, isisvf11@gmail.com:
[3] Professora orientadora: Doutora, Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, itailma@mat.ufcg.edu.br:

A criatividade, beleza, universalidade, simetria, dinamismo, são qualidades que se referem tanto à Arte quanto à Matemática. Além disso, é possível notar que a Matemática tem inspirado e favorecido a Arte. Por exemplo, a perspectiva, proporção e simetria, são fundamentais nas artes plásticas, além da forte presença da geometria no cubismo, entre outros.

Diante disso, esse trabalho tem como objetivo apresentar uma maneira de ensinar um assunto de Geometria utilizando um pouco de Arte, para, dessa forma, trazer uma atividade que deixe a sala de aula um ambiente favorável para realizar descobertas, aliada a criatividade. Além de conectar os conceitos ensinado a situações concretas, com o intuito de tornar mais compreensível e significativo aos alunos. Nesse contexto, foi pensado na arte de ladrilhar como proposta de contextualização de conteúdos na área de Geometria Plana.

O Ladrilhamento é uma arte que consiste em preencher um plano, por moldes, sem que haja superposição de figuras ou espaços vazios entre elas. Conforme Sallum (2016), as mais antigas peças de ladrilhos foram encontradas no Egito, há aproximadamente 5000 a.C. Além de outros povos, como os romanos e mediterrâneos, mouros, árabes e cristãos, que também retratavam as pessoas e a natureza através de figuras geométricas entrelaçadas.

É possível se contemplar a técnica de ladrilhamento ainda nos dias de hoje, como em pisos de cerâmicas e madeira, estampas de tecido, crochês, entre outros. Além disso, o ladrilhamento não é encontrado apenas em criações humanas, mas na natureza, por exemplo em favos de mel, cascos de tartaruga, casca de abacaxi, escamas de peixe etc (Imenes, 2002).

O presente trabalho, além de discutir os conceitos teóricos de polígonos para conseguir um plano ladrilhado, será apresentado uma sequência didática que interliga o assunto de polígonos e suas propriedades com o ladrilhamento no plano, como intuito de auxiliar o aluno a compreender o conteúdo e diversificar a aprendizagem sobre polígonos regulares.

METODOLOGIA

O seguinte trabalho foi elaborado a partir de estudos atrelados ao PET Matemática e Estatística - UFCG sob orientação da professora tutora Itailma da Rocha. Assim, iniciou-se com um estudo bibliográfico abrangente sobre o tema ladrilhamento no plano, principalmente por meio de artigos e dissertações. Posteriormente, trabalhou-se propostas de atividades utilizando tecnologia e ladrilhamento, procurando promover aulas de geometria plana mais dinâmicas e interativas.

REFERENCIAL TEÓRICO

Ladrilhamento do Plano

Para o desenvolvimento desse trabalho sobre a arte do ladrilhamento, baseamo-nos principalmente no artigo de Sérgio Alves e Mário Dalcin (1999).

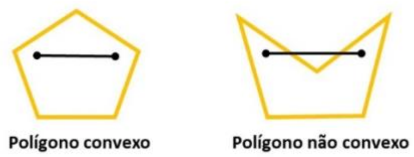
A arte de ladrilhar baseia-se em cobrir uma superfície do plano com regiões poligonais regulares ou irregulares, não havendo lacuna nem superposições entre elas. Essa cobertura pode ser chamada de pavimentação ou mosaico do plano. Entretanto, esse trabalho será restrito ao ladrilhamento com polígonos regulares.

Dessa forma, algumas definições importantes para este trabalho são:

Definição 1. Um *polígono* é uma linha fechada formada apenas por segmentos de reta do mesmo plano que não se cruzam.

Definição 2. Um polígono *convexo* é quando dado quaisquer dois pontos interiores ao polígono, o segmento de reta que os une sempre estará inteiramente contido no polígono.

Figura 1. Polígonos convexo e não convexo



Fonte: https://escolaeducacao.com.br/wp-content/uploads/2020/11/poligonos3.jpg

Definição 3. Um polígono convexo é chamado de polígono *regular* quando tem todos os lados com a mesma medida e também todos os ângulos internos com a mesma medida.

Além disso, nesse trabalho os ladrilhamentos respeitam as seguintes condições: se dois polígonos regulares intersectam-se, então essa interseção é um lado ou um vértice comum e a distribuição dos polígonos regulares ao redor de cada vértice é sempre a mesma (ALVES, 1999).

Ladrilhamento do plano com polígonos regulares congruentes (mosaico regulares)

Para a realização do ladrilhamento é necessário que a soma dos polígonos posicionados lado a lado somem $360°$. Logo, como a medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados é dado pela fórmula:

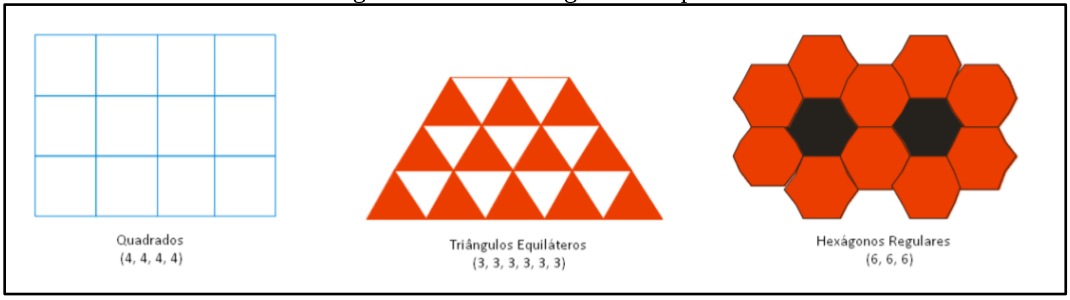
$$\frac{180°(n-2)}{n},$$

e buscamos ladrilhar o plano com polígonos regulares de n lados, então o ângulo interno desse polígono deve ser divisor de $360°$ e, assim, obtemos um $m \geq 1$ tal que

$$180°\left(1-\frac{2}{n}\right)=\frac{360°}{m}\Rightarrow 1-\frac{2}{n}=\frac{2}{m}\Rightarrow 1=2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\Rightarrow\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Portanto, as únicas soluções inteiras e positivas para (1) são: $n=3$ e $m=6$; $n=4$ e $m=4$ e $n=6$ e $m=3$. Ou seja, para ladrilhar o plano com polígonos regulares congruentes é necessário que ao redor de cada vértice seja preenchida ou com 6 triângulos equiláteros ou 4 quadrados ou 3 hexágonos regulares. Na figura abaixo representamos os únicos polígonos regulares congruentes que pavimentam o plano:

Figura 2. Mosaicos regulares do plano



Fonte: Adaptado de Alves (1999).

Ladrilhamento do plano com polígonos regulares não congruentes (mosaico semi-regulares)

Primeiramente, como os polígonos regulares que se intersectam deve respeitar a condição de que essa interseção é um lado ou um vértice em comum, temos que, para ocorrer o ladrilhamento do plano com polígonos regulares, é necessário que todos os polígonos regulares tenham lados de mesma medida. Em sequência, é necessário verificar a combinação de polígonos regulares que cubram a cobertura sem deixar lacunas, ou seja, que a soma dos ângulos ao redor de um vértice em comum resulte em 360°.

Para a verificação desse segundo ponto, considera-se m o número mínimo de polígonos regulares ao redor de um vértice. Sabendo que a quantidade mínima é $m\geq 3$ e a menor medida de ângulo interno é 60°, obtemos que o maior valor de m é $\frac{360}{60}=6$.

Assim, considerando por casos, suponhamos que $m=3$ e sejam n_1, n_2 e n_3 a quantidade de lados dos respectivos polígonos ao redor de um vértice. Logo,

$$(1-\frac{2}{n_1})180+(1-\frac{2}{n_2})180+(1-\frac{2}{n_3})180=360$$

$$\Rightarrow \mathbf{180}\ (1-\frac{2}{n_1}+1-\frac{2}{n_2}+1-\frac{2}{n_3})=\mathbf{360}$$

$$\Rightarrow \mathbf{3-2}(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3})=\mathbf{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}. \quad (2)$$

As soluções inteiras e positivas da equação anterior são expressas pela seguinte tabela e os cálculos podem ser vistos com mais detalhes em Alves (1999) ou Sallum (2016).

Tabela 1. As únicas soluções inteiras e positivas da equação (2) com $n_3 \geq n_2 \geq n_1 \geq 3$

n_1	3	3	3	3	3	4	4	4	5	6
n_2	7	8	9	10	12	5	6	8	5	6
n_3	42	24	18	15	12	20	12	8	10	6

Fonte: Adaptação de Alves, 1999

De forma análoga, obtém-se, respectivamente, as seguintes combinações possíveis para $m = 4, m = 5$ e $m = 6$.

Tabela 2. As únicas soluções inteiras e positivas para $m = 4$, $m = 5$ e $m = 6$

<table>
<tr><th colspan="4">$m = 4$</th><th rowspan="6"></th><th colspan="5">$m = 5$</th><th rowspan="6"></th><th colspan="6">$m = 6$</th></tr>
<tr><th>n_1</th><th>n_2</th><th>n_3</th><th>n_4</th><th>n_1</th><th>n_2</th><th>n_3</th><th>n_4</th><th>n_5</th><th>n_1</th><th>n_2</th><th>n_3</th><th>n_4</th><th>n_5</th><th>n_6</th></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>4</td><td>12</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">6</td><td rowspan="4">6</td><td rowspan="4">6</td><td rowspan="4">6</td><td rowspan="4">6</td><td rowspan="4">6</td><td rowspan="4">6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>4</td><td>6</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">4</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr>
</table>

Fonte: Adaptação de Alves, 1999.

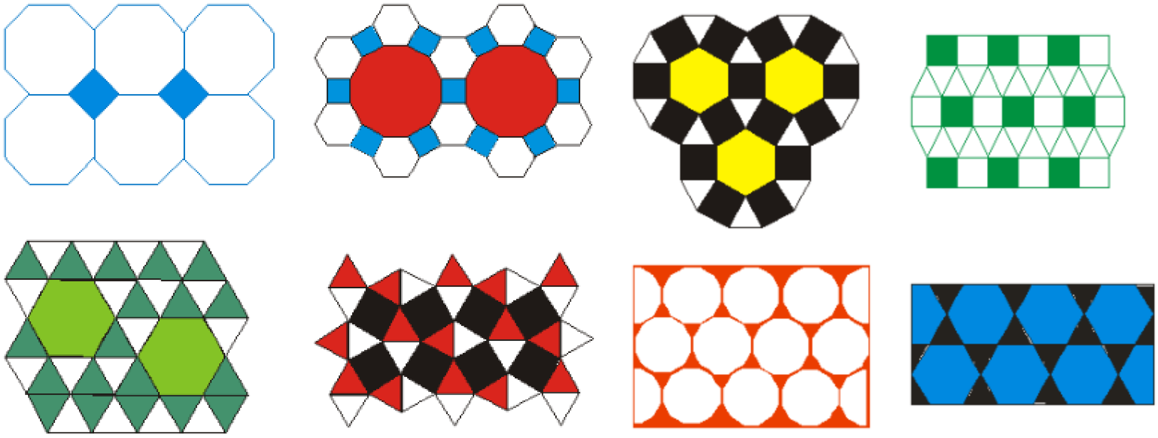
Entretanto, dentre as vinte e uma combinações de polígonos regulares, apenas onze cumprem a condição que a distribuição dos polígonos regulares ao redor de cada vértice deve ser sempre a mesma, ou seja, que a mesma configuração seja repetida em torno do mesmo vértice, sem que haja lacunas sem sobreposições. Por exemplo, as combinações (3,7,42), (3,8,24), (3,9,18) e (3,10,15) não podem formar um mosaico no plano, pois um arranjo com um triângulo equilátero e outros dois polígonos, exige que os outros dois polígonos sejam congruentes.

Portanto, Kepler exibe em 1619, o seguinte resultado sobre ladrilhamentos semi-regulares:

Teorema de Kepler: Existem exatamente onze maneiras de se cobrir o plano utilizando-se exclusivamente polígonos regulares sujeitos às condições:

a) se dois polígonos regulares intersectam-se, então essa interseção é um lado ou um vértice comum;
b) a distribuição dos polígonos regulares ao redor de cada vértice é sempre a mesma.

Figura 3. Mosaicos semi-regulares



Fonte: Adaptado de Alves (1999).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Agora apresentaremos uma sequência didática, baseada no que foi mostrado, para trabalhar polígonos regulares com uma abordagem interdisciplinar através do ladrilhamento do plano. Não será pedido que os alunos provem os casos como anteriormente, mas que estes os verifiquem e identifiquem o porquê de alguns não serem possíveis. Será proposto indagações e questionamentos que poderão ser feitas dentro de sala para auxiliar o raciocínio dos estudantes para atingirem o objetivo desejado.

Para que a sequência didática tenha melhores resultados, recomendamos que o professor tenha exposto o assunto sobre polígonos regulares e não regulares e propriedades, para que os alunos tenham conhecimento das nomenclaturas, quantidade de lados de cada polígono, como calcular os ângulos internos e externos de um polígono regular, entre outras que serão necessárias para a sequência.

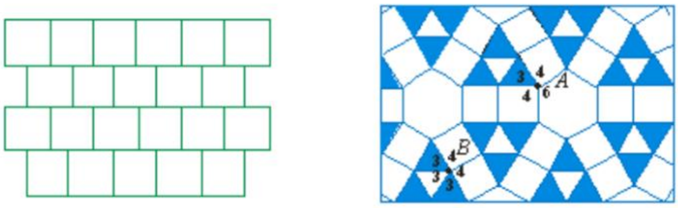
Etapa 1: Ladrilhamento do Plano

O objetivo desta seção é que os próprios alunos cheguem a conclusão do que é um ladrilhamento no plano. Assim, o professor inicia mostrando várias imagens de ladrilhamentos que estão presentes no dia a dia, como por exemplo nas colmeias de abelhas, algumas paredes antigas e entre outros.

Ao mostrar as imagens, indagar aos alunos: "Quais são as figuras geométricas presentes em todas as imagens? Nessa imagem temos que figuras? Vocês conseguem ver um padrão entre as imagens?". A partir das respostas, explicar que as imagens mostradas são exemplos de ladrilhamentos no plano e perguntar, então, como eles definiriam.

Em seguida, o professor deve explicar o que é o ladrilhamento expondo exemplos com polígonos regulares e irregulares. Por fim, explicar quais pavimentações iremos trabalhar, ou seja, as que utilizam polígonos regulares e que respeitam as condições do Teorema Kepler. Assim, não serão trabalhadas mosaicos como:

Figura 4. Ladrilhamento que não serão trabalhados



Fonte: Alves (1999).

Etapa 2: Mosaico Regulares

Nesta etapa o objetivo é levar os alunos a concluírem que para ladrilhar o plano com polígonos regulares congruentes há uma quantidade necessária de polígonos a ser preenchida ao redor de cada vértice. Para chegar a essa conclusão o aluno será guiado através dos questionamentos:

I. Para ladrilhar o plano, qual polígono regular seria mais fácil?

É provável que o aluno consiga identificar nessa etapa o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular, uma vez que são polígonos muito utilizados em mosaicos e vistos no dia a dia.

Figura 5. Modelos de ladrilhamento no cotidiano

Fonte: https://images.app.goo.gl/1k8XAt4zcgsqBcLN9

https://images.app.goo.gl/i5NdHp6YdNdrNeV36

II. Além dos polígonos apontados na etapa I, é possível construir um mosaico regular com outro polígono?

Não. Nessa etapa o aluno deve perceber, ao tentar encontrar outro polígono regular para ladrilhar o plano, que é necessário que a soma dos polígonos posicionados lado a lado somem 360°. E a partir daí notar que o ângulo interno desse polígono deve ser divisor de 360°, sobrando apenas esses três polígonos possíveis para construir um mosaico regular.

III. Ao utilizar o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular para construir o ladrilhamento, existe uma quantidade específica de polígonos ao redor de cada vértice?

Sim. A conclusão dessa pergunta poderá ser alcançada de maneira intuitiva após a segunda etapa. Assim, para ladrilhar o plano com polígonos regulares congruentes é necessário que ao redor de cada vértice seja preenchida ou com 6 triângulos equiláteros ou 4 quadrados ou 3 hexágonos regulares.

Etapa 3: Mosaico Semi-regulares e Teorema Kepler

Agora será trabalhado o ladrilhamento com duas ou mais peças e que respeitem as condições do Teorema de Kepler. Nessa etapa, vamos dividir em dois casos:

1° caso. Ladrilhamento com apenas dois polígonos regulares

O professor vai iniciar propondo um desafio para os estudantes. O docente pode recorrer a um material concreto, feito de papel ou EVA, na qual o aluno terá a possibilidade de manipular e fazer várias tentativas de combinação.

A atividade pode ser feita individualmente ou em grupo. As regras são:

- Deve escolher dois polígonos por tentativa;
- Deve combinar de forma a ladrilhar o plano (não haja espaço e nem superposição);
- A distribuição dos polígonos regulares ao redor de cada vértice é sempre a mesma;
- A interseção de dois polígonos é um lado ou um vértice comum;

Vence a equipe que conseguir montar mais ladrilhamentos diferentes respeitando as regras.

Existem apenas seis possibilidades de ladrilhamento que os alunos podem montar, como é mostrado na Figura 2. Vale destacar que o professor pode aproveitar o desafio para fazer mais explicações sobre a soma dos ângulos internos dos polígonos, o porquê de ser impossível combinar alguns polígonos cumprindo as regras e ao fim ressaltar que existem apenas essas 6 possibilidades.

Figura 6. Exemplo de kit de polígonos regulares

Fonte:<https://www.redalyc.org/journal/2912/291243162027/html/#B23>

2° caso. Ladrilhamento com mais de dois polígonos regulares

No primeiro momento, os alunos não terão acesso aos materiais concretos, visto que o foco será trabalhar a soma dos polígonos lado a lado. Para isso, o professor irá sugerir uma atividade aos estudantes:

Atividade:

1) Temos três polígonos: dodecágono, hexágono e quadrado. Prove que conseguimos pavimentar o plano com essas figuras. Além disso, desenhe uma parte desse ladrilhamento respeitando as condições de Kepler.

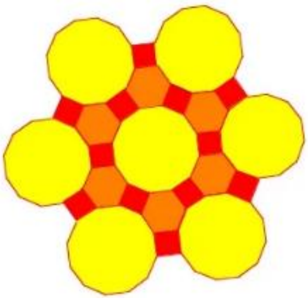
Nessa questão o aluno deve revisar como calcular as medidas dos ângulos internos de um polígono, principalmente para o dodecágono.

Como a medida de ângulo interno do dodecágono, hexágono e quadrado são respectivamente: 150°, 120° e 90°. Ao somar, temos

$$150° + 120° + 90° = 360°.$$

Portanto, como conseguimos pavimentar o plano com um dodecágono, um hexágono e um quadrado em torno de um vértice, provamos o que foi pedido. Na imagem abaixo, o ladrilhamento respeita às condições de Kepler, visto que todos os polígonos possuem a mesma medida de lado e conseguimos "reproduzir" as repetições sem alterar os polígonos ao redor de cada vértice.

Figura 7. Ladrilhamento (4,6,12)



Fonte: Sallum, 2016.

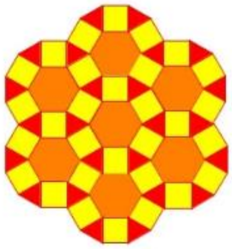
2) Com hexágonos, quadrados e triângulos equiláteros conseguimos pavimentar o plano com essas figuras de forma que respeitem as condições do Teorema de Kepler?

   Sim, é um processo análogo ao item anterior.

3) A partir do que foi feito na questão anterior, quantos hexágonos, quadrados e triângulos estão em cada vértice do ladrilhamento? Desenhe o ladrilhamento.

Na segunda e terceira questão, o aluno será levado a entender que cada polígono terá que possuir a mesma medida de lado, para ter o encaixe perfeito entre os polígonos. Vale destacar que o estudante deverá notar que não será possível montar um pavimento apenas com essas três figuras, mas, precisará de mais um quadrado, pois somando os ângulos de dois quadrados, um hexágono e um triângulo equilátero em torno de um vértice, conseguimos obter 360°.

Figura 8. Ladrilhamento (3,4,6,4)



Fonte: Sallum, 2016.

Após os alunos resolverem a atividade, o professor deve finalizar a aula expondo um pouco sobre a história da matemática, mostrando que muitos matemáticos já estudaram sobre esse assunto. Assim, o docente pode enfatizar que conseguimos "verificar" os onze casos já mostrados por Kepler no ano de 1619.

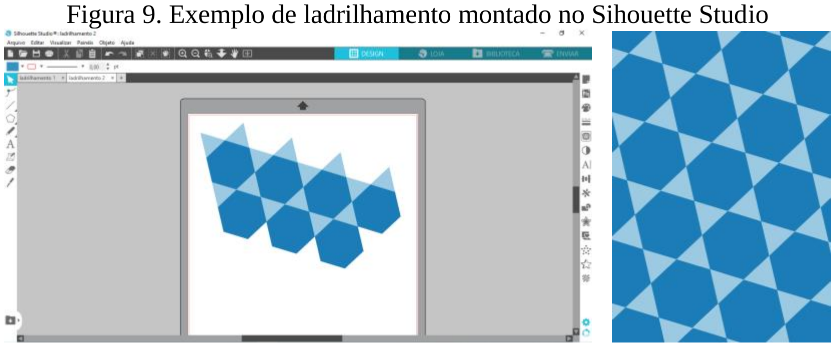
Etapa 4: Software

Nessa última etapa, será apresentada uma aplicação que também pode ser usada como uma maneira do professor avaliar a sua turma, ao perceber como os alunos irão utilizar o que aprendeu através de um software e relacioná-lo com a matemática.

O software escolhido para a aplicação da atividade proposta é o Silhouette Studio, que é um software gratuito usado para edição e criação de arquivos, contando com a presença de muitas ferramentas para auxiliar e projetar.

Atividade Proposta: Utilize o software Silhouette Studio e a sua criatividade para construir um mosaico (ladrilhar todo um plano) usando dois ou mais polígonos regulares.

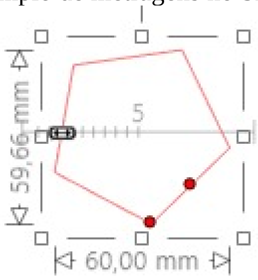
Figura 9. Exemplo de ladrilhamento montado no Sihouette Studio



Fonte: Autoras, 2022.

Dessa forma o aluno deverá utilizar o software para ladrilhar uma folha usando os polígonos regulares. Um ponto interessante na utilização desse software é que algumas figuras não são informadas a medida do lado do polígono e sim a sua diagonal, por isso o aluno precisará se utilizar de outras estratégias, lembrando de assuntos anteriores, para calcular a diagonal que o outro polígono precisará ter.

Figura 10. Exemplo de metragens no Sihouette Studio



Fonte: Autoras, 2022.

Vale destacar que a atividade proposta pode ser implementada no ensino médio, mas com algumas mudanças, visto que os alunos já tiveram contato com o conteúdo no ensino fundamental e terão mais maturidade no uso de softwares. Dessa forma, esta pode ser introduzida para auxiliar no desenvolvimento da seguinte habilidade proposta pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

> (EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados. (BRASIL, 2018)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Frente ao que foi exposto, esperamos que a sequência didática seja uma ótima oportunidade de diversificação da aprendizagem nas aulas de matemática e que motivem e atraiam os alunos para conhecerem mais sobre essa disciplina.

Além disso, para trabalhos futuros, poderá ser abordado o ladrilhamento atrelado à interdisciplinaridade com conteúdos de biologia, por exemplo, ao observar o ladrilhamento nas colmeias, ou abordar a presença de polígonos irregulares nas artes, como muitas obras do artista Escher.

REFERÊNCIAS

ALVES, S; DALCIN, M. Mosaicos do plano, **Revista do Professor de Matemática**, V. 40, 1999. Disponível em: < https://rpm.org.br/cdrpm/40/1.htm>. Acesso em: 21 mai 2022.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Pacto nacional pela alfabetização na idade certa: alfabetização em foco: projetos didáticos e sequências didáticas em diálogo com os diferentes componentes curriculares: ano 03, unidade 06 / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. - MEC, SEB, Brasília, 2012

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio . Acesso em: 28 julho 2022.

OLIVEIRA, M. M. **Metodologia Interativa:** um processo hermenêutico dialético. Revista Educação, Porto Alegre, 2001.

SALLUM, Elvia Mureb. **Ladrilhamento**. São Paulo: USP. 2016. Disponível em: https://www.slideshare.net/WilsonMarques8/ladrilahamento. Acesso em: 08 jun. 2022.

ZABALA, A. **A prática educativa:** como ensinar. ArtMed, Porto Alegre, 1998.