

GEOMETRIA FRACTAL E PENSAMENTO COMPUTACIONAL: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES¹

Roberta Rayane de Farias Santos²
Ana Emília Victor Barbosa Coutinho³

RESUMO

Desenvolver habilidades do Pensamento Computacional na Educação Básica, especificamente na área de Matemática, apresenta-se como um desafio para os professores brasileiros com a recente aprovação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Uma abordagem possível é desenvolver o Pensamento Computacional através de atividades baseadas na resolução de problemas matemáticos. Nesse contexto, pesquisas recentes apontam que habilidades do Pensamento Computacional são estimuladas a partir da adoção de diferentes estratégias para construção de fractais utilizando o software GeoGebra. Nesta perspectiva, apresentamos o relato de experiência de um curso ministrado para formação inicial e continuada de professores de Matemática visando capacitá-los para produção de atividades que associem conteúdos matemáticos para construção de fractais clássicos com apoio do software GeoGebra e que concomitantemente desenvolva competências do Pensamento Computacional. Os resultados indicam que ao trabalhar com fractais o professor pode explorar diversos conteúdos matemáticos como formas, objetos e fenômenos da natureza presentes no dia a dia. Além disso, o apoio do software GeoGebra para construção de fractais possibilita ao professor propor atividades em que os alunos construam o seu conhecimento com e sobre o uso dessa tecnologia, dado que o GeoGebra facilita a visualização, interpretação, raciocínio e comunicação durante o desenvolvimento das atividades, despertando nos estudantes senso de investigação, criatividade e curiosidade, além de estimular habilidades do Pensamento Computacional.

Palavras-chave: Geometria Fractal, Pensamento Computacional, Ensino de Matemática, Formação de professores.

INTRODUÇÃO

Durante séculos muitos matemáticos propuseram objetos com o propósito de representar fenômenos e comportamentos da natureza (NUNES, 2006). Esses objetos colocavam à prova os conceitos matemáticos já consolidados da Geometria Euclidiana, sendo rotulados de “monstros matemáticos”. Somente em 1975, o matemático francês-americano de origem judaico-polonesa Benoît B. Mandelbrot denotou o termo “fractal” (do latim *fractus*, que significa irregular ou quebrado) para referenciar tais objetos (MANDELBROT, 1975). Desde então, um ramo da matemática, designado como Geometria Fractal, têm desenvolvidos vários estudos sobre as propriedades e o comportamento dos fractais em diversas áreas de conhecimento.

No âmbito educacional, por se tratar de uma geometria fundamentalmente intuitiva e dinâmica, a inserção da Geometria Fractal possibilita ao professor relacionar conceitos matemáticos visto em sala de aula com situações do cotidiano dos alunos em diferentes contextos

¹ O presente trabalho foi realizado com apoio do Programa Institucional de Iniciação Científica UEPB/CNPq - Cota 2021-2022;

² Graduanda do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, roberta.santos@aluno.uepb.edu.br;

³ Professora orientadora: doutora, Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, anaemilia@servidor.uepb.edu.br.

(CARVALHO, 2005). Nessa perspectiva, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) inclui explicitamente o estudo dos fractais como uma habilidade a ser desenvolvida no Ensino Médio quando indica a utilização de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e homotéticas para construção de figuras e análise de elementos da natureza e diferentes produções humanas (BRASIL, 2018a, p. 533). No entanto, diversas pesquisas sugerem que vários conteúdos da Matemática podem ser explorados a partir do ensino da Geometria Fractal desde o Ensino Fundamental (FERREIRA; JULIO, 2019).

De acordo com Santos e Coutinho (2021), comumente o estudo de fractais é realizado com o apoio de tecnologias digitais, especialmente com a adoção do software GeoGebra⁴. O GeoGebra é um software educacional de matemática dinâmica que agrega em um único ambiente recursos de geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos que podem ser utilizados em todos os níveis de educação. Para Rabay (2013), o uso de recursos computacionais é essencial para a construção de fractais definidos por sistemas de funções iteradas ou por uma relação de recorrência. Nesse contexto, a utilização do computador fornece meios para que os alunos construam conhecimentos com e sobre o uso das tecnologias digitais (BRASIL, 2018b).

Ademais, Barbosa e Silva (2019) afirmam que habilidades do Pensamento Computacional são estimuladas durante o desenvolvimento de atividades que explorem a Geometria Fractal por meio do software GeoGebra. O Pensamento Computacional vem sendo incorporado no currículo da Educação Básica de vários países desde Wing (2006) recuperou o termo e defendeu-o como uma habilidade analítica que dever ser desenvolvida nas crianças assim como a leitura, a escrita e a aritmética (RAABE; COUTO; BLIKSTEIN, 2020). No Brasil, o pensamento computacional é abordado na BNCC com enfoque transversal, especificamente na área da Matemática, a partir do Ensino Fundamental. O documento cita o Pensamento Computacional como uma competência que “envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos” (BRASIL, 2018a, p. 474), que pode ser trabalhada por meio de processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem matemática.

No entanto, apesar da Geometria Fractal e do Pensamento Computacional fazerem parte das orientações da BNCC para construção de currículos escolares e de propostas pedagógicas em Matemática na Educação Básica brasileira, ainda se faz necessário reflexões e discussões de como promover a adequada formação inicial e continuada dos professores para inserção destes temas em sala de aula.

Diante disso, nosso objetivo é relatar a experiência de um curso realizado com o propósito explorar o desenvolvimento de habilidades do Pensamento Computacional a partir da construção de fractais com apoio do software GeoGebra e, ao mesmo tempo, relacionar esta atividade com outros conteúdos matemáticos.

⁴ <https://www.geogebra.org/>

METODOLOGIA

Com o objetivo de associar e estimular o desenvolvimento de habilidades do Pensamento Computacional e de diferentes conteúdos matemáticos a partir da construção de fractais foi ministrado um curso tendo como público-alvo licenciandos e professores de Matemática da Educação Básica.

O curso foi estruturado em oito encontros semanais com duração de duas horas e trinta minutos cada, totalizando vinte horas. Os encontros ocorreram no laboratório de informática do Centro de Ciências Humanas e Exatas (CCHE) da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), no qual os participantes tinham acesso aos recursos computacionais necessários.

No primeiro encontro, apresentamos os objetivos do curso e uma introdução teórica de conceitos da Geometria Fractal e do Pensamento Computacional que fundamentam nosso estudo. A Geometria Fractal foi definida como uma área da Matemática que estuda figuras mais complexas conhecidas como fractais, que possuem as seguintes propriedades: autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão fractal. No caso do Pensamento Computacional assumimos a definição operacional dada pela *International Society for Technology in Education* (ISTE) e a *Computer Science Teachers Association* (CSTA). Nessa definição, o Pensamento Computacional é um processo de resolução de problemas que pode ser mapeado através do seguinte conjunto de conceitos e capacidades: coleta, análise e representação de dados; decomposição de problemas, abstração, algoritmos e procedimentos, automação, simulação e paralelização (ISTE; CSTA, 2011).

A aula ministrada na segunda semana teve por objetivo apresentar o software GeoGebra, explorando transformações isométricas e homotéticas bem como o uso do recurso de criação de ferramentas. Optamos pela adoção do software GeoGebra como ferramenta de apoio para construção de fractais geométricos por esse software disponibilizar diversos recursos que permitem combinar geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação em um ambiente de visualização 2D e 3D. Além disso, o GeoGebra possibilita ao usuário criar de novas ferramentas o que é bastante útil no desenvolvimento das atividades propostas dado que a construção de fractais é um processo recursivo.

Ao longo dos demais encontros foram sugeridas atividades baseadas nas diretrizes descritas por Barbosa (2019), que visam a construção de fractais clássicos por meio do software GeoGebra. Nestes encontros, inicialmente um breve histórico era apresentado seguido da explanação acerca da definição e das propriedades do fractal para que os participantes obtivessem conhecimento das particularidades necessárias para construção do fractal. Os fractais clássicos estudados e explorados são listados abaixo:

1. **Triângulo de Sierpinski:** publicado pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski trata-se de um fractal de aspecto triangular (Figura 1). Propriedades exploradas: contagem de

triângulos azuis, comprimento do lado de cada triângulo, perímetro de cada triângulo, perímetro total, área de cada triângulo, área total.

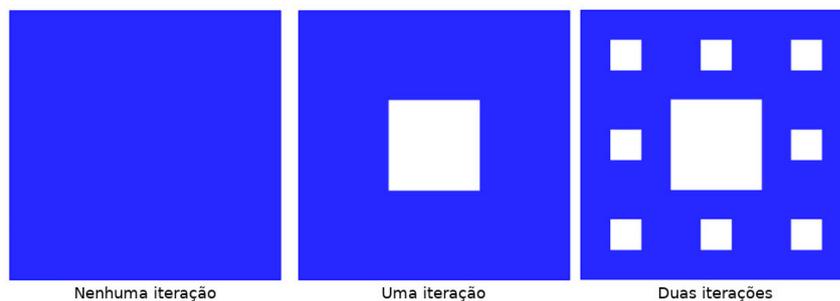
Figura 1 – Duas iterações do Triângulo de Sierpinski.



Fonte: Acervo das autoras.

2. **Tapete de Sierpinski:** fractal obtido pela aplicação da mesma técnica (remoção) utilizada no Triângulo de Sierpinski, partindo de um quadrado (Figura 2). Propriedades exploradas: contagem de quadrados azuis, comprimento do lado de cada quadrado, perímetro de cada quadrado, perímetro total, área de cada quadrado, área total.

Figura 2 – Duas iterações do Tapete de Sierpinski.



Fonte: Acervo das autoras.

3. **Curva de Koch:** criado em 1904 pelo matemático polonês Helge Von Koch (Figura 3). Segundo Barbosa (2005, p. 38) trata-se de uma curva sem tangente, que pode ser modificada com outras construções análogas e deve ter influenciado Mandelbront, pois tem muito de uma linha costeira. Propriedades exploradas: contagem de segmentos azuis, comprimento de cada segmento, comprimento.

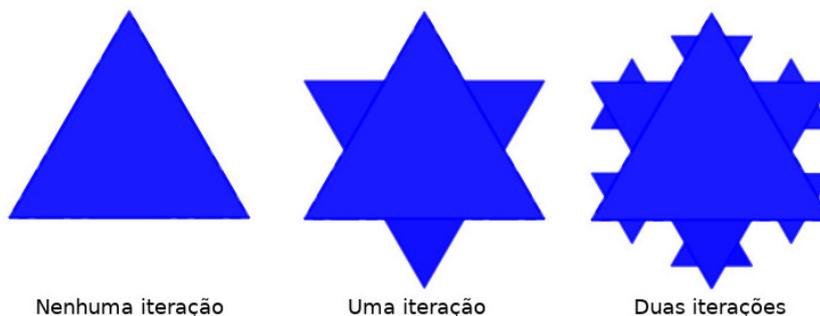
Figura 3 – Duas iterações da Curva de Koch.



Fonte: Acervo das autoras.

4. **Floco de Neve de Koch:** obtido a partir de um triângulo equilátero com construções sucessivas da Curva de Koch sobre cada lado. Propriedades exploradas: perímetro e área.

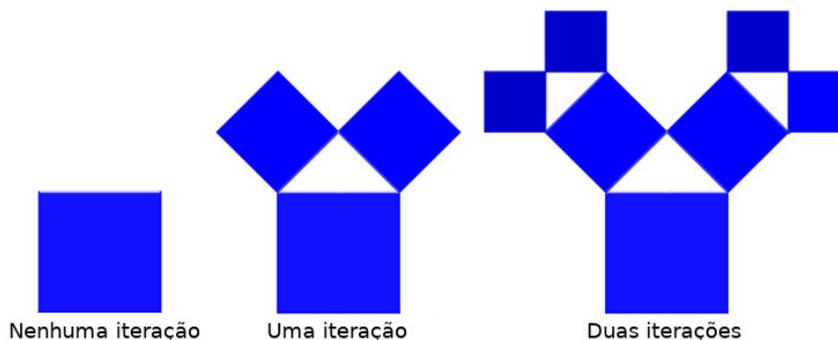
Figura 4 – Duas iterações do Floco de Neve de Koch.



Fonte: Acervo das autoras.

5. **Árvore Pitagórica:** trata-se de uma árvore pitagórica equilátera (Figura 5, que de acordo com Barbosa (2005) gera um mosaico de pavimentação uniforme do tipo 4,3,4,6. Propriedades exploradas: número de quadrados e área.

Figura 5 – Duas iterações da Árvore Pitagórica.



Fonte: Acervo das autoras.

6. **Tetraedro de Sierpinski:** generalização tridimensional, se considerarmos a dimensão euclidiana, do famoso Triângulo de Sierpinski (Figura 6). Propriedades exploradas: quantidade de tetraedros azuis, comprimento do lado de cada tetraedro azul, volume de cada tetraedro azul e volume total.

Figura 6 – Duas iterações do Tetraedro de Sierpinski.



Fonte: Acervo das autoras.

Dos seis fractais explorados, três (Triângulo, Tapete e Tetraedro de Sierpinski) fazem parte do estudo de Barbosa (2019) que identificou o desenvolvimento de habilidades do Pensamento Computacional durante o processo de construção destes fractais no GeoGebra. A escolha dos demais fractais levou em consideração os mesmos aspectos adotados por Barbosa (2019), em que foram selecionados fractais geométricos, uma vez que passível a sua construção através de elementos da Geometria Euclidiana. Esses tipos de fractais são definidos por sistemas de funções iteradas para sua construção usando a propriedade de autossimilaridade. Considerando a classificação dada por Barbosa (2005), os fractais explorados no curso foram dos tipos: fractais pela fronteira (Curva de Koch e Floco de Neve de Koch), fractais por remoção (Triângulo, Tapete e Tetraedro de Sierpinski) e fractais tipo árvore (Árvore Pitagórica).

Durante o desenvolvimento das atividades, semelhante aos procedimentos empregados por Barbosa e Silva (2019), os participantes tinham autonomia para utilizar quaisquer um dos recursos do software GeoGebra. Ao final da construção de cada um dos fractais, inspirados nas perguntas de Barbosa e Silva (2019) questionamos os participantes acerca de quais conceitos matemáticos são importantes para a construção daquele fractal.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O curso foi ofertado entre os meses de maio e julho de 2022, contando com a participação de três licenciandos em Matemática do CCHE da UEPB e um professor da Educação Básica que atua na rede pública da cidade de Monteiro/PB.

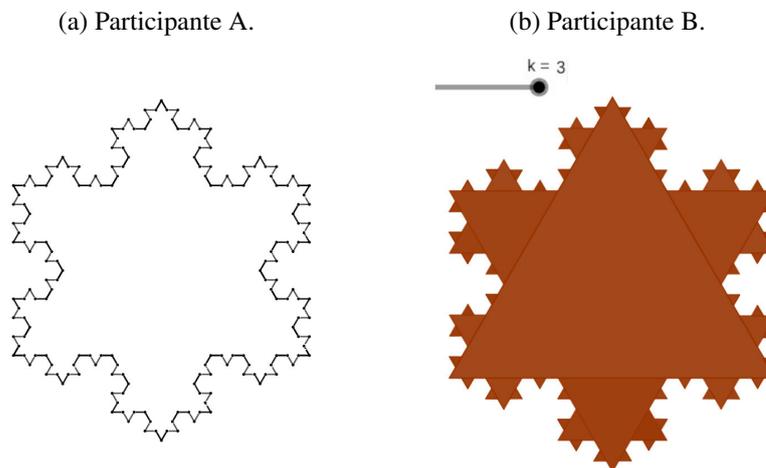
Destacamos que apesar dos participantes do curso já conhecerem e manipularem o software GeoGebra, nenhum deles havia utilizado os recursos de criação de ferramentas, assim como também das ferramentas de transformações isométricas e homotéticas.

O desenvolvimento das atividades teve como foco a investigação, a discussão de hipóteses e a argumentação, visto que os participantes comumente não alcançavam uma solução imediata, o que exigia deles a exploração de outras maneiras de resolução. Em todas as atividades os participantes eram instruídos a construir o fractal com o máximo de iterações possíveis. O fator variante diz respeito as características de cada fractal, nos quais os cinco primeiros foram construídos a partir da janela de visualização 2D e somente o Tetraedro de Sierpinski requer o uso da janela de visualização 3D.

Avaliando as construções dos fractais propostos pelos participantes, observamos soluções distintas e com diferentes níveis de graus de conhecimento e complexidade com relação ao uso do software GeoGebra para um mesmo tipo de fractal. Para exemplificar essa situação vamos utilizar como duas construções do fractal “floco de neve de Koch”, também conhecido como “ilha de Koch”, conforme ilustrado na Figura 7. Ambas soluções fazem uso do recurso de criação de ferramentas em que o fractal é representado com até três iterações. No entanto, a construção da Figura 7b apresenta uma interação dinâmica a partir do uso do controle deslizante associado

com a programação do campo de entrada “Condição para Exibir Objetos(s)” da seção “Avançado” nas propriedades de alguns dos objetos criados, o que permite ao usuário representar o fractal com iterações variando entre 0 e 3.

Figura 7 – Construções do fractal floco de neve de Koch.



Fonte: Acervo das autoras.

Com relação ao questionamento sobre os conceitos matemáticos necessários para construção dos fractais destacamos os participantes destacaram uma série de conteúdos matemáticos importantes para o entendimento das características de cada fractal e sua construção, tais como: perímetro, área, volume, posição relativa entre retas, polígonos, círculo, semi círculo, ângulos, simetria, congruência e semelhança, reflexão, homotetia, teorema de Pitágoras, progressões, entre outros.

Quanto as habilidades do Pensamento Computacional, observamos que estas são requeridas independentemente dos processos utilizados pelos alunos para construção dos fractais propostos adotando o software GeoGebra como apontado por Barbosa (2019).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desenvolver o Pensamento Computacional com atividades matemáticas apresenta-se como uma das possíveis alternativas para atender as recomendações da BNCC. Nesse contexto, Barbosa (2019) sugere que o processo de construção de fractais por meio do software GeoGebra promove o estímulo a várias habilidades do Pensamento Computacional.

O estudo da Geometria Fractal fornece ao professor várias possibilidades de explorar diferentes conteúdos matemáticos na Educação Básica. Além disso, a utilização de recursos computacionais para construção de fractais permite ao aluno experimentar e testar hipóteses, favorecendo e potencializando a construção do conhecimento.

Apesar da Geometria Fractal e do Pensamento Computacional fazerem parte das recomendações da BNCC, Santos e Coutinho (2021) e Ferreira, Coutinho e Coutinho (2020), respectivamente, argumentam sobre a carência de trabalhos voltados para à formação inicial e continuada de professores em ambas as temáticas. Dessa forma, neste trabalho relatamos uma experiência de proposta de formação de professores para introduzir a Geometria Fractal a partir da construção de fractais clássicos no software GeoGebra possibilitando o desenvolvimento do Pensamento Computacional e associando com diversos outros conteúdos matemáticos.

Os resultados indicam a Geometria Fractal permite explorar a aplicação de diversos conteúdos matemáticos de forma prática e atrativa, além de que, o uso do software GeoGebra auxilia os alunos na visualização, interpretação, raciocínio e comunicação durante a construção dos fractais propostos. Ademais, todo processo adotado para a construção dos fractais favorece o desenvolvimento de habilidades do Pensamento Computacional, instigando a investigação, criatividade e curiosidade dos estudantes, corroborando com os resultados obtidos por Barbosa (2019).

REFERÊNCIAS

BARBOSA, L. M. **Aspectos do Pensamento Computacional na Construção de Fractais com o software GeoGebra**. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2019.

BARBOSA, L. M.; SILVA, R. S. R. Sobre pensamento computacional na construção de um Triângulo de Sierpinski com o GeoGebra. **Pesquisa e Debate em Educação**, v. 9, n. 1, p. 537–559, 2019.

BARBOSA, R. M. **Descobrimos a Geometria Fractal: para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica, 2018. <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 06 ago. 2022.

BRASIL. **Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação no contexto escolar: possibilidades**. Brasília: Ministério da Educação (MEC), 2018. <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/praticas/caderno-de-praticas/aprofundamentos/193-tecnologias-digitais-da-informacao-e-comunicacao-no-contexto-escolar-possibilidades>>. Acesso em: 06 ago. 2022.

CARVALHO, H. C. **Geometria Fractal: Perspectivas e Possibilidades para o Ensino de Matemática**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

FERREIRA, J. C.; JULIO, R. S. Construindo seu fractal: experiências a partir de oficinas. In: **XIII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)**. Cuiabá: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM, 2019. Acesso em: 06 ago. 2022.



FERREIRA, M. A.; COUTINHO, A. E. V. B.; COUTINHO, B. G. Pensamento Computacional e o Ensino de Matemática no Brasil: Um Mapeamento Sistemático. **Revista Novas Tecnologias na Educação - RENOTE**, v. 18, n. 2, 2020.

ISTE; CSTA. **Computational thinking: leadership toolkit**. 2011. Disponível em: <<https://csteachers.org/documents/en-us/4f93dab1-1086-40fa-8b7c-6f604b4909f4/1/>>. Acesso em: 08 ago. 2022.

MANDELBROT, B. B. **The Fractal Geometry of Nature**. Nova Iorque: W.H. Freeman and Company, 1975.

NUNES, R. S. R. **Geometria Fractal e Aplicações**. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2006.

RAABE, A.; COUTO, N. E. R.; BLIKSTEIN, P. Diferentes abordagens para a Computação na Educação Básica. In: RAABE, A.; ZORZO, A. F.; BLIKSTEIN, P. (Ed.). **Computação na Educação Básica: Fundamentos e Experiências**. Porto Alegre: Penso Editora, 2020, (Tecnologia e inovação na educação brasileira). cap. 1, p. 3–15.

RABAY, Y. S. F. **Estudo e Aplicações da Geometria Fractal**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

SANTOS, R. R. F.; COUTINHO, A. E. V. B. Geometria Fractal no Ensino de Matemática: Um Mapeamento Sistemático. In: **VII CONEDU – Conedu em Casa**. Campina Grande: Realize Editora, 2021. Acesso em: 06 ago. 2022.

WING, J. M. Computational Thinking. **Communications of the ACM**, ACM, New York, v. 49, n. 3, p. 33–35, mar 2006. ISSN 0001-0782.