COMO PRENDER POMBOS: O QUE A ANÁLISE COMBINATÓRIA DIZ SOBRE O CÁRCERE DE ANIMAIS?

Celine Ingrid Gomes dos Santos [1]
Laryssa Kely Alves Rodrigues [2]
José Lindomberg Possiano Barreiro [3]

INTRODUÇÃO

Não é apenas no desenho animado "Esquadrilha Abutre" que o pombo é um dos personagens principais. Na Matemática, o Princípio da Casa dos Pombos, também conhecido como Princípio das Gavetas de Dirichlet – matemático alemão que o utilizou pela primeira vez – é um mecanismo bastante conhecido, utilizado para resolver problemas de diversas áreas dessa ciência, sobretudo, da Análise Combinatória.

Neste trabalho, enunciamos o Princípio da Casa dos Pombos sob diferentes formas e, junto a elas, suas respectivas demonstrações. Além disso, apresentamos alguns problemas matemáticos que podem ser resolvidos de maneira simples, com o auxílio da aplicação do Princípio.

METODOLOGIA

O presente trabalho é fruto de uma orientação desenvolvida por meio do Programa de Educação Tutorial (PET) – Matemática e Estatística, da Universidade Federal de Campina Grande.

A priori, este trabalho fora desenvolvido com o propósito de compreender a funcionalidade do Princípio da Casa dos Pombos e sua aplicação a problemas da Matemática. Para tanto, utilizamos a pesquisa bibliográfica, em Artigos Científicos dispostos em anais de congressos e três Dissertações de Mestrado em Matemática em Rede Nacional, para a

[1] Graduanda do Curso de Matemática da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, e bolsista do PET – Matemática e Estatística – celineingridgomess@hotmail.com;
[2] Graduanda do Curso de Matemática da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, e bolsista do PET – Matemática e Estatística – lkellyalves@hotmail.com;
[3]Professor orientador: Doutor, Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, e tutor do PET – Matemática e Estatística – lindomberg@mat.ufcg.edu.br.

construção deste trabalho e estudo do tema. Por meio dessa análise circunstanciada, construímos, então, a base para a elaboração deste trabalho.

REFERENCIAL TEÓRICO

O Princípio da Casa dos Pombos "é também conhecido como teorema de Dirichlet ou princípio das gavetas de Dirichlet, pois supõe-se que o primeiro relato deste princípio foi feito por Dirichlet em 1834, com o nome de Schubfachprinzip ("princípio das gavetas")" (AGUIAR, 2013, p. 21).

Esse Princípio, segundo Martinez et al (2010, p. 10), consiste em: "se colocamos $n+1$ objetos em n gavetas então haverá ao menos uma gaveta com mais de um objeto". Sob esse viés, nos cabe refletir: de que maneira um argumento tão simples e de fácil aceitação pode ser utilizado na resolução de problemas matemáticos?

Fundamentados na motivação apresentada anteriormente, apresentaremos, a posteriori, alguns exemplos didáticos de como podemos aplicar tal Princípio a problemas que envolvam conjuntos e/ou Análise Combinatória.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

$\boldsymbol{Teorema\ 1\ (Princípio\ da\ Casa\ dos\ Pombos)}$: Se distribuirmos $n+1$ pombos em n casas, então pelo menos uma casa possuirá mais de um pombo.

$\boldsymbol{Demonstração}$: Vamos demonstrar o resultado utilizando indução matemática sobre n.

Caso base: Para $n=1$, temos $1+1=2$ pombos para serem acomodados em 1 casa. Logo, essa casa possuirá mais de um pombo.

Hipótese de indução: Suponha que o resultado valha para n casas. Então, provaremos que, para o caso $n+1$ casas também valerá.

Considere o caso em que temos $n+1$ casas e $(n+1)+1=n+2$ pombos. Logo, ao escolhermos uma casa ao acaso, se nela existirem mais de um pombo, fim da demonstração. Caso não haja pombos nessa casa, nas $(n+1)-1=n$ casas que restam, estão dispostos $n+2$ pombos, o que, pela hipótese de indução, implica que pelo menos uma das casas possui mais de um pombo. Por fim, se a casa selecionada possuir apenas 1 pombo, então nas demais $(n+1)-1=n$ casas existirão $(n+2)-1=n+1$ pombos, que é a nossa hipótese de indução. $\blacksquare$

$\boldsymbol{Teorema\ 2}$ ($\boldsymbol{Princípio\ da\ Casa\ dos\ Pombos - generalização}$): Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ a quantidade de pombos e casas, respectivamente, e suponha que $m > n$. Então, ao fazer a distribuição de pombos por casas, pelo menos uma casa possuirá mais de um pombo.

$\boldsymbol{Demonstração}$: Suponha, por absurdo, que todas as casas possuam, no máximo, 1 pombo. Então as n casas possuirão, no máximo, $n \cdot 1 = n$ pombos. No entanto, chegamos a um absurdo, pois $m > n$. ■

Podemos traduzir as afirmações anteriores para a linguagem matemática da seguinte forma: Sejam A e B conjuntos. Se a cardinalidade de A é maior do que a cardinalidade de B, então não existe uma função injetora de A em B.

A título de curiosidade, como fora mencionado, na introdução deste trabalho, o desenho animado "Esquadrilha Abutre", cabe destacar que o Princípio da Casa dos Pombos nos garante que em "Corrida Maluca" – desenho semelhante – pelo menos um dos 11 carros que participavam da competição não estaria no pódio de vencedores.

Cabe reconhecer, no entanto, que o Princípio da Casa dos Pombos é eficaz na resolução de problemas complexos, presentes por exemplo, em Olimpíadas de Matemática. Entretanto, vale destacar que, também pode ser visto em situações cotidianas. Para isso, basta que o indivíduo que está diante da situação saiba quem vai fazer o papel da casa e quem vai ser o elemento pombo.

Consoante a isso, vejamos um exemplo:

João mora no sítio e ajuda seu pai com a plantação de macieiras. Em seu terreno, há 10 árvores. Seu pai, Hamilton, sabe que não há árvores com mais que 8 frutos. Um certo dia, para testar os conhecimentos de seu filho, Hamilton pede que João mostre que no pomar há árvores com a mesma quantidade de frutos.

Dessa forma, João decidiu usar o Princípio da casa dos Pombos, considerando como casa o número de frutos e como pombos o número de árvores. Sendo assim, como o número de pombos (árvores) é maior que o número de casas (frutos), João concluiu que 2 pombos (árvores) deverão ocupar a mesma casa (frutos).

Por conseguinte, observe a seguir o seguinte problema abordado na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, na primeira fase do nível 3, ano de 2017:

Uma caixa contém 10 bolas verdes, 10 bolas amarelas, 10 bolas azuis e 10 bolas vermelhas. Joãozinho quer retirar uma certa quantidade de bolas dessa caixa, sem olhar, para ter a certeza de que, entre elas, haja um grupo de 7 bolas com 3 cores diferentes, sendo três bolas de uma cor, duas bolas de uma segunda cor e duas bolas de uma terceira. Qual é o número mínimo de bolas que Joãozinho deve retirar da caixa?

Com isso, observe a resolução utilizando o Princípio da Casa dos Pombos comentada por Zilio (2019, p. 63):

> Joãozinho quer retirar um grupo de 7 bolas com as especificações do enunciado, então:
>
> Para termos certeza que haverá duas cores nas bolas retiradas, devemos retirar pelo menos 11 bolas (10 que poderiam ser de uma única cor e mais outra que será de uma segunda cor, imaginando a pior das hipóteses).
>
> Para termos certeza que teremos três cores, devem ser retiradas 21 bolas (tendo a mesma ideia).
>
> Nesta linha de pensamento, teríamos três bolas de uma cor, duas de uma segunda cor e uma bola com a terceira cor. Se retirar uma bola a mais, esta poderia ser da quarta cor. E se retirar mais uma bola esta será da terceira cor ou da quarta. Assim, tendo três bolas de uma cor, duas de uma segunda cor e duas de uma terceira cor.
>
> Ao total, Joãozinho deverá retirar 23 bolas para poder garantir a situação que ele quer.

Um outro exemplo pode ser observado na área da saúde, ligado aos experimentos feitos em laboratórios, que é citado por Zilio (2019, p. 62), observe:

> Em um experimento, os cientistas querem encontrar duas pessoas com o mesmo agrupamento de sangue ABO. Para economizar tempo, as amostras de sangue serão coletadas e processadas simultaneamente. Qual é o menor número de amostras que deve ser coletado?
>
> Solução. Sabe-se que existem 4 tipos de sangue no grupo sanguíneo ABO, ou seja, A, B, AB e O. Se os tratarmos como 4 compartimentos, e considerarmos os pacientes como pombos (para serem colocados nos espaços). Para garantir que há pelo menos dois pombos em um mesmo espaço, os cientistas devem coletar pelo menos 5 amostras.

Por fim, observe, no seguinte exemplo, como o Princípio da Casa dos Pombos pode ser aplicado a questões que envolvam injetividade de funções:

Seja $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m > 1$ e $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ uma função definida por $f(x) = \bar{x}$, para todo $x \in \mathbb{Z}$. Ou seja, f associa cada elemento do domínio ao seu resto na divisão euclidiana por m. Note que $\mathbb{Z}$ possui cardinalidade infinita e $\mathbb{Z}_m$, por sua vez, possui cardinalidade m. Pelo princípio da casa dos pombos, f não é injetora.

Perceba que, por exemplo, $0, m \in \mathbb{Z}$ e $f(0) = f(m) = \bar{0}$, uma vez que ambos os elementos possuem o mesmo resto na divisão por m.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do exposto, torna-se evidente o fato de que o Princípio da Casa dos Pombos é encontrado em diversas situações. É notório que sua aplicabilidade facilita a resolução de problemas que, inicialmente, parecem complicados de resolver. Vale ressaltar também que, consegue-se também aplicar o Princípio até mesmo em circunstâncias cotidianas.

Além disso, sabe-se que o Princípio é pouco abordado em sala de aula. Entretanto, acreditamos que essa ferramenta facilita a resolução de inúmeros problemas de Análise Combinatória, e também de outros ramos da Matemática, com a Teoria dos Números.

Dessa forma, esperamos que esse trabalho sirva como motivação para os professores inserirem em suas sequências didáticas, o conteúdo mencionado, como forma de catalisador. Sendo assim, aperfeiçoando o ensino e aprendizagem da Matemática em sala de aula.

Palavras-chave: Princípio da Casa dos Pombos; Conjuntos, Análise Combinatória, Matemática.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, T. **Princípio Da Casa Dos Pombos: uma abordagem diferenciada com objetos de aprendizagem.** Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Departamento de Matemática, da Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, p. 57. 2013.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA**. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas OBMEP,** 2017. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 05 de abril de 2021.

MARTINEZ, F. E. B. et al. **Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**. Projeto Euclides, IMPA, 2010.

ZILIO, A. **Resolução de problemas olímpicos através da Combinatória e o Princípio da Casa dos Pombos.** 2019. 95 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Florianópolis. Florianópolis, 2019.

ZONTA, C.A. **O princípio da Casa dos Pombos aplicado ao ensino de Matemática com a metodologia ativa de aula invertida.** 2019. 66 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas. Três Lagoas, 2019.