

## **CURSO MOOC NO ENSINO DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS: UMA EXPERIÊNCIA ABORDANDO AS SEQUÊNCIAS DE FIBONACCI, LUCAS E PELL**

Paulo Henrique Joca de Sá Barreto <sup>1</sup>

Glauber Marcio Silveira Pereira <sup>2</sup>

Erica Boizan Batista <sup>3</sup>

### **INTRODUÇÃO**

Com a ampla utilização das tecnologias digitais da informação e comunicação – TDICs, dos ambientes virtuais de aprendizagem e mais recentemente, no contexto da Educação Aberta, novas possibilidades podem ser agregadas à sala de aula tradicional possibilitando novas formas de interação entre professor, aluno e conteúdo.

Os Massive Open Online Courses – MOOCs são cursos online, que pode utilizar diferentes plataformas, aberto e massivo (MATTAR, 2013). Por ser oferecido de forma gratuita, a maioria sem pré-requisitos para participação, e com os mais diferenciados conteúdos, os MOOCs possuem um grande número de inscritos, por isso, denominado “massivo”, apesar de não haver uma definição de números para considerar um curso como massivo. Considerando o aumento crescente desses cursos online e a integração das tecnologias no cotidiano escolar, surgiu o interesse em produzir um curso nesses moldes voltado para o ensino de matemática, pois como afirmam Andrade e Silveira (2016), a literatura sobre os cursos abertos ainda é escassa.

A escolha do tema do curso MOOC, sequências numéricas, levou em consideração que as tarefas que envolvem a exploração de padrões proporcionam um maior envolvimento dos alunos na atividade matemática, promovendo a utilização de um raciocínio organizado, baseado na formulação e teste de conjecturas, na generalização e na argumentação, o que pode contribuir para que melhorem a

---

<sup>1</sup> Mestre pelo curso PROFMAT da Universidade Federal do Cariri- UFCA, [paulo8barreto@gmail.com](mailto:paulo8barreto@gmail.com);

<sup>2</sup> Doutor em Estatística pelo programa conjunto da Universidade Federal de São Carlos e da Universidade Estadual de São Paulo- UFSCAR e USP, [glaubersp@gmail.com](mailto:glaubersp@gmail.com);

<sup>3</sup> Doutora em Matemática pela Universidade Estadual Paulista- UNESP, [erica.batista@ufca.edu.br](mailto:erica.batista@ufca.edu.br);

capacidade de resolver situações problemáticas. Neste curso buscamos incentivar os estudantes a procurar e analisar padrões através do estudo de sequências. Em particular, abordamos três sequências lineares de segunda ordem, as sequências de Fibonacci, Lucas e Pell, para as quais mostramos algumas propriedades, com destaque para as que apresentavam similaridades entre pelo menos duas delas.

O objetivo geral deste trabalho é descrever o curso MOOC que foi desenvolvido para promover o estudo dos modelos de generalização da sequência de Fibonacci, Lucas e Pell de forma a promover a identificação, descrição e exploração de suas propriedades.

## **METODOLOGIA**

Este trabalho trata da elaboração de um curso MOOC (Curso Online Aberto e Massivo) para o ensino de sequências numéricas pautado na proposta denominada *microlearning* e na aprendizagem autodirigida (*self-directed learning*). Trata-se de um método de EaD que proporciona aprendizagem de conteúdo específico através de processos concisos. Este tipo de abordagem geralmente apresenta cursos com seleção de conteúdos delimitados e atividades que demandam menos tempo do aluno.

A vantagem dessa metodologia é possibilitar maior retenção de informações, pela sua disposição em unidades menores de conhecimento, e ainda possibilita a personalização da aprendizagem, uma vez que o aluno pode escolher apenas os conteúdos que lhe interessam. Além disso, escolhemos trabalhar também com a Metodologia de Resolução de Problemas, que serviu para direcionar as atividades matemáticas abordadas durante o curso, pois acreditamos que essa metodologia possibilita um pensar lógico, investigativo e crítico.

O curso “Sequências de Fibonacci, Lucas e Pell” originou-se como produto de um trabalho do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática no PROFMAT-UFCA (BARRETO, 2019). O curso foi organizado de forma a contar com uma dedicação de oito horas dos cursistas e o seu conteúdo foi organizado em 4 unidades, descritas a seguir:

- Unidade 1 – Conceitos Preliminares: 1. Indução Finita. 2. Definição de Sequência Numérica. 3. Recorrência Linear.

- Unidade 2 – Sequência de Fibonacci: 1. Histórico. 2. Definição da Sequência de Fibonacci. 3. Teorema de Binet. 4. Identidade de Cassini.
- Unidade 3 – Sequências de Lucas e Pell: 1. François Edouard Anatole Lucas. 2. Matriz de Lucas. 3. Identidade de Cassini para Ln. 4. John Pell. 5. Teorema de Binet para Pn.
- Unidade 4 – Problemas envolvendo as Sequências de Fibonacci, Lucas e Pell.

O curso é oferecido de forma online e gratuita no Portal de Cursos Abertos (PoCA) da Universidade Federal de São Carlos de forma contínua e sem acompanhamento de um tutor.

O presente trabalho faz uso da metodologia de estudo de caso, uma vez que busca descrever uma situação particular e delimitada temporalmente (LÜDKE; ANDRÉ, 2013), com base em dados quantitativos e qualitativos, levantados mediante dois procedimentos: aplicação de questionário aos participantes do curso e seleção de posts/comentários publicados no fórum do curso.

Através desses dados esperamos poder construir o perfil do alunado do MOOC “Sequências de Fibonacci, Lucas e Pell”, aqui apresentado, e verificar qual o é o impacto causado por essa metodologia no processo de ensino e aprendizagem de seus alunos.

## REFERENCIAL TEÓRICO

É comum ouvir que a matemática é uma ciência que procura compreender cada tipo de padrão, aqueles que ocorrem na natureza, os que são inventados pela mente humana, e até mesmo aqueles que são criados por outros padrões. Podemos dizer que os padrões fazem parte da essência da matemática, sendo a matemática a ciência que analisa e sintetiza tais padrões.

Por outro lado, de acordo com Polya (2006), procurar um padrão também constitui uma estratégia poderosa de resolução de problemas, e a busca da expressão da generalidade constitui também em si uma atividade de resolução de problemas. Sendo assim, as tarefas que envolvem a exploração de padrões, como o estudo de sequências numéricas, promovem a utilização de um raciocínio organizado, baseado na formulação e teste de conjecturas, na generalização e na argumentação, o que pode contribuir para que melhorem a capacidade do estudante de resolver situações problemáticas.

Uma das sequências mais conhecidas e estudadas atualmente é a sequência de Fibonacci. Dentre os problemas envolvendo essa famosa sequência, destaca-se o conhecido problema dos coelhos. A transcrição original do problema pode ser encontrada em (HEFEZ, 2014), porém vamos sintetizá-lo a seguir:

Qual o número casais de coelhos que podem ser gerados a partir de um casal inicial, incluindo esse, ao final de 12 meses, tais que:

1. Cada casal de coelhos recém-nascidos, demora um mês para se tornar adulto;
2. Dois meses após seu nascimento, e mensalmente, um casal de coelhos adultos gera, no início de cada mês, um novo casal de coelhos.
3. Não há mortes de coelhos.

Primeiramente fixamos como mês um o início do processo. Note que no início do primeiro mês temos um único casal jovem. Já no segundo mês, esse casal será adulto. Como um casal adulto produz um novo casal de coelhos a cada mês, no início do terceiro mês existirão dois casais de coelhos, sendo um casal adulto e outro recém-nascido.

No início do quarto mês o casal adulto produzirá mais um casal de coelhos, enquanto o outro casal completará um mês de vida e ainda não estará apto a reproduzir. Assim, existirão três casais de coelhos, sendo um casal adulto, um casal com um mês de idade e mais um casal recém-nascido. Assim, no início do quinto mês existirão dois casais de coelhos adultos, sendo que cada casal já reproduziu um novo casal e mais um casal que completou um mês de vida. Logo, teremos cinco casais de coelhos.

Seguindo o mesmo raciocínio para os outros meses, obtemos a famosa Sequência de Fibonacci, cujos primeiros termos são: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

A solução apresentada nos indica que quando queremos saber o número de casais de coelhos de um determinado mês a partir do segundo basta somar o número de casais do mês anterior com o número de casais do mês anterior ao anterior. Assim fica estabelecida a recorrência conhecida como sequência de Fibonacci pela expressão  $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$ , com  $n > 2$ , onde  $a_1 = 1, a_2 = 1$ , e  $n$  é o número de meses.

Estas e outras informações a respeito da sequência de Fibonacci podem ser encontradas na dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática no PROFMAT-UFCA (BARRETO, 2019), que realiza um estudo das propriedades da

Sequência de Fibonacci, e de mais duas outras sequências: a sequência de Luca e a sequência de Pell.

Essas duas sequências foram escolhidas por apresentarem diversas semelhanças com a sequência de Fibonacci, como: a sua fórmula de recorrência, equação característica, fórmula de Binet, função geradora e forma matricial.

De acordo com Guedes e Alves (2019), a sequência de Lucas recebe o nome do matemático francês Édouard Anatole Lucas (que nasceu em 04 de abril de 1842 e faleceu em 3 de outubro de 1891, Paris, França). Esta sequência pode ser obtida de forma semelhante à sequência de Fibonacci, sendo que os dois primeiros termos são 1 e 3, e os termos seguintes são obtidos pela soma dos 2 termos anteriores. Por outro lado, a sequência de Pell possui a seguinte lei de formação para seus termos:

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

O fato de possuírem leis de formação tão semelhantes gera a pergunta natural se as mesmas propriedades podem ser verificadas para as três sequências. Além disso, como no caso da sequência de Fibonacci, encontramos também para as sequências de Lucas e Pell, uma herança enorme e variada de modelos, propriedades, teoremas e implicações para outros ramos especiais em Matemática que podem ser explorados em sala de aula e que nos motivaram a explorar este assunto no curso MOOC “Sequências de Fibonacci, Lucas e Pell” do qual trata este trabalho.

## ANÁLISE E DISCUSSÃO

Ao refletirmos sobre a necessidade de um ensino inclusivo, que estimule o raciocínio e desperte o interesse do aluno, torna-se cada vez mais desafiador dissociar o ensino da tecnologia, uma vez que a sociedade está inserida em um ambiente informatizado e tecnológico. Nesse sentido, acreditamos que o ensino de temas associados a sequências numéricas e viabilizados por metodologias que envolvam o uso de tecnologias digitais, como é o caso dos cursos MOOC, podem ser excelentes ferramentas para o ensino da matemática.

Para Ponte et al. (2006) o conteúdo de sequências numéricas pode ser visto como “uma das vias privilegiadas para promover este raciocínio”, e é nessa perspectiva que o tema foi selecionado para a realização do curso, a fim de contribuir para o desenvolvimento do estudante.

Após a coleta dos dados por meio de questionários e resultados em avaliações, pretendemos realizar uma análise da importância das práticas desenvolvidas durante este curso para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de seus participantes e divulgar os resultados obtidos por meio de artigos científicos e participação em eventos.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Procuramos através do curso MOOC aqui apresentado, mostrar a versatilidade sequências de Fibonacci, Lucas e Pell, apresentando para isso uma coleção de exemplos que sublinha o diálogo destas com outros conteúdos matemáticos do ensino básico. Além disso, os métodos utilizados para resolver os problemas abordados durante o curso podem ser facilmente adaptados para diversas situações problema que envolvam outras sequências numéricas.

**Palavras-chave:** Curso MOOC; Sequências Numéricas; Fibonacci; Lucas; Pell.

## AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (Capes) - Código de Financiamento 001.

Os autores são gratos pelo apoio da Universidade Federal do Cariri e do PROFMAT-UFCA.

## REFERÊNCIAS

ANDRADE, M. V. M.; SILVEIRA, I. F. **Panorama da Aplicação de Massive Open Online Course (MOOC) no Ensino Superior: Desafios e Possibilidades.** EaD em FOCO, v. 6, n. 3, 2016.

BARRETO, P. H. J. S. **Sequências de Fibonacci, Lucas e Pell.** 2019. 62f. Dissertação de Mestrado - PROFMAT - Universidade Federal do Cariri. Juazeiro do Norte – Ceará. Disponível em: [https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc4.php?cod=4688\\_5dda54792907910f9d7b6085bba42c5055024f64](https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc4.php?cod=4688_5dda54792907910f9d7b6085bba42c5055024f64).



GUEDES, A. M. S.; ALVES, F. R. V. **An investigation with teachers in initial training on: sequence of lucas and the numbers of k-Lucas.** Research, Society and Development, [S. l.], v. 8, n. 7, p. e29871136, 2019.

HEFEZ, A. **Aritmética**, 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas.** Rio de Janeiro, EPU, 2013.

MATTAR, J. **Aprendizagem em ambientes virtuais: teorias, conectivismo e**

**MOOCs.** Teccogs, nº 7, jan-jun 2013, pp. 20- 40, 2013. Disponível em:

[https://www.pucsp.br/pos/tidd/teccogs/artigos/2013/edicao\\_7/2-aprendizagem\\_em\\_ambientes\\_virtuais-joao\\_mattar.pdf](https://www.pucsp.br/pos/tidd/teccogs/artigos/2013/edicao_7/2-aprendizagem_em_ambientes_virtuais-joao_mattar.pdf)

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas.**[Tradução Heitor Lisboa de Araújo]. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico.** Lisboa: DGIDC, 2009.