REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE SISTEMAS LINEARES: PROPOSTA DIDÁTICA COM O USO DO GEOGEBRA

Tânia Patrícia Silva e Silva [1]
Maria Wellyda Aguiar Carvalho [2]
Maria José Herculano Macedo [3]

RESUMO

O contexto educacional atual exige do docente a busca por instrumentos e práticas pedagógicas que possibilitem minimizar as dificuldades de aprendizagem dos discentes. Em vista disso, o objetivo desse trabalho consiste em apresentar uma proposta didática com o GeoGebra e relatar uma experiência decorrente da aplicação desta durante o estudo de Sistemas Lineares. Participaram dessa pesquisa 28 acadêmicos do curso de Licenciatura em Ciências Naturais. Como instrumento de coleta de dados utilizou-se as respostas da proposta didática. Diante dos resultados, foi possível identificar dificuldades na realização dos cálculos numéricos, cálculos algébricos e na resolução de sistemas lineares pelo método de escalonamento. O software contribuiu para o entendimento das representações geométricas das posições relativas entre os objetos matemáticos estudados. Além disso, se percebeu alta aceitação da ferramenta tecnológica pelos participantes durante o processo de construção da aprendizagem.

Palavras-chave: Sistemas lineares, Matemática, GeoGebra.

INTRODUÇÃO

Desde março de 2020, o Brasil enfrenta o surgimento da COVID-19, doença causada pelo coronavírus (também conhecido como SARS-Cov-2), que vem mudando as relações humanas e a vida social (SOUZA JUNIOR, 2020). Com isso, as aulas foram suspensas e também foram interrompidas as idas às escolas seguindo as decisões tomadas pelos governantes para segurança de todos os envolvidos no processo educacional.

Nesse contexto, todas as áreas sofreram mudanças, em especial a Matemática, pois muitos docentes passaram a utilizar ferramentas como mesas digitalizadoras, sites, plataformas e softwares com vistas a facilitar e possibilitar a compreensão de conceitos matemáticos pelos alunos nos diversos níveis de ensino.

[1] Mestranda do Curso de Ciência e Engenharia dos Materiais da Universidade Federal do Piauí - UFPI, tpsstania@hotmail.com;
[2] Graduanda do Curso de Ciências Naturais/Química da Universidade Federal do Maranhão - UFMA, mariawellyda_ufma@outlook.com;
[3] Docente do magistério superior da Universidade Federal do Maranhão- UFMA, maria.macedo@ufma.br;

Os softwares já eram considerados uma alternativa de contribuição ao Ensino de Matemática. De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio existem softwares que possibilitam realizar experimentos, testarem várias hipóteses e ainda possibilitam criar estratégias importantes na resolução de problemas. O documento traz ainda algumas características que estes devem ter como:

> a) conter um certo domínio de saber matemático – a sua base de conhecimento; b) oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático – numérica, algébrica, geométrica; c) possibilitar a expansão de sua base de conhecimento por meio de macroconstruções; d) permitir a manipulação dos objetos que estão na tela (BRASIL, 2006, p.88).

Assim, o uso correto dos softwares pode ter algumas consequências importantes: capacidade de resolução de problemas, gerenciamento de informações, habilidades investigativas, a aproximação entre teoria e prática, entres outros (PEREIRA, ROBIM, 2014). Dessa forma, na busca por estabelecer relações entre as diferentes representações de um objeto matemático de modo a ampliar o significado destas pelos discentes, optou-se por trabalhar com o software GeoGebra.

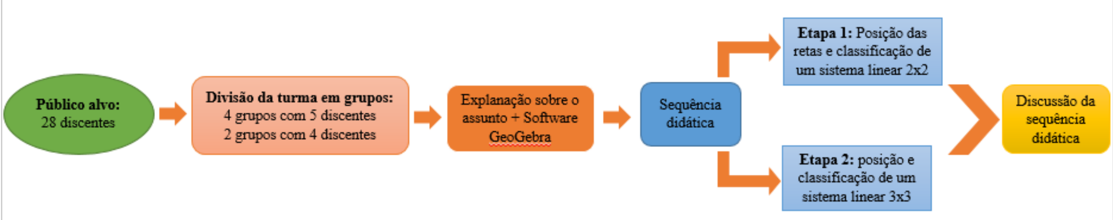
O GeoGebra pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem sobre o conteúdo sistemas lineares, pois apresenta-se com um recurso capaz de permitir “a visualização das representações geométricas e gráficas de funções e equações. Essa visualização por parte dos educandos conduz a uma maior compreensão e o conceito estudado passa a ter sentido e significado” (GONÇALVES; MENTGES; SCHULZ, 2018, p. 4). Assim, o mesmo pode facilitar a compreensão desses conceitos através da visualização, algo que era apresentado de forma abstrata pelos professores em sala de aula.

O objetivo dessa pesquisa consiste em apresentar uma sequência didática com o uso do software GeoGebra na aprendizagem de Sistemas Lineares e descrever sobre a experiência didática decorrente da aplicação desta em sala de aula, durante o ensino remoto, de modo que o resultado desta seja um indicador que possibilite reflexões e ações com vistas a promover maior aprendizagem discente e avaliar o nível de conhecimento básico sobre o conteúdo.

METODOLOGIA

O presente artigo apresenta uma pesquisa exploratória com abordagem qualitativa. Segundo Gerhardt e Silveira (2009, p.31), a pesquisa qualitativa “não se preocupa com representatividade numérica, mas, sim, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, etc”. Participaram dessa pesquisa 28 discentes universitários do curso de Licenciatura em Ciências Naturais/Química da Universidade Federal do Maranhão (Campus São Bernardo). Para a execução da sequência didática foram formadas 4 equipes com 5 alunos e 2 equipes com 4 alunos. Utilizou-se a plataforma GooGle Meet para a execução das aulas e apresentação do aporte teórico pela docente. Além disso, na videoconferência era desenvolvido o papel do docente em solucionar dúvidas quanto ao uso da ferramenta tecnológica. A organização das etapas segue o disposto na Figura 1.

Figura 1 – Organização das etapas da pesquisa.



Inicialmente foi realizada uma explanação acerca das posições entre duas retas e resolução de sistemas lineares, também abordou - se nesse momento a classificação de sistemas lineares, relações entre as soluções de sistemas lineares 2x2 e as posições entre as retas representativas de cada equação linear. Já durante essa etapa fez-se uso do software pela docente sendo apresentado aos alunos a inserção das equações no GeoGebra, sua representação geométrica e quando existentes eram verificadas as interseções entre as retas.

De forma semelhante, iniciou-se uma abordagem envolvendo sistemas lineares 3x3, sendo explanada as posições dos planos, resolução de sistemas lineares e sua classificação quanto ao número de soluções. Foram apresentados os oito tipos de posição entre planos e suas classificações. Ainda, verificou-se as interseções, quando existentes, utilizando os comandos de interseção do GeoGebra.

Durante a execução da sequência didática os discentes eram sujeitos ativos de sua construção, enquanto a docente adotava uma postura de orientação auxiliando no momento das dúvidas relacionadas ao software. Essa postura perante a turma é dada como “pontos de partida para a solução de problemas em sala de aula, tanto no sentido disciplinar (comportamento do aluno) quanto no índice de rendimento de conteúdos que serão aproveitados pelo estudante” (KUBATA, et al. 2010, p. 2). A proposta didática foi desenvolvida em duas etapas, a primeira correspondia a posição das retas e classificação de um sistema linear 2x2, enquanto a segunda etapa descrevia a posição entre os planos e classificação de um sistema linear 3x3, conforme descrito no Quadro 1.

Quadro 1 – Proposta didática com o uso do GeoGebra

Etapa 1: Posição das retas e classificação de um sistema linear 2x2

1. Insira as retas ax+by=c (reta r) e dx+fy=g (reta s) e o comando “Interseção entre r e s” no campo de entrada do GeoGebra. Realize o que se pede: (Antes de realizar qualquer alteração considere previamente os controles deslizantes iguais a 1).

1.1Altere apenas os termos c e/ou g. a) Com base nessas alterações o que podemos concluir acerca da posição das retas e da interseção entre elas? b) As retas representam qual tipo de sistema linear? c) Escreva um dos sistemas lineares considerados e resolva-o de forma algébrica. d) Existe solução para esse tipo de sistema se sim, informe qual? (Tire print da tela da representação gráfica do sistema).

1.2 Se duplicarmos os termos d, f e g. a) O que podemos concluir acerca da posição das retas e da interseção entre elas? b) As retas representam qual tipo de sistema linear? c)Escreva um dos sistemas considerados e resolva-o de forma algébrica? d) Existe solução para esse tipo de sistema se sim, informe qual? (Tire print da tela da representação gráfica do sistema).

1.3 Se alterarmos apenas um dos coeficientes a, b, d ou f. a) O que podemos concluir acerca da posição das retas e da interseção entre elas? b) As retas representam qual tipo de sistema linear? c)Escreva um dos sistemas considerados e resolva-o de forma algébrica? d)Existe solução para esse tipo de sistema se sim, informe qual? (Tire print da tela da representação gráfica do sistema).

Etapa 2: posição entre planos e classificação de um sistema linear 3x3

2. Insira os planos p: ax+by+cz=d, q: fx+gy+zh=j, r: kx+ly+mz = n, o comando de interseção geométrica entre p e q (representado por i) e entre q e r (representado por s), o comando interseção entre i e s no campo de entrada do GeoGebra. Realize o que se pede: (Antes de realizar qualquer alteração considere previamente os controles deslizantes iguais a 1).

2.1 a) Com base nas construções o que podemos concluir acerca dos planos e as interseções entre eles, caso existam? b) Representam qual tipo de sistema linear? Existe solução para esse tipo de sistema se sim, informe qual? (Tire print da tela da representação gráfica do sistema).

2.2 Altere apenas o termo d. a) Com base nessas alterações o que podemos concluir acerca dos planos? b) Representam qual tipo de sistema linear? Existe solução para esse tipo de sistema? Se sim, informe qual? c) Escolha um sistema linear, use a técnica do escalonamento e verifique se há solução. (Tire print da tela da representação gráfica do sistema).

2.3 Mantenha as alterações do termo d e altere o termo j. a) Com base nessas alterações o que podemos concluir acerca dos planos? b) Representam qual tipo de sistema linear? c) Existe solução para esse tipo de sistema se sim, informe qual? (Tire print da tela da representação gráfica do sistema).

Continuação do Quadro 1

2.4 Mantenha os controles deslizantes com os valores iniciais e altere os parâmetros de forma que d = 4, f = 2, g = -1, h=1 e j = 3. a) Com base nessas alterações o que podemos concluir acerca dos planos? b) Representam qual tipo de sistema linear? Existe solução para esse tipo de sistema se sim, informe qual? (Tire print da tela da representação gráfica do sistema).
2.5 Mantenha os controles deslizantes com os valores iniciais e altere os parâmetros de forma que c=2, d = 9, f = 2, g = 4, h=-3, j = 1, k=3, l=6, m=-5 e n=0. a) Com base nessas alterações o que podemos concluir acerca dos planos e interseção entre eles? b) Representam qual tipo de sistema linear? Existe solução para esse tipo de sistema se sim, informe qual? c) Use a técnica do escalonamento e verifique se há solução, se houver cite-a. (Tire print da tela da representação gráfica do sistema).
2.6 Mantenha os controles deslizantes com os valores iniciais e altere os parâmetros de forma que d=2, f =2, g=3, h=-2, j=4, k=3, l=4, m=-1 e n=6. a) Com base nessas alterações o que podemos concluir acerca dos planos e interseção entre eles? b) representam qual tipo de sistema linear? Existe solução para esse tipo de sistema? Se sim, informe qual. c) Use a técnica do escalonamento e verifique se há solução, se houver cite-a.

Após as construções os discentes enviaram para a docente a sequência com suas respostas. Após a análise dessas soluções houve uma discussão no ambiente virtual com enfoque nas respostas, sendo apresentados os erros, dificuldades durante as construções e soluções de dúvidas. Na descrição do relato deu-se mais enfoque as respostas com mais peculiaridades.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na Questão 1.1 as equipes encontraram retas paralelas ou seja sem pontos de interseção entre elas e identificaram um sistema impossível através das análises gráficas. Porém, na resolução do sistema linear pela forma algébrica, a Equipe 4 aplicou a Regra de Cramer e obtiveram os valores dos determinantes envolvidos da forma correta, fato que já indicaria se tratar de um sistema impossível. Segundo Silva e Santana (2017, p. 4) a Regra de Cramer "é uma das maneiras de resolver um sistema linear, mas só poderá ser utilizada na resolução de sistemas em que o número de equações e o número de incógnitas forem iguais com n-equações e n-incógnitas". No entanto, a equipe efetuou a divisão de D_x e D_y por zero e classificou o sistema de forma incorreta, vide Figura 1 abaixo. Com isso, verifica-se erros com cálculos numéricos e a aplicação equivocada da regra de Cramer.

Figura 1 – Resolução da Questão 1.1 pela Equipe 4.

A) Ao alterar o termo g= 1, para g=2 as retas tornam-se paralelas, sem interseção entre elas.

B) Sistema impossível

C) x + y= 1

x + y= 2 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ = 1-1=0

Dx= $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$= 1-2= -1 Dy= $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$= 2-1= 1

X= Dx/0= -1/0= 0 y= Dy/0= 1/0=0

Como todos os Di foram iguais a 0, o Sistema é Possível indeterminado.

D) Não tem solução.

As Equipes 1 e 2 não fizeram a resolução algébrica. Enquanto a Equipe 5 fez a resolução considerando apenas uma equação linear, algo semelhante fez a Equipe 6, conforme a Figura 2. De fato, o processo de resolução da questão permite encontrar valores de *c* e *g* iguais, permitindo ampliar o aprendizado, pois nessas condições a classificação do sistema seria alterado para possível e indeterminado.

Figura 2 – Resolução da Questão 1.1 pela Equipe 6.

1. Insira as retas ax+by=c (reta r) e dx+fy=g (reta s) e o comando “Interseção entre r e s” no campo de entrada do GeoGebra. Realize o que se pede: (Antes de realizar qualquer alteração considere previamente os controles deslizantes iguais a 1).

1.1 Altere apenas os termos c e/ou g.

a) Com base nessas alterações o que podemos concluir acerca da posição das retas e da interseção entre elas?

São retas paralelas

b) As retas representam qual tipo de sistema linear?

SI – Sistema Impossível

c) Escreva um dos sistemas lineares considerados e resolva-o de forma algébrica.

r: 1x + 1y = 3.1

y=-x+3,1

x+(-x+3,1)=3,1

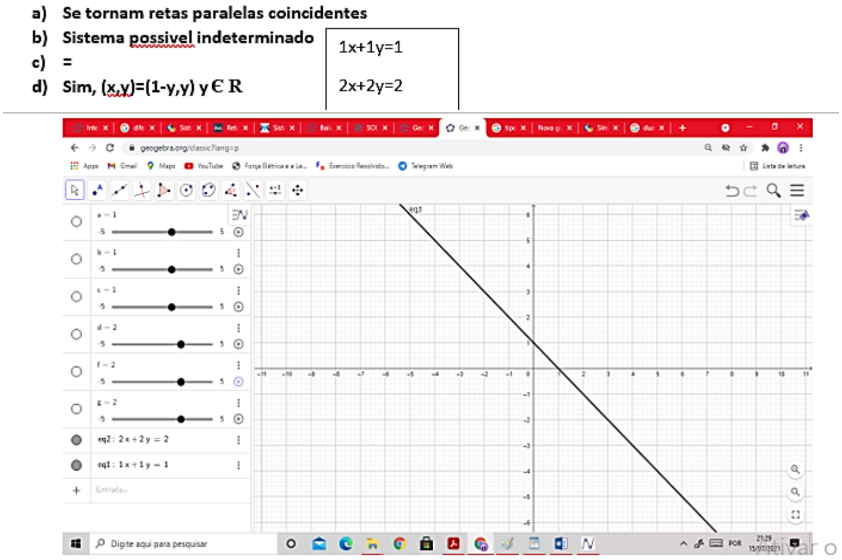
0=0

d) Existe solução para esse tipo de sistema se sim, informe qual? (Tire print da tela da representação gráfica do sistema).

Não tem solução

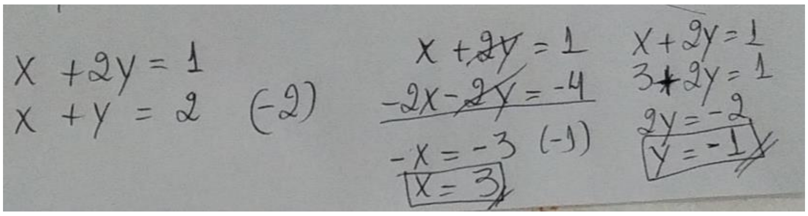
Na Questão 1.2, apenas a Equipe 1 apresentou a resposta correta acerca do que se pedia, encontraram retas coincidentes e a classificação do sistema em possível e indeterminado, vide Figura 3. Pode-se perceber que o programa é dividido em duas janelas para facilitar a visualização da construção estudada o que poderia ter contribuído para esta resposta pelos discentes, assim, neste “caso temos dois registros, que é vista de maneira simultânea pelo software comprovando que o mesmo é uma boa base para esse estudo” (SILVA; SANTANA, 2017, p.7). As outras equipes não consideraram, antes das alterações, os controles deslizantes iguais a 1 ou seja não seguiram a sequência didática.

Figura 3 – Resolução da Questão 1.2 pela Equipe 1.



De forma semelhante, na Questão 1.3 a maioria das equipes não consideraram os controles deslizantes iguais a 1 antes de realizarem as considerações do item. Apenas a Equipe 1 realizou as atividades de acordo com o descrito na sequência. As outras equipes, representadas na Figura 4 pela Equipe 3, alteraram outros termos além do descrito pela questão 1.3 ou seja inseriram também alterações nos termos independentes. Com isso, discutiu-se em sala de aula que as alterações realizadas nos termos independentes não interferiram na classificação do sistema linear. Todas as equipes encontraram um sistemas linear possível e determinado e as coordenadas correspondentes ao ponto de interseção.

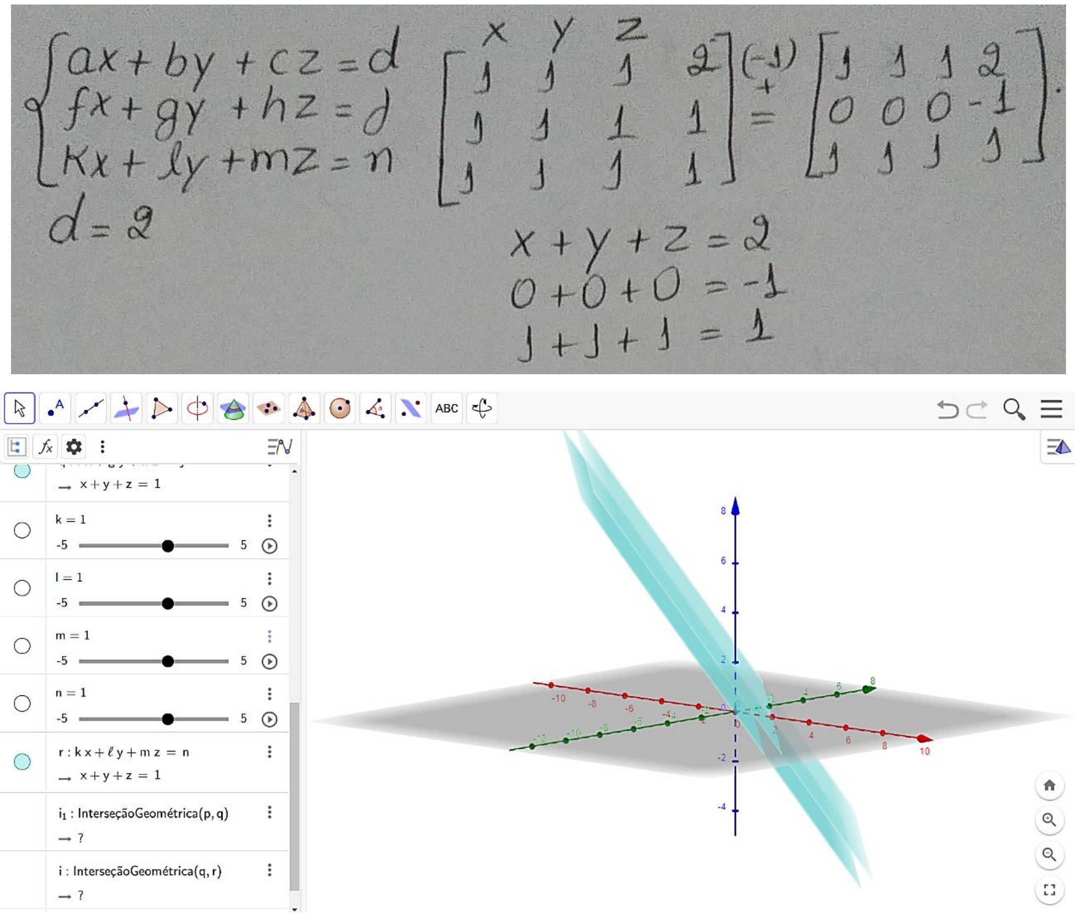
Figura 4 – Resolução algébrica realizada pela Equipe 3.



Mesmo havendo sido apresentado na aula teórica todos os tipos de posições de planos em um sistema 3 x 3, as equipes tiveram dúvidas quanto a classificação do sistema linear do item 2.1, apenas as Equipes 4 e 5 classificaram corretamente o sistema como possível e indeterminado e apenas a Equipe 5 escreveu que esse apresentava infinitas soluções. As outras equipes analisaram o sistema e classificaram como sendo um sistema impossível.

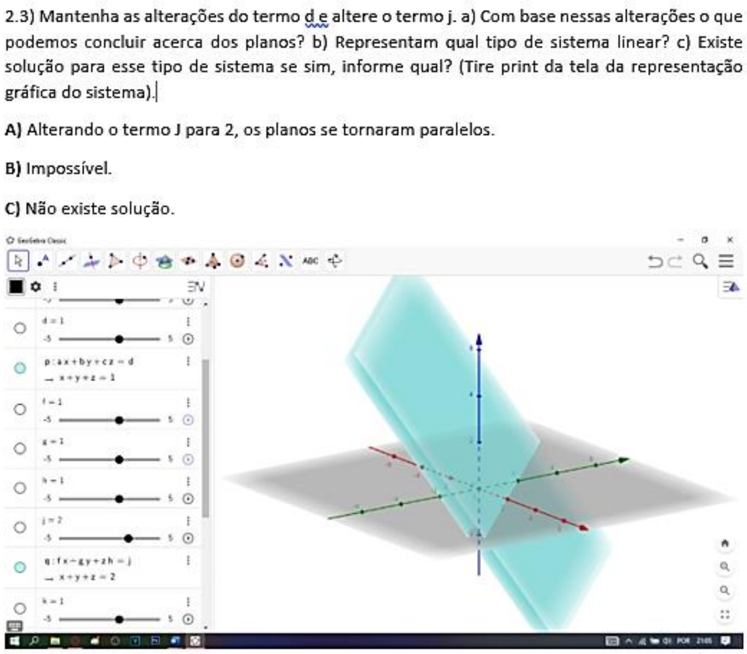
Quanto a Questão 2.2 que tratava de alterar o termo independente da equação do plano p, todas as equipes conseguiram realizar a construção e encontraram um sistema impossível e planos paralelos. Assim, na Figura 5 se tem a construção gráfica e a resolução do sistema linear definido pela Equipe 3. A resolução do sistema pela forma escalonada não foi resolvida de forma correta por nenhuma das equipes, algumas dessas não chegaram a iniciar esse processo de resolução, como foi o caso das Equipes 2, 5 e 6.

Figura 5 – Construção gráfica e resolução de sistema linear pela Equipe 3.



Na Questão 2.3 os discentes realizaram a classificação do sistema linear de forma correta. No entanto, a Equipe 1 não resolveu a questão citada e a Equipe 4 apresentou apenas 2 planos distintos, ao invés de 3 planos distintos. Nessa questão havia alterações apenas nos termos independentes das 3 equações apresentadas, como pode ser identificada na Figura 6.

Figura 6 – Resposta da questão 2.3 pela Equipe 4.


2.3) Mantenha as alterações do termo d e altere o termo j. a) Com base nessas alterações o que podemos concluir acerca dos planos? b) Representam qual tipo de sistema linear? c) Existe solução para esse tipo de sistema se sim, informe qual? (Tire print da tela da representação gráfica do sistema).

A) Alterando o termo J para 2, os planos se tornaram paralelos.

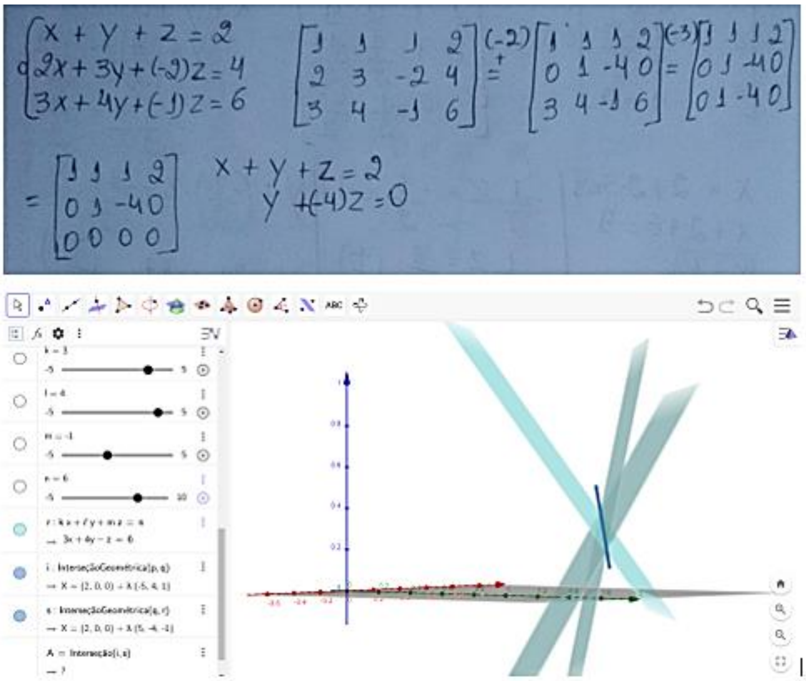
B) Impossível.

C) Não existe solução.

Ainda, verificou-se que o sistema impossível encontrado na Questão 2.4 foi classificado e construído de forma correta pelas equipes. Na Questão 2.5 a construção gráfica do sistema 3 x 3 foi realizada de forma correta pelas Equipes 1 e 3 e essas afirmaram ter encontrado um sistema possível e determinado com conjunto solução S = {1,2,3}. As Equipes 2 e 4 afirmaram ser o sistema impossível, enquanto as Equipes 5 e 6 informaram ser o sistema possível e indeterminado. As equipes que apresentaram erros não realizaram o escalonamento do sistema linear, com exceção da Equipe 4 pois, essa chegou a realizá-lo de forma incorreta.

Na Questão 2.6 as Equipes 3 e 4 apresentaram o escalonamento do sistema e a representação gráfica corretamente. No entanto, a Equipe 3 realizou a classificação do sistema como impossível, porém o sistema apresenta uma reta comum aos três planos e com isso o mesmo corresponde a um sistema possível e indeterminado, conforme Figura 7. As Equipes 2 e 5 apresentaram a construção gráfica correta e o escalonamento do sistema de forma incorreta. A Equipe 1 não resolveu a questão.

Figura 7 – Sistema escalonado e representação gráfica da Questão 2.6 pela Equipe 3.



Em relação às dificuldades apresentadas pelos discentes na resolução da proposta didática, foi possível observar que os mesmos tiveram uma compreensão maior quando foi utilizado o software e isso poderia ser explicado pelo fato deste facilitar a compreensão através da visualização e possibilitar variações nos parâmetros, fazer translações e rotações, permitindo o discente investigar e produzir enunciados a partir do movimento atribuído a um objeto matemático (OLIVEIRA et al., 2012, p. 4).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitas dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos acadêmicos são oriundas de lacunas provenientes da Educação Básica e as vezes essas se mantêm no ensino superior. Diante dos resultados da pesquisa, foi possível perceber erros e dificuldades em cálculos numéricos, algébricos e no processo de resolução de sistemas lineares, em especial, no uso da técnica de escalonamento.

O software contribuiu com o entendimento das análises gráficas das representações das retas e planos feitos no ambiente computacional criando possibilidades reais e concretas de ensino vivenciadas pelos participantes durante o processo de construção. Assim, a proposta didática apresentada serve para auxiliar aos docentes que desejam ampliar o conhecimento acerca do conteúdo Sistemas Lineares com a apresentação de possibilidades de uso da ferramenta dinâmica GeoGebra e permite aos discentes de nível médio ou superior aprofundar os seus conhecimentos sobre o objeto de estudo dessa pesquisa. Ainda, vale salientar que o uso de ferramentas computacionais nos cursos de licenciatura se revela como motivação e incentivo para aos licenciandos realizarem abordagens didáticas diferenciadas durante a atuação profissional.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Orientações Curriculares Para o Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. **Secretaria de Educação Básica.** Volume 2. Brasília: MEC, 2006.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. Métodos de pesquisa. Coordenado pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. – Porto Alegre: **Editora da UFRGS**, 2009.

GONÇALVES, C. B.; MENTGES, M.; SCHULZ, J. A. T. O software GeoGebra como proposta para o estudo de Sistemas de Equações Lineares. **Revista Tecnologias na Educação** – Ano 10 – Número/Vol.28 – dezembro/2018. ISSN: 1984-4751.

HUMMES, V. B.; BREDA, A.; LIMA, V. M. R. A interpretação das soluções de sistemas de equações lineares de ordem dois através do software GeoGebra: uma abordagem geométrica. **Revista de Educação Dom Alberto**, n. 5, v. 1, jan./jul. 2014.

KUBATA, L.*et al*. A postura do professor em sala de aula: atitudes que promovem bons comportamentos e alto rendimento educacional. **Revista Eletrônica de Letras,** 2010. Disponível em: https://periodicos.unifacef.com.br/index.php/rel/article/view/421. Acesso em: 23 de julho de 2021.

OLIVEIRA, I. L. L.; GUIMARÃES, S. U.; ANDRADE, J. A. A. As potencialidades do GeoGebra em processos de investigação matemática: uma análise do desenvolvimento de objetos de aprendizagem da EaD no ensino presencial. In: **1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra.** ISSN 2237- 9657, pp.CCLXV-CCLXXIX, 2012.

PEREIRA, L. R.; ROBIM, B. N. P. A. S. O ensino e a aprendizagem da Matemática mediada por software educativo na forma de objetos de aprendizagem. In: **Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE**: Produções Didático-Pedagógicas, Volume II, 2014. Versão Online ISBN 978-85-8015-079-7. Cadernos PDE.

SILVA, J. C.; SANTANA, W. F. O GeoGebra e a geometria dos Sistemas Lineares de ordem 3. In: **VII Congresso Internacional de Ensino da Matemática** – ULBRA, Canoas, 2017.

SOUZA JUNIOR, J. L. **Dificuldades e desafios do Ensino de Matemática na pandemia.** 2020. 32 p. Monografia (Graduação/Licenciatura em Matemática) – UFPB/CCEN, João Pessoa, 2020.