

PROBLEMAS DE PENSAMENTO COMBINATÓRIO NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Fabio Colins¹
Érica Gonçalves Colins²

RESUMO

O ensino de Matemática, na perspectiva dessa pesquisa, vai além de aprender a aplicar fórmulas em situações problemas. É necessário desenvolver habilidades que permitam refutar resultados, questionar determinados procedimentos de cálculo e relacionar diferentes caminhos de resolução de um problema. Assim, o valor da resposta correta cede espaço para o processo de resolução. Nesse sentido, esta pesquisa tem como objetivo analisar estratégias pessoais de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental diante de problemas de pensamento combinatório. A discussão teórica que fundamenta as análises está pautada, principalmente, nos estudos de Hazzan; Aquino, entre outros. A pesquisa assumiu uma abordagem qualitativa do tipo exploratória e foi desenvolvida em uma escola pública da rede municipal de Curuçá (PA) com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental durante as aulas de Matemática. O material empírico foi construído a partir dos registros das resoluções das atividades propostas e esse material foi utilizado na análise de forma interpretativa. A pesquisa apontou que o processo de interpretação das estratégias utilizadas pelos estudantes para resolver problemas de combinatória possibilita ao professor perceber o conhecimento matemático mobilizado nas resoluções e, principalmente, a compreensão sobre a linguagem matemática.

Palavras-chave: Pensamento Combinatório, Aprendizagem, Ensino, Resolução de Problemas.

INTRODUÇÃO

A maneira como enxergamos o mundo, o modo como o mundo está organizado, o jeito que ele se comporta pode levar-nos a fazermos várias perguntas: de quantos modos podemos investir uma certa quantia na bolsa de valores? De quantos modos podemos montar um conjunto de roupas com três peças? De quantas maneiras podemos organizar uma certa quantidade de pessoas em uma fila de banco? De quantos modos você pode combinar o lanche das crianças? De quantas maneiras pode-se fazer o rodízio de funcionários de uma empresa? A lista de perguntas continua e a resposta para isso é observar certos padrões.

Quase tudo ao nosso redor está organizado em padrões, matematicamente falando. De modo que esses padrões podem ser estudados e analisados quanto a forma como podem estar

¹ Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará - UFPA, formador.ufpa@gmail.com;

² Especialista em Educação em Ciências e Matemáticas para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental da Universidade Federal do Pará - UFPA, ericacolins@gmail.com;



organizados diante de nós. A forma como organizamos as palavras em uma frase, a forma como organizamos os móveis dentro de casa, a forma como sentamos nas carteiras na sala de aula. A lista de objetos que nos oferecem estes padrões é praticamente interminável. É nesse contexto, a fim de estudar os padrões na hora de organizá-los, que é necessário a Análise Combinatória.

Nesse contexto, o ensino de Matemática na Educação Básica precisa, sobretudo, ter significado para o estudante e, sempre que necessário, estabelecer conexões com outras áreas do conhecimento. As atividades matemáticas precisam dialogar com o cotidiano dos sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem e articular diferentes temas da própria Matemática.

Uma possibilidade de conexão entre os temas da Matemática está no bloco de conteúdos intitulado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática de *Tratamento da Informação*. Nesse bloco, estão relacionados estudos relativos a noções de probabilidade, estatística e combinatória. Em relação à combinatória os PCN destacam que o ensino não pode ser baseado na simples aplicação de fórmulas, pois o que se espera é fomentar nos estudantes o pensamento combinatório.

A Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) reforça essa ideia. O documento destaca a importância de nas aulas de Matemática abordar o ensino a partir do letramento matemático. Assim, as aulas precisam ser organizadas com o intuito de propor atividades com o objetivo de que os estudantes tenham a oportunidade de raciocinar, representar ideias matemáticas, comunicar e argumentar por meio da linguagem matemática e resolver problemas utilizando ferramentas e conceitos matemáticos.

O pensamento combinatório ou a combinação são temas que podem ser introduzidos nos anos iniciais do Ensino Fundamental, aprofundados nos anos finais do Ensino Fundamental e consolidados no Ensino Médio. Esse tema da Matemática aborda técnicas de contagem de possíveis agrupamentos a partir de elementos dados e da condição determinada. Nestes termos, como estão organizadas as atividades sobre pensamento combinatório nas aulas de Matemática do 5º ano do Ensino Fundamental?

É nesse contexto que esta pesquisa tem como objetivo geral *analisar estratégias pessoais de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental diante de problemas de pensamento combinatório*. Em termos de objetivos específicos, tais como: *investigar a resolução de situações-problema que abordem o princípio multiplicativo de contagem; desenvolver o raciocínio combinatório e o conceito de combinação por meio do processo fundamental da contagem*.



A pesquisa foi de abordagem qualitativa e do tipo exploratória. Ela foi desenvolvida com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental que participam das aulas do Projeto Novo Mais Educação de uma escola da rede municipal em Curuçá (PA). O estudo foi realizado durante duas semanas com uma carga horária de 16 horas. As atividades foram organizadas em formato de oficinas de Matemática que ocorreram no contra turno das aulas regulares.

As análises foram realizadas a partir dos registros das resoluções das atividades propostas em sala de aula. Esses registros serviram como material para análise interpretativa. Foram selecionados para análise os registros dos participantes que atendessem ao objetivo principal da pesquisa.

Ressaltamos que, a estrutura textual segue uma abordagem flexível construída a partir de uma intrínseca relação entre teoria e prática, de modo que os achados na pesquisa são entrelaçados com os referenciais que fundamentam a experiência e as percepções dos sujeitos envolvidos. Dentre os autores e documentos que nos fundamentamos para a produção interpretativa destacam-se Hazzan (1993); Brasil (1998, 2017); Itacarambi (2010); e Aquino (2013).

Este trabalho discute a análise interpretativa de problemas de arranjos, ou seja, uma sequência de n elementos, em que cada elemento pertence ao conjunto A , e são todos distintos. São realizadas reflexões sobre as estratégias de resolução de problemas de combinação e as contribuições da pesquisa para a formação inicial do pesquisador, para o ensino de matemática e para o papel do estudante no processo de ensino e de aprendizagem.

Portanto, interpretar as estratégias utilizadas pelos estudantes na resolução dos problemas de pensamento combinatório possibilita compreender o raciocínio lógico, o conhecimento sobre a linguagem matemática e a construção do conhecimento matemático nas aulas de matemática.

OS PROBLEMAS DE RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

A combinatória tem como objetivo trabalhar formas de descobrir métodos que possa contar os elementos de um determinado conjunto e desenvolver formas de seu agrupamento. Em um primeiro momento vemos como desnecessário é o conhecimento desses métodos, haja vista que os números sejam pequenos. Contudo, quando trabalhado com números maiores, percebemos a grande necessidade desses métodos, tornando-se quase impossível a sua não utilização.



Segundo Hazzan (1993, p. 02), “a análise combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos, agrupamentos formados sob certas condições”. No entanto, nem sempre se faz necessário utilizar um método específico, pois em situações que envolvem pequenos grupos de elementos pode-se recorrer ao processo de contagem.

Desse modo, foram propostos aos estudantes participantes da pesquisa dois problemas de arranjo que poderiam ser resolvidos por meio de processo de contagem. Abaixo são apresentados os problemas.

Problema de Arranjo 1: *Uma turma resolver escolher um representante de turma, candidataram-se 3 pessoas (Maria, João e Antônia). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice-representante?*

Problema de Arranjo 2: *Para ocupar os cargos de coordenador e de vice-coordenador do grêmio estudantil, candidataram-se 4 alunos (Renato, Pedro, João e Vitor). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o coordenador e o vice-coordenador?*

No problema de arranjo 1 temos um conjunto, do qual seus elementos podem ser ordenados. Em relação à seleção, de um grupo maior, são formados subgrupos. No problema citado, há um conjunto de três elementos (Maria, João e Antônia), e a partir dele deve-se formar subgrupos com dois elementos (Maria e Antônia) cada um, sendo o primeiro o representante e o segundo o vice-representante. No que se refere a ordem dos elementos, escolher Maria como representante e Antônia como vice é diferente de eleger Antônia como representante e João como vice. Nesse caso, a ordenação dos elementos cria uma possibilidade de contagem porque as posições que cada um ocupa dentro do grupo representado segue uma lógica numérica.


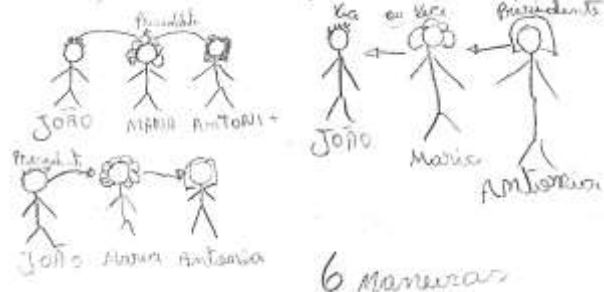

A partir da fundamentação matemática de Hazzan (1993, p. 17), a definição de arranjo é dada da seguinte maneira:

Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Chama-se arranjo com repetição dos m elementos, tomados r a r , toda sequência de r elementos formados com elementos de M , não necessariamente distintos. E são denotados por:

$$A_{m,r} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \dots (m - [r + 2]) \cdot (m - [r + 1]) = m! / (m-r)!$$

Os problemas propostos aos participantes não exigiram a aplicação de fórmula, pois poderiam ser resolvidos por meio de contagem, cujos valores numéricos são representados nas imagens do quadro 1.

Quadro 1: Resoluções do problema de arranjo 1 realizado por três participantes da pesquisa

Participantes	Registros das resoluções
<p><i>Participante 1</i></p>	
<p><i>Participante 2</i></p>	
<p><i>Participante 3</i></p>	

Fonte: Diário de Pesquisa, 2020.

A partir do quadro acima, é possível inferir que os três participantes compreenderam as características do arranjo. Na justificativa do *participante 1* fica mais evidente essa compreensão quando afirma que **é possível fazer de seis possibilidades, sendo que pode ser diferenciado quando trocado**. Primeiramente, ele desenha algumas possibilidades de combinação e isso evidencia a compreensão de que um conjunto maior pode gerar conjuntos menores, ou seja, de um conjunto com três elementos (Maria; João; Antônia) pode formar conjuntos com dois elementos (Maria; João) ou (João; Maria).

Outra evidência no registro do *participante 1* refere-se à compreensão de que a ordem dos elementos gera novas possibilidades. Isso é destacado quando ele apresenta a justificativa da resolução: **sendo que pode ser diferenciado quando trocado**. Interessante destacar que além de formar os arranjos de maneira correta em cada subconjunto de dois elementos, destaca as possibilidades de escolher uma mesma pessoa para ser representante em uma



situação e vice representante em outra. Com esse procedimento de combinações, ele esgota todas as possibilidades.

Nesse contexto, Aquino (2013) afirma que o estudo da análise combinatória desde os anos iniciais da Educação Básica é essencial para a formação dos indivíduos conscientes e críticos. E isso pode ser dado a partir da exploração de situações simples do cotidiano. A exploração do pensamento combinatório nas aulas de matemática ajuda a desenvolver inúmeras habilidades lógicas, por exemplo: observação; levantamento de hipóteses; investigação; sistematização e generalização.

O *participante 2* demonstra compreensão sobre o processo combinatório, isso fica evidente no seu registro, principalmente quando desenha os três personagens do problema e os nomeia conforme cargo concorrido (representante e vice-representante) sem modificar suas posições, apenas os seus cargos. A estratégia utilizada pelo participante demonstra que tem domínio da situação.

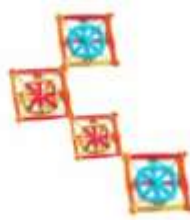
Os registros possibilitam inferir que, por meio das situações de pensamento combinatório, os participantes apreenderam o objeto de conhecimento matemático e tornaram-se capazes de construir modelos matemáticos mental pleno de significados, ou seja, os participantes foram capazes de compreender e interpretar o contexto matemático proposto.

É nessa perspectiva que o documento *Parâmetros Curriculares de Matemática* (PCN) destaca a importância do trabalho, desde os anos iniciais da Educação Básica, com situações problemas de pensamento combinatório:

O emprego de problemas envolvendo combinatória leva o aluno desde cedo a desenvolver procedimentos básicos como a organização dos dados em tabelas gráficas e diagramas bem como a classificação de eventos segundo uns critérios mais úteis não só em matemática como também outros campos o que reforça a argumentação dos defensores de seu uso desde as séries iniciais do ensino fundamental (BRASIL, 1998, p. 52).

Por isso, desde os anos iniciais do ensino fundamental, os PCN de matemática reconhecem a importância de se trabalhar a análise combinatória. Isto porque o aprendizado da análise combinatória inclui diretamente o aprendizado de diversos outros conteúdos matemáticos, por exemplo, números; operações; espaço e forma; grandezas e medidas e o tratamento da informação (AQUINO, 2013). Além de estar relacionada diretamente com outras áreas do conhecimento, assim como a estatística e a probabilidade e, conseqüentemente, envolve problemas do Processo Fundamental da Contagem (PFC).

Um aspecto que merece destaque no trabalho com a resolução de problemas de pensamento combinatório refere-se ao processo de leitura (compreensão e interpretação do texto) e de escrita (registro do pensamento combinatório). Nesse sentido, a resolução de



problemas de combinatória pode ser compreendida como um processo de investigação, cujo ponto de partida tomado pelos participantes foi a análise qualitativa da situação. Esse processo de análise qualitativa nem sempre é evidente nas situações problema, mas o participante 3 deixa claro esse processo de análise em seu registro ao realizar a seguinte escrita: **Ora, se Antônia for a representante, ela pode escolher para ser seu vice a Maria ou o João. E se Maria for a representante, ela poderá escolher para ser seu vice a Antônia ou o João? E se João for o representante, ele pode escolher para ser seu vice a Maria ou a Antônia?**

A referida situação problema possibilita concluir que o participante tem ideia da situação. Ele a delimitou por meio de um processo de interpretação claro e objetivo. Nesse processo de análise qualitativa, os dados quantitativos deixaram de ser prioridade, o que exigiu do participante compreensão e interpretação da situação proposta.

O registro mostra que o participante precisou realizar conjecturas, aproximações e tomar decisões sem recorrer diretamente às operações aritméticas. A solução foi dada pelo processo de contagem. Ele mostra que a compreensão do problema foi influenciada por fatores matemáticos e não matemáticos. Um dos fatores não matemáticos está na compreensão de que todos podem assumir a função de representante ou de vice representante. Nesse sentido, Aquino (2013, p.18) destaca que “o trabalho com problemas combinatórios tem como finalidade explorar as diversas formas de representação dos casos possíveis de uma situação combinatória”.

As propostas de atividades atenderam um dos objetivos que os PCN de matemática preconizam. Por exemplo, o objetivo de “levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para aplicação de cálculo de probabilidades” (BRASIL, 1998, p. 52).

As resoluções apresentadas pelos participantes mostraram que a leitura dos problemas de arranjos exigiu não somente a compreensão, mas também a compreensão dos termos específicos referentes à linguagem matemática, ou seja, suas relações lógicas e que muitas vezes não fazem parte da experiência dos alunos. Assim, a proposta apresentada aos participantes apontou a necessidade de se ensinar, nas aulas de matemática, a ler um texto de problemas matemáticos.

Nesse sentido, o problema é um portador textual (ITACARAMBI, 2010), portanto, os professores de Matemática precisam ensinar e promover em suas aulas situações de aprendizagem de leitura e de escrita de textos. Essas são competências linguística e



matemática necessárias, pois há, neste tipo de texto, palavras que têm significados distintos (de natureza matemática) e que podem dificultar a compreensão do contexto.

Portanto, quanto maior for a diversidade de problemas de pensamento combinatório propostos aos alunos, melhor será o desenvolvimento de habilidades relacionadas a esse campo da Matemática, pois isso pode possibilitar a construção de um raciocínio combinatório mais complexo e elaborado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa, que teve como objetivo geral *analisar estratégias pessoais de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental diante de problemas de pensamento combinatório*, possibilitou perceber que os estudantes, de modo geral, conseguem identificar características dos problemas de combinatória por meio de sistematização de suas estratégias de resolução. Eles percebem com mais facilidade as relações de permutação em que a ordem não influencia no resultado. No entanto, nos problemas em que a ordem cria novas possibilidades aumenta a dificuldade na resolução, visto que precisava esgotar todas as novas combinações.

A revisão da literatura realizada durante o desenvolvimento da pesquisa possibilitou compreender as orientações dadas pelos documentos curriculares sobre a inserção de conteúdos relacionados à Análise Combinatória desde os anos iniciais de escolarização, portanto, a proposta da pesquisa estava articulada com tais orientações. Essa inserção também foi identificada na leitura de livros didáticos quando se realizou a investigação sobre os conteúdos do 5º ano do Ensino Fundamental.

A pesquisa apontou que atividades desafiadoras, como as propostas aos participantes, provocam maior interação entre os estudantes e o professor durante as aulas de matemática. Os problemas em que os estudantes não precisavam aplicar fórmulas prontas, mas encontrar seus próprios procedimentos de resolução, foram convidativos à aprendizagem e mobilizaram diversos processos cognitivos (inferir, analisar, avaliar, refutar).

Outros aspectos que merecem destaque referem-se ao uso de materiais manipuláveis nas aulas de matemática e à criação de situações problemas com base em contextos próximos das vivências dos estudantes. Quando o professor propõe a utilização de materiais manipuláveis na resolução de um problema de combinatória isso pode estimular o estudante a criar diversas estratégias de solução, dentre elas estão: a listagem ou árvore de possibilidades de combinações e os desenhos. Propor problemas que surgem do contexto do estudante gera a



curiosidade e a criatividade, pois quanto mais próximo estiver de sua realidade, maior é seu interesse em querer resolvê-lo.

Dessa forma, pode-se inferir que esta pesquisa contribuiu para que o ensino de matemática na Educação Básica seja considerado com mais seriedade, onde o estudante seja protagonista no processo de ensino e de aprendizagem e que o professor de matemática seja a ponte entre o sujeito e o conhecimento.

Por fim, em relação às contribuições da pesquisa para formação e o desenvolvimento profissional docente, este trabalho possibilitou perceber que o ensino de matemática pode ser desafiador, mas no sentido de que os estudantes se sintam motivados a aprender, e que o professor pode utilizar os registros dos estudantes como uma bússola que indique o direcionamento da aprendizagem. Além disso, este trabalho contribuiu para que pudesse enxergar o quanto a forma que ensinamos faz diferença no aprendizado dos estudantes e que as dificuldades que muitos apresentam sobre a compreensão da linguagem matemática pode serem superadas com aulas criativas e desafiadoras.

REFERÊNCIAS

AQUINO, Claudivania de Alencar de. **Introduzindo o pensamento combinatório nos anos finais do ensino fundamental**: uma proposta de ensino. Juazeiro, Autêntica, 2013.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática 1^a à 4^a séries. Secretaria de Educação Básica. Brasília: SEB, 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Secretaria de Educação Básica. Brasília: SEB, 2017.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar**: combinatória e probabilidade. 6. ed. São Paulo: Atual, 1993.

ITACARAMBI, Ruth Ribas. **Resolução de Problemas nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**: construção de uma metodologia. São Paulo: Livraria da Física, 2010.