



PENSANDO NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA EM SALA DE AULA

Adriano Alves da Silveira ¹

RESUMO

A presente pesquisa teve como objetivo investigar por meio de dois questionários, aplicados aos estudantes e professores, as estratégias e dificuldades encontradas pelos alunos do 2º ano do Ensino Médio, como também as percepções dos professores sobre o estudo dessa temática. O nosso propósito era responder as seguintes questões: Quais as estratégias utilizadas e dificuldades encontradas pelos alunos no estudo da Análise Combinatória? Quais justificativas dos professores em deixar o estudo de Análise Combinatória de lado? Com isso, elegemos como sujeitos da pesquisa seis turmas do 2º ano do Ensino Médio, e os respectivos professores dessas turmas, distribuídas nos Municípios de Alagoinha - PB, Mulungu - PB e Rio Tinto - PB. Concluiu-se que com o questionário aplicado aos alunos, percebemos que as turmas, na qual a pesquisa foi realizada, não tiveram o Ensino de Análise Combinatória, ou seja, os professores, por alguma razão, trabalharam com essa temática na sala de aula. Podemos afirmar isso por vários motivos, como: todas as questões que foram resolvidas foram utilizadas o Princípio Fundamental da Contagem, quando a questão não utilizava o Princípio Fundamental da Contagem de uma forma direta, a maioria dos alunos não conseguia resolver a questão. Verificamos também que não foi utilizado nenhum tipo de fórmula correspondente a qualquer tipo de agrupamento. Assim, essa pesquisa nos proporcionou refletir sobre o processo ensino-aprendizagem da Análise Combinatória. Desta forma, é recomendável que os docentes trabalhem com metodologias diversificadas, que facilitem esse processo.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem, Análise Combinatória, Ensino Médio.

INTRODUÇÃO

A temática em foco aparece no cenário escolar como um tema desafiador devido sua complexidade e importância. Na verdade, é comum se deparar com situações que necessitam do conhecimento da Análise Combinatória em nosso cotidiano e que, ao longo do tempo, foi preciso de um estudo mais aprofundado sobre o tema em foco.

Assim, a escolha desse tópico teve como justificativa, verificar como está ocorrendo o estudo da Análise Combinatória em algumas escolas públicas, determinando quais as dificuldades encontradas pelos alunos no estudo dessa temática.

¹ Mestre do Curso de Ensino de Ciência e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, adriano.exatas@hotmail.com.



Além disso, este trabalho teve o objetivo de investigar, por meio de dois questionários, aplicados aos estudantes e professores, as estratégias e dificuldades encontradas pelos alunos do 2º ano do Ensino Médio, como também as percepções dos professores sobre o estudo dessa temática.

A Análise Combinatória é um dos conteúdos que vem se destacando com relação aos demais. Acredito que a maior importância se deva ao fato desse conteúdo está diretamente ligado a situações do nosso dia-a-dia, pois trabalha dentro da linha de resolução de problemas. Que hoje é uma forte tendência metodológica. Outro fator importante diz respeito à dimensão do estudo da Combinatória como conteúdo que possibilita o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo matemático.

Os documentos oficiais de Matemática apresentam a Análise Combinatória como conteúdo obrigatório que compõem a estrutura curricular do Ensino Médio. A Análise Combinatória pertence ao bloco Análise de dados e probabilidade que deve ser discutido durante todos os anos de escolaridade do Ensino Básico.

No entanto, este conteúdo se desenvolve ainda muito timidamente, no ambiente escolar, apesar de sua potencialidade, ao trabalhar de forma eficaz com algumas competências exigidas nos PCN+ (BRASIL, 2002) de Matemática, tais como: representação, leitura, investigação e compreensão, capacidade de enfrentamento e resolução de situações problemas, dentre outras.

Assim, um fator que deve ser levado em consideração é que o estudo da Análise Combinatória deveria ser contemplado de uma forma mais eficaz no Ensino Fundamental.

No decorrer dos primeiros ciclos do Ensino Fundamental os alunos devem ser levados a desenvolver a familiarização com a contagem de agrupamentos, de maneira informal e direta, fazendo, por exemplo, uma lista de todos os agrupamentos possíveis para depois contá-los (BRASIL, 1997, p. 52).

No entanto, o ensino da Análise combinatória só começa a ser discutido na maioria das instituições escolares a partir do 2º ano do Ensino Médio, tornando assim uma aprendizagem sem alguns suportes para determinada etapa. Porém, o problema é mais preocupante do que parece, pois existem muitas escolas que não trabalham com o estudo da Análise Combinatória em seu currículo. Este fato pode ocorrer pela insegurança do professor de Matemática no conteúdo de Análise Combinatória e também por achar que, ao discutir tal temática, seus alunos vão ter muita dificuldade em aprender os conceitos deste tópico.



METODOLOGIA

Esta seção tem como finalidade descrever os procedimentos metodológicos utilizados no presente estudo. O objetivo fundamental da pesquisa é descobrir respostas para os problemas na qual se justifica a realização da mesma. Deste modo, apresentamos, a seguir, o tipo de estudo bem como os participantes e a metodologia aplicada, segundo o objetivo e à análise de dados.

A metodologia de pesquisa pode ser caracterizada, segundo seus objetivos, como um estudo descritivo e exploratório, elaborado a partir da investigação e de materiais publicados sobre a temática em questão.

Quanto à análise de dados, este estudo se caracteriza por ser do tipo estudo de caso com apenas uma interação. O estudo de caso pode ser compreendido segundo Oliveira (2007), como um estudo profundo de uma temática. Quanto aos instrumentos de pesquisa, utilizaremos um questionário semiestruturado composto por questões abertas sobre o estudo da Análise Combinatória na sala de aula.

Para alcançar os objetivos da pesquisa, elegemos como sujeitos do estudo, os professores e alunos do 2º ano do Ensino Médio das Escolas Públicas dos Municípios de Alagoinha - PB, Mulungu - PB e Rio Tinto - PB. A metodologia de ação será estruturada em duas etapas: aplicação do questionário e a verificação dos resultados obtidos.

A primeira etapa da pesquisa visou conhecer os estudantes e professores participantes, bem como identificar as dificuldades encontradas pelos alunos no Estudo de Análise Combinatória. Neste momento, desejamos também investigar como os professores das instituições trabalham a Análise Combinatória no ambiente escolar.

Desta forma, utilizamos dois questionários, um elaborado para os professores, que abordava as seguintes questões: 1 - Qual a importância da familiarização dos alunos nos anos iniciais, sobre os primeiros conceitos da Análise Combinatória? 2 - Quais as dificuldades encontradas pelos alunos no estudo da Análise Combinatória? 3 - Quais são as principais estratégias utilizadas pelos alunos para resolverem problemas envolvendo Análise Combinatória no ambiente escolar? 4 - Você costuma deixar o estudo da Análise Combinatória de lado? Se for sim, explique o porquê? E o outro para os estudantes: 1 - Daniela pretende ir à festa de São João na cidade de Alagoinha-PB. Considerando que ela tem 5 blusas e 4 saias. Determine quantos modos diferentes ela pode se vestir para ir à festa. 2 - Cinco cavalos disputam um páreo qual o número de possíveis resultados para as 2 primeiras colocações? 3 - De quantas maneiras uma família de 3 pessoas pode sentar se num banco de 3 lugares? 4 -



Dezesseis times se inscreveram em um torneio de futsal amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o grupo **A**. Em seguida entre os times do grupo **A**, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para o grupo **A** e a quantidade total de escolhas de times do jogo de abertura podem ser calculadas através de que tipos de agrupamentos?

A segunda etapa remete à verificação e à análise dos resultados baseados na teoria estudada. Neste momento, estamos interessados em investigar quais as principais dificuldades que os professores e estudantes tem acerca do ensino-aprendizagem de Análise combinatória.

ENSINO-APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

A Análise Combinatória se desenvolveu ao longo do tempo com diversos problemas que necessitava de métodos de contagem adequados. Assim, a necessidade de contagem é muito antiga. A partir da ideia de organização numérica surgiu um novo ramo da Matemática.

Nesse sentido Silva e Filho (2008) define a Análise Combinatória como o ramo da Matemática que tem por objetivo resolver problemas que consistem, basicamente, em escolher e agrupar elementos de um conjunto. E tem como ponto de partida o princípio da contagem, que é o alicerce primordial desta área, envolvendo o princípio multiplicativo e aditivo.

Análise Combinatória nos possibilita calcular o número de possibilidades de determinados acontecimentos, levando em consideração certas condições. Para Roxo et al (1944, p. 81),

Análise Combinatória é uma área da Matemática que aborda o estudo da formação, contagem e propriedades dos agrupamentos que podem constituir-se, segundo determinados critérios, como os objetos de uma coleção. Esses agrupamentos distinguem-se, fundamentalmente em três espécies: arranjos, permutações e combinações, e podem ser formados de objetos distintos ou repetidos.

O conceito mais importante que acompanha a discussão de Análise Combinatória apresentado por Lima et al (2006), é o Princípio Fundamental da Contagem, segundo o qual, se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1 , há y modos de tomar a decisão D_2 , então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é $x \cdot y$.

Os conceitos de Análise Combinatória discutidos no Ensino Básico envolvem basicamente problemas de arranjo, combinação e permutação. No entanto existem outros tipos



de problemas mais complexo que exigem técnicas para resolvê-los, como: o princípio das gavetas de Dirichlet, o princípio da inclusão-exclusão, as funções geradoras e a teoria de Ramsey. Hariki (1996, p. 29) aponta dificuldades encontradas pelos alunos e professores,

Problemas envolvendo combinatória são usualmente considerados difíceis pela maioria dos alunos e professores de Matemática. Talvez a principal dificuldade seja a da conexão correta entre o problema dado e a teoria matemática correspondente. É difícil determinar se o problema combinatório dado é um problema de arranjo, de permutação ou de combinação, ou então se é suficiente usar diretamente o Princípio Fundamental da Contagem.

No entanto se percebe que no ambiente escolar é dada ênfase ao modelo fórmula-aplicação, assim é ensinado um conjunto de fórmulas e depois cabe ao aluno escolher a fórmula correta para resolver problema proposto.

Desta forma as ideias utilizadas pelo estudante passam despercebidas e sem significado. Os problemas de Combinatória exigem dos estudantes uma tomada de decisão, na elaboração dos possíveis caminhos que levam a solução. De acordo com Morgado et al (1991, p. 2),

Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução.

De acordo com Silveira (2016), a Análise Combinatória apresenta dificuldade de natureza conceitual. Nesse sentido, é necessário realizar um trabalho em sala de aula que valorize a compreensão dos conceitos referente a este tópico, já que o conhecimento das fórmulas garante muito pouco sobre como proceder em determinados problemas. O pesquisador, acrescenta que os problemas de Combinatória não mantêm o mesmo padrão em suas resoluções. Assim, quando estamos diante de um problema referente a este tópico, é necessário pensar, em seguida fazer anotações, com o intuito de conhecer sua natureza, e como se procede, por exemplo, diante de uma enumeração sistemática.

É preciso ressaltar que as estratégias como – a construção da árvore de possibilidades, utilização de tabelas, listar todas as possibilidades e o Princípio Fundamental da Contagem tem um papel crucial no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Em contrapartida, o PCN+ (BRASIL, 2002), diz que o raciocínio combinatório é uma forma de pensamento matemático



que consiste em decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis.

Para este documento, esta nova forma de pensar em Matemática não deve ser aprendida como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação.

Nesse sentido, Silveira (2016) diz que as novas pesquisas devem valorizar a compreensão e a formalização das ideias essenciais de Combinatória e isso pode acontecer quando colocamos o aluno em um ambiente que leve à reflexão e permita que ele tome decisões adequadas, e organize as informações, diante do problema proposto, desenvolvendo uma forma de pensar matemático, o raciocínio combinatório.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

De modo geral, podemos afirmar que os resultados obtidos com o questionário aplicado aos alunos foram preocupantes. Constatamos que os mesmos não tiveram qualquer aproximação com o estudo da Análise Combinatória.

Por outro lado, evidenciamos um ponto bastante positivo que a presença do raciocínio combinatório, visto que a maioria dos alunos demonstraram possuí-la. Assim, cabe ao professor trabalhar com diversos problemas, os quais permitam aos alunos utilizarem alguns métodos de contagem. Observe a utilização do Princípio Fundamental da Contagem:

Figura 01: Resolução do problema utilizando o Princípio Fundamental da Contagem.

2 - Cinco cavalos disputam um páreo qual o número de possíveis resultados para as 2 primeiras colocações?

$$\begin{array}{l}
 \text{1ª colocação} \\
 \text{2ª colocação}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 \text{1111} \\
 \text{1111}
 \end{array}
 \right\} = 5 \times 4 = 20$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Em relação às estratégias utilizadas, percebemos que os alunos conseguiram resolver as questões propostas referentes aos diversos tipos de agrupamentos, utilizando o Princípio Fundamental da Contagem. Podemos relatar também que alguns alunos conseguiram utilizar o diagrama de árvore para resolução da questão proposta.



Figura 02: Resolução do problema adotando a árvore de possibilidade.

1 - Daniela pretende ir à festa de São João na cidade de Alagoinha-PB. Considerando que ela tem 5 blusas e 4 saias. Determine quantos modos diferentes ela pode se vestir para ir à festa.



20 modos diferentes.

5 blusas
4 saias

Fonte: Dados da pesquisa.

Nas questões propostas os alunos poderiam utilizar os conceitos referentes aos agrupamentos que a questão abordava e utilizar o Princípio Fundamental da Contagem; poderiam também enumerar todas as possibilidades para depois contar. E isso foi feito de modo intencional, visando que os alunos utilizassem as estratégias matemáticas que eles achassem adequadas.

Notamos que um dos principais equívocos cometidos pelos alunos foi em relação à retirada de dados dos problemas propostos. Este erro é bastante comum entre os educandos, visto que a maioria tem dificuldades de interpretação.

Com a análise do questionário aplicado aos professores, percebemos que a maioria estava ciente da importância de uma abordagem das ideias iniciais de Análise Combinatória no Ensino Fundamental e destacaram que seria importante para uma abordagem no Ensino Médio. Veja na figura a seguir a resposta de um professor:

Figura 03: Resposta dada pelo professor (a) referente a questão 1.

2) As dificuldades estão, principalmente, em nem sempre ter muito o assunto no ensino fundamental e não conseguem, na maioria das vezes, compreender e aplicar os conceitos no ensino médio. Outra dificuldade é o fato de se resolver as questões por lógica mecânica, o que acaba gerando uma grande parte do trabalho ainda não está habituado a isso.

Fonte: Dados da pesquisa.

Os professores destacaram que os alunos têm dificuldades de diferenciar os tipos de agrupamento, ou seja, se arranjo ou combinação. Por outro lado, destacamos uma resposta dada por dois professores que afirmaram que uma das principais dificuldades era a insegurança do docente em abordar tal conteúdo em sala de aula. Outro ponto interessante destacado pelo professor era a baixa estima dos alunos e em consequência disso, surge a falta de interesse pela aprendizagem e isso não ocorre só no Ensino da Análise Combinatória, mas também em outros



conteúdos. Confrontando o questionário aplicado aos alunos dos Municípios de Alagoinha - PB, Mulungu - PB e Rio Tinto - PB, com que os professores desses municípios responderam.

Verificamos que as estratégias estavam de acordo com que os professores mencionaram no questionário. Assim destacamos as estratégias mencionadas pelos professores: estimular a resolução de problemas envolvendo contagem através de modelos (diagrama de árvores, tabelas, agrupamentos, entre outros), de forma que os estudantes compreendam o que estão fazendo. Vale destacar também que é dispensado inicialmente questões envolvendo resultados relativamente grandes e impossíveis de serem representados através dos modelos.

De modo geral, os professores relataram que o conteúdo de Análise Combinatória é deixado de lado por estar no final do livro didático e que muitas das vezes não dá tempo de ser lecionado. Porém, alguns reconhecem a importância da Análise Combinatória e relataram que é preciso deixar alguns conteúdos de lado e dar prioridade ao estudo dessa temática.

Porém, isso não é o bastante; é preciso que essa ideia seja colocada em prática. Uma vez que, pela pesquisa, percebemos que mesmo sabendo da importância dessa temática, os professores deixam esse estudo de lado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante das dificuldades encontradas no Ensino de Análise Combinatória, tanto para o professor como para o aluno, refletimos que é preciso um trabalho que utilize metodologias diversificadas, que facilite o ensino dessa temática.

No entanto, evidenciamos pela aplicação do questionário que os problemas de contagem têm uma grande importância no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Com isso, é interessante trabalhar com problemas, nos quais o aluno pode fazer todos os agrupamentos possíveis para depois contá-lo.

Ficou evidenciado que um percentual significativo dos estudantes que participaram da pesquisa resolveu os problemas utilizando o Princípio Fundamental da Contagem. Diante da pesquisa, constatamos um dado alarmante no Ensino de Análise Combinatória.

Com o questionário aplicado aos alunos, percebemos que as turmas, na qual a pesquisa foi realizada, não tiveram o Ensino de Análise Combinatória, ou seja, os professores, por alguma razão, trabalharam com essa temática na sala de aula. Podemos afirmar isso por vários motivos, como: todas as questões que foram resolvidas foram utilizadas o Princípio



Fundamental da Contagem, quando a questão não utilizava o Princípio Fundamental da Contagem de uma forma direta, a maioria dos alunos não conseguia resolver a questão. Nos questionários aplicados, verificamos que não foi utilizado nenhum tipo de fórmula correspondente a qualquer tipo de agrupamento.

Podemos destacar que mesmo não conhecendo alguns conceitos importantes para o estudo dessa temática, os alunos utilizaram algumas estratégias para resolver as questões, mostrando que tem o raciocínio combinatório.

Seria interessante trabalhar com questões que utilize o Princípio Fundamental da Contagem, além de ser importante trabalhar com questões que o aluno pode representar através de modelos, ou seja, que o número de agrupamentos seja pequeno para que os estudantes possam enumerar para depois contá-los.

Nesta perspectiva, o estudo da Análise Combinatória não deve ser deixado de lado, já que essa temática trabalha com diversas situações do nosso dia a dia. O professor deve ser cauteloso na escolha dos conteúdos a serem trabalhados e durante o seu planejamento não pode deixar essa temática de lado. Desculpas como: “o assunto está no final do livro didático” ou “é um assunto difícil para o entendimento dos alunos”, são inadmissíveis. Não devem ser levadas em consideração, pois ao conhecer as potencialidades dessa temática fica claro o quanto se faz necessária na vida dos alunos.

Assim, além dos objetivos atingidos, essa pesquisa nos proporcionou refletir sobre o processo ensino-aprendizagem da Análise Combinatória. Desta forma, é recomendável que os docentes trabalhem com metodologias diversificadas, que facilitem esse processo.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática: ensino médio. Brasília, DF: MEC, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, DF: MEC, 2002.

FILHO, B.B.; SILVA, J. **Matemática participação e contexto**. São Paulo: FTD, 2008.



HARIKI, S. **Conectar problemas: uma nova estratégia de resolução de problemas combinatórios.** Revista Educação e Matemática, nº37, 1º trimestre de 1996 (Portugal).

MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J.B.P.; CARVALHO, P.C.P.; FENANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade.** Rio de Janeiro: IMPA, 1991.

ROXO, E. et al. **Matemática 2º ciclo, 2ª série.** 2ªed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1944.

SILVEIRA, A.A. **Análise Combinatória em sala de aula: uma proposta de ensino-aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas.** (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). UEPB, Campina Grande, Paraíba, 2016.