

## TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES UTILIZANDO O GEOGEBRA

Jóbson Hugo de Sousa Soares <sup>1</sup>  
Albérico Teixeira Canário de Souza <sup>2</sup>  
Emanuel Gomes Lourenço <sup>3</sup>  
Elthon John Rodrigues Medeiros <sup>4</sup>

### INTRODUÇÃO

De maneira geral, os alunos possuem certa dificuldade ao se trabalhar com gráficos de funções, mesmo entendendo de forma satisfatória a parte algébrica do conteúdo, gerando uma certa repulsão e pouco desenvolvendo essa competência em vida acadêmica, esse fato é observado nas turmas do primeiro ano do ensino médio que temos trabalhado ao longo da vida docente e também de vários colegas da área bem como dos próprios alunos, refletidos em suas avaliações ao longo do ano letivo.

Pensando neste fato, em melhorar o aprendizado dos alunos, que buscamos trabalhar os gráficos de uma função com a utilização de um *software* chamado de Geogebra que é um *software* de geometria dinâmica.

Neste trabalho vamos utilizar o software geogebra, criado por Markus Hohenwarter, é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o processo de ensino e de aprendizagem da matemática, sendo utilizado do ensino básico ao ensino superior (HOHENWARTER, 2004).

Além de poder ser baixado para computadores, notebooks, tablets e smartphones, o geogebra é um software totalmente gratuito e com várias ferramentas simples de usar sendo acessível para qualquer aluno ou professor, podendo ser baixado através do endereço <https://www.geogebra.org/download>.

Trabalhamos com um público bastante heterogêneo, muitos deles oriundo da rede pública, que sempre nos relatam as dificuldades que possuem de trabalhar com gráfico de funções, deficiência trazida já dos anos anteriores e que é potencializada com o tempo. Não sabemos destacar ao certo o porquê de tanto problema, o fato é que ele existe e buscamos uma forma de minimizá-lo.

Foi observando o problema que buscamos trazer o *software* geogebra para sala de aula como um instrumento facilitador para o aprendizado dos estudantes, buscando uma melhor compreensão e também participação dos alunos tendo em vista que se trata de uma ferramenta tecnológica e dinâmica, que vem para somar no processo de ensino aprendizagem por ser de certa forma algo diferenciado e inovador em sala de aula.

Sendo assim, nossa pesquisa utiliza uma metodologia de ensino através do uso do software geogebra, na busca por gerar um maior aprendizado para os alunos no conteúdo de gráficos de uma função, tornando a visualização através do *software* de geometria dinâmica, que como o nome sugere é bastante dinâmico, totalmente diferente do quadro, que é estático e que muitas vezes deixa o aluno confuso, principalmente quando os parâmetros da função se alteram gerando rotações e translações do gráfico que será o principal objeto do nosso

<sup>1</sup> Professor do Instituto Federal do Rio Grande do Norte - IFRN, [jobson.soares@ifrn.edu.br](mailto:jobson.soares@ifrn.edu.br);

<sup>2</sup> Professor do Instituto Federal do Rio Grande do Norte - IFRN, [alberico.canario@ifrn.edu.br](mailto:alberico.canario@ifrn.edu.br);

<sup>3</sup> Professor do Instituto Federal do Rio Grande do Norte - IFRN, [emanuel.lourenco@ifrn.edu.br](mailto:emanuel.lourenco@ifrn.edu.br);

<sup>4</sup> Professor do Instituto Federal do Rio Grande do Norte - IFRN, [elthon.medeiros@ifrn.edu.br](mailto:elthon.medeiros@ifrn.edu.br);

trabalho, manipular os parâmetros de uma função e observar o seu comportamento no gráfico, de que forma a mudança destas partículas deve influenciar no gráfico de uma função.

Se tivermos funções reais quaisquer, os movimentos de translação e rotação não alteram o formato do seu gráfico no plano cartesiano, apenas alteram sua posição no espaço continuando com as mesmas propriedades que possuíam inicialmente, esses movimentos são chamados de movimentos rígidos.

Considerando  $f(x)$  e  $g(x)$  funções reais quaisquer, de domínio e contradomínio bem definidos e  $k$  uma constante real, temos:

$$g(x) = f(x + k) \text{ (Translação horizontal);}$$

$$g(x) = f(x) + k \text{ (Translação vertical);}$$

$$g(x) = -f(x) \text{ (Rotação ao redor do eixo } x\text{);}$$

$$g(x) = f(-x) \text{ (Rotação ao redor do eixo } y\text{).}$$

Dessa forma o aluno deve compreender que a função  $f(x+3)$  é a mesma função de  $f(x)$ , porém transladada três unidades para a esquerda, assim como a função  $f(x)+2$  é a mesma função  $f(x)$  translada duas unidades para cima. Essa explanação no quadro é muito tortuosa, pois temos que ficar esboçando vários gráficos para tentar mostrar aos alunos como funciona na prática essa locomoção do gráfico. Sendo que com o geogebra podemos com um comando e de forma dinâmica mostrar como o gráfico se modifica ao alterarmos o valor da constante  $k$  na função, pois em tempo real o gráfico vai mudar de lugar no plano cartesiano, porém mantendo sua mesma forma, o que não conseguimos fazendo a mal, tendo em vista que sempre haverá imperfeições fazendo a mão livre. A agilidade como o geogebra modifica os parâmetros da função e que o gráfico se movimento na frente dos alunos faz toda diferença na explicação e também no entendimento dos estudantes.

Buscamos ter o controle do aprendizado através de perguntas diretas a turma, bem como lista de exercícios e exercícios resolvidos no quadro com ampla participação dos alunos que se mostram entusiasmados com a utilização do geogebra, tendo muitos deles baixado para os seus *smartphones*, que é algo muito positivo pois pode trabalhar vários conteúdos de matemática não somente os gráficos. Ao longo das aulas, dúvidas vão surgindo e o instrumento tecnológico nos ajuda a fortalecer nossas palavras mostrando na prática o que ocorre no gráfico e visivelmente sanando as dúvidas dos alunos, que é o mais importante, ter a interação do aluno com o professor e ele conseguir compreender o que se deseja.

Percebemos que as notas dos alunos no conteúdo de gráficos melhoraram em relação ao conteúdo anterior, ao serem questionados os alunos relatam que o geogebra foi de fundamental importância para o entendimento, por ser dinâmico, com a interface de fácil compreensão e que viram na prática as definições passadas pelo professor, que no quadro possuíam um pouco de dificuldade por não fazer relação com o que era mencionado pelo professor.

Dessa maneira, consideramos proveitoso o uso do *software* e recomendamos o seu uso em sala de aula para uma melhor experiência no conteúdo de funções especialmente ao se trabalhar com gráficos, o trabalho do professor é facilitado e o ensinamento para os alunos se tornar melhor e mais natural, além de aproximar eles de algo que utilizam bastante que é o aparelho celular, tendo em vista que podem baixar e utilizar em casa o geogebra, para estudar inclusive outros conteúdos, gerando assim autonomia aos estudantes.

## METODOLOGIA (OU MATERIAIS E MÉTODOS)

Tendo em vista as dificuldades apresentadas pelos alunos para o entendimento dos movimentos dos gráficos de funções, buscamos a utilização do geogebra como recurso

metodológico na turma de 1º ano do ensino técnico integrado em multimídia Instituto Federal do Rio Grande do Norte, Campus Cidade Alta. A turma conta com 36 alunos regulares, que cursaram o nível fundamental tanto em escolas públicas como privadas da rede de ensino do nosso estado, sendo assim um público bem heterogêneo. Os materiais utilizados foram: Um projetor multimídia, um notebook, quadro branco e os pinceis para o quadro. Utilizamos também um apontador de slide com laser na ponta, que ajuda, mas não é imprescindível.

Inicialmente foram destinadas duas aulas de 45 minutos para se trabalhar especificamente com o geogebra e os gráficos das funções, que é nosso objeto de estudo. Antes disso, em duas aulas anteriores foi introduzido de maneira teórica como ocorre o movimento dos gráficos ao se adicionar um parâmetro  $k$  real a uma função real qualquer. Neste momento percebemos que a compreensão dos alunos não era geral e que o quadro não era suficiente para explicar de maneira clara o que ocorria de fato com o gráfico ao se modificar o valor da constante  $k$ .

Apresentamos o *software* aos alunos, mostramos sua interface e algumas das ferramentas, anunciamos o endereço do site para baixar, e mencionamos que poderia ser baixado para o *smartphone* também. Ao inserir o gráfico no plano central do geogebra, ativamos uma de suas ferramentas que é o controle deslizante e através dele podemos modificar o parâmetro  $k$  como quisermos. Considerando a função  $f(x+k)$ , os alunos observaram que quando  $k$  aumentava a função se deslocava  $k$  unidades para esquerda e quando  $k$  diminuía a função se deslocava  $k$  unidades para a direita. Da mesma forma quando tomamos a função  $f(x)+k$ , observamos que a função se deslocava para cima ao se aumentar  $k$  e para baixo ao se diminuir  $k$ . Em relação a função  $-f(x)$ , observamos que a função rotaciona em relação ao eixo  $x$ , e  $f(-x)$  rotacional em relação ao eixo  $y$ , neste momento fizemos uma retomada ao conteúdo de função par, que a função par não sofre rotação em relação ao eixo  $y$ , pois  $f(x) = f(-x)$ , o que fez muito sentido para os alunos ao ser relatado.

Achamos esse momento muito rico, pois os alunos conseguem visualizar de forma dinâmica como o gráfico de uma função se movimento ao se modificar o parâmetro  $k$ . Que por mais que fosse mostrado no quadro, que também é importante, que fique bem claro, mas que a compreensão do aluno ao ver ocorrendo diante dos seus olhos, não há comparação com qualquer forma que for observado no quadro, sendo capaz de fixar melhor esse entendimento.

Durante a aula, perguntas iam sendo feitas com determinados gráficos de como se daria a translação ou rotação, e os alunos demonstravam participação, alguns já mostravam no seu próprio celular com o geogebra baixado. Listas de exercícios foram resolvidas e o *feedback* positivo dos alunos foi imediato assim como em suas notas no decorrer do bimestre que apresentaram melhora, participação nas aulas também foi outro aspecto positivo observado até mesmo a procura pelo horário do atendimento ao aluno que passou a ser mais procurado, para tirar dúvidas, fruto de uma interação maior com a disciplina.

## DESENVOLVIMENTO

Observando os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), podemos ver que o uso de diversas tecnologias já estão inseridas em nosso contexto social há algum tempo, e que devemos não de hoje, mas para ontem, inseri-las no ambiente escolar para facilitar o entendimento dos alunos, tendo em vista que eles estão numa geração acostumados com a tecnologia e que já passou da hora de utilizarmos em sala, como afirma, Brasil (2000, pp. 11-12):

As novas tecnologias da comunicação e da informação permeiam o cotidiano, independente do espaço físico, e criam necessidades de vida e convivência que precisam ser analisadas no espaço escolar. A televisão, o rádio, a informática, entre outras, fizeram com que os homens se aproximassem por imagens e sons de mundos antes inimigáveis.

Como podemos ver, os Parâmetros, já alertavam sobre a importância de se inserir as tecnologias em sala de aula desde o ano 2000, como recurso tecnológico para auxiliar no aprendizado dos alunos. Desta forma, como a maioria dos alunos possuem celulares que são verdadeiros computadores, com acesso à *internet*, não podemos deixar de fora dos portões da sala de aula as ferramentas tecnológicas que existem e que são acessíveis a nós, pelo contrário temos que usar a nosso favor e envolver os alunos com elas.

Observemos o que os PCN já nos alertavam há praticamente 20 anos.

esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento (BRASIL, 2000, p.41).

Como vemos o uso do computador atrelado ao ensino de matemática, era pautado nos parâmetros de maneira que essa tecnologia não deve de forma alguma ficar fora de sala de aula.

Trazendo a tecnologia para sala de aula, o geogebra é uma importante ferramenta, que consegue fornecer uma visualização dinâmica, trazendo o interesse dos alunos que se tornam participativos e curiosos, pois o *software* reverte a estrutura estática do quadro fazendo com que o aluno aprenda melhor.

PRETTO, relata sobre a importância da manipulação do professor com a tecnologia,

A tecnologia não pode ser vista como uma ferramenta auxiliar para realizar o mesmo tipo de ensino. Ela nos traz uma nova forma de organizar a produção de conhecimento. Um computador e um software apenas facilitam a comunicação e a informação. Quem os transforma em material didático é o professor qualificado. Por isso o docente tem de ser um hacker do bem e explorar a rede até que fique imerso na cibercultura. Só assim, ele enxergará os novos recursos como ferramentas educacionais e como instrumentos para adaptar a sua realidade e a sua necessidade (PRETTO, 2012, p.30).

Assim, vemos que o professor deve estar preparado e engajado no desafio de aprender para poder ensinar e obter melhores resultados, no sentido da aprendizagem, de seus alunos, pois a tecnologia sozinha não deve ser suficiente para conduzir a aula e obter o que se espera dos alunos.

Os PCN, relatam sobre a utilização de programas de computadores, de sua importância no sentido do pensar matematicamente e como pode beneficiar os alunos em sala de aula.

Os programas de expressão apresentam recursos que provocam, de forma muito natural, o processo que caracteriza o “pensar matematicamente”, ou seja, os alunos fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas, criam estratégias para resolver problemas. (BRASIL, 2006, p.88).

A fonte é 2006, ou seja, já se chamava a atenção, para esta inserção em sala de aula, hoje então é imprescindível que utilizemos a tecnologia a nosso favor.

Nossos alunos hoje possuem verdadeiros computadores em suas mãos, com acesso a *internet* e a vários recursos. Essa discussão sobre a inserção da tecnologia em sala de aula vem sendo discutida tem algum tempo, como vimos, talvez por falta de recursos financeiros e de acesso, a sua inserção em sala de aula vem caminhando de forma vagarosa, contudo hoje em dia não temos mais o que nos queixar com relação ao acesso, temos em mãos verdadeiras máquinas que podemos levar e explorar em nossas aulas que só trazem benefícios diretos enriquecendo nossa forma de ensinar e nossa prática docente.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Apesar de não termos feito questionários ou qualquer tipo de controle estatístico, acreditamos que a utilização do software como ferramenta de ensino foi bem positiva, pois a participação dos alunos em sala de aula tanto como no atendimento para tirar dúvidas, essa busca pelo aprendizado vimos que aumentou após estas aulas.

O interesse de buscar baixar o geogebra para trabalhar em casa a participação efetiva com perguntas e também respondendo o que era pedido, como questões em sala e exercício, demonstram que o saldo foi de fato positivo.

Os conceitos de rotação e translação de gráfico ficou muito natural segundo os relatos dos próprios alunos em sala de maneira bem espontânea, tornando o conteúdo mais simples e até divertido na visão de alguns.

Como já relatamos, as notas dos alunos aumentaram em relação as últimas atividades avaliativas, esse aspecto sozinho não pode garantir que foi devido a utilização do geogebra, mas diante de tantos elogios e do sentimento de aprendizagem que verificou-se em sala, podemos imaginar que a utilização do recurso teve seu fator positivo atrelado ao sucesso dos alunos que diziam ter assimilado melhor o conteúdo a partir da visualização do software. Que podia ser observado até nas discussões entre eles mesmos dentro da sala, com alunos portando o aplicativo em seus celulares.

Então para nós o *feedback* positivo dos alunos, transcrito em suas participações mais constantes em sala de aula, busca pelo conhecimento nos horários de atendimento e também tendo revertido em notas nas avaliações bimestrais demonstram que o rumo está correto, tendo em vista a própria satisfação dos estudantes.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como principal objetivo melhorar o nível de aprendizagem dos alunos utilizando uma ferramenta tecnológica não tão comum no cotidiano dos alunos de maneira que a atenção, compreensão e participação deles fossem aumentadas. Neste caso ao término das aulas e com os aspectos positivos que observamos, relacionados a aumento da participação e procura do saber, bem como da atenção nas aulas e preocupação em resolver os exercícios propostos em sala de aula e para casa. Não esquecendo do aumento das notas da maioria, que não pode ser deixado de lado, tendo em vista que é um dos principais objetos de avaliação que possuímos no ensino regular, podemos concluir que o saldo foi totalmente positivo.

A busca por tornar a aula mais atrativa partiu do professor, mas a interação dos alunos e a manipulação do *software* de maneira correta, são fundamentais para o sucesso da aplicação da metodologia inovadora em sala, pois como já foi mencionado, não adianta ter a ferramenta e não saber manipular de forma eficiente, pois será muito mais um pretexto de se utilizar algo novo e diferenciado do que propriamente melhorar o nível de aprendizagem dos alunos em sala de aula.

Esperamos que os alunos possam continuar trabalhando com o geogebra e buscando cada vez mais o conhecimento, o programa traz a curiosidade ao aluno, tendo em vista que está no seu celular, o acesso a informação está a um clique, de algo que ele interage diariamente, nada mais justo que possa estudar matemática com esse objeto que a maioria tem acesso. Pelo que vimos deles, continuarão fazendo uso do aplicativo em seu *smartphone*, pois acharam de fácil acesso e muito interativo, que é uma das vantagens do programa.

Espera-se, também que esse trabalho possa ajudar a outros professores interessados em inovar em sala de aula e que não tem ideia de como proceder. No conteúdo de funções ou qualquer outro que se encaixe no programa, como geometria, por exemplo, que possui várias ferramentas voltadas para esse conteúdo, desde que seja para somar e contribui com a aprendizagem novas ideias são bem-vindas. Além disso, desejamos inserir outras aulas, no

contexto de funções específicas utilizando o geogebra, como função Afim, Quadrática, Exponencial e Logarítmica, sempre com o intuito de ajudar no que for possível os nossos alunos a melhorarem seu rendimento em sala de aula.

**Palavras-chave:** Geogebra; Gráficos de funções; Translação de gráfico; Rotação de gráficos; *softwares* para o ensino.

## REFERÊNCIAS

BRASIL, Secretária de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio) – Linguagens, Códigos e suas Tecnologias**. Brasília, 2000. Disponível em <[http:// portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/14\\_24.pdf](http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/14_24.pdf)> Acesso em 23 de setembro 2019.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Básica, **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza: matemática e suas tecnologias**. v. 2. Brasília: MEC, 2006, p.67-98.

HOHENWARTER, M., **Bidirectional dynamic geometry and algebra with GeoGebra**. Proceedings of the German Society of Mathematics Education's annual conference on Mathematics Teaching and Technology. Soest, Germany, 2004.

PRETTO, N. **Como o professor pode usar a internet a seu favor**. Revista Nova Escola. São Paulo. Edição Especial n.42, jul. 2012.