

## LUZ, CÔNICAS, REFLEXÃO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DAS CÔNICAS

Kaliny Ferreira do Nascimento<sup>1,2</sup>  
Anete Soares Cavalcanti<sup>3</sup>

### INTRODUÇÃO

Registros históricos apontam que as cônicas já eram estudadas desde o século IV a.C. por Hipócrates de Chios (470 – 410 a.C.). Sua descoberta está relacionada ao famoso problema da duplicação do cubo, entretanto o trabalho mais famoso a respeito foi As Cônicas, publicado por Apolônio (262 – 190 a.C.).

Apolônio mostrou que a partir de um único cone seria possível gerar todas as cônicas variando o ângulo de inclinação do plano que o seccionaria. Este foi o primeiro passo para apresentar as cônicas como uma família de curvas e para relacionar suas características e propriedades. (ALVES JÚNIOR, 2015)

Com o avanço do estudo das cônicas, percebeu-se que elas possuíam propriedades de reflexão, devido a seus formatos, que poderiam ser aplicadas em áreas diversas como na engenharia civil, na astronomia e na medicina.

Atualmente, o estudo das cônicas é um conteúdo programado para ser trabalhado no último ano do ensino médio, embora alguns programas de ensino o têm retirado de seus currículos. Um exemplo disso é o caso do estado de Pernambuco que restringiu o ensino das cônicas apenas nas escolas do sistema de educação integral. (SEE, 2013)

Muitas são as aplicabilidades das propriedades refletoras das cônicas no nosso cotidiano e pouco elas são exploradas em sala de aula. Além de estimular os alunos através de aulas lúdicas com experimentos práticos, elas são úteis para consolidar a ideia do conceito dessas cônicas e da localização de seus elementos.

Durante a pesquisa acerca do tema foram encontrados trabalhos que apresentaram estudos sobre as propriedades refletoras das cônicas, inclusive indicando sequências didáticas para aplicar em sala de aula utilizando o programa GeoGebra como em LOUZADA, S., 2013; MONTEIRO, R. M., 2014. Entretanto, há escolas que não possuem recursos necessários para a execução deste tipo de aula, portanto viu-se a necessidade de se formular uma sequência didática que contemple o conteúdo das cônicas apresentando-o de maneira lúdica aos alunos utilizando recursos de fácil acesso e de baixo custo.

Na maioria das atividades diferenciadas propostas optou-se por materializar os conceitos trabalhados no livro didático concordando com o que diz Da Silva et al. (2016, p. 4) que “o material concreto é uma forma de apresentar ao aluno uma maneira mais fácil e palpável de aprender matemática e como ela pode ser usada no nosso cotidiano.”

Essa pesquisa tem por objetivo geral sugerir uma proposta de sequência didática para auxiliar professores durante o processo de ensino-aprendizagem das cônicas para alunos do ensino médio. Os objetivos específicos são compreender a definição dos elementos determinantes das cônicas e indicá-los algébrica e geometricamente, construir modelos geométricos que representem as cônicas e suas propriedades refletoras, associar as

<sup>1</sup> Mestranda do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) pela Universidade Federal Rural de Pernambuco - PE, [kaliny.ferreira@yahoo.com.br](mailto:kaliny.ferreira@yahoo.com.br);

<sup>2</sup> Professora de Matemática da EREM Aníbal Falcão, escola estadual de Pernambuco;

<sup>3</sup> Professora orientadora: Dra., Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco – PE, [anete.soares@ufrpe.br](mailto:anete.soares@ufrpe.br)

propriedades refletoras das cônicas às suas utilizações na sociedade (a fim de dar significado ao estudo desse objeto matemático).

## **METODOLOGIA (OU MATERIAIS E MÉTODOS)**

Esse artigo é um recorte de uma pesquisa de mestrado que está em andamento cujo objetivo será analisar os impactos do lúdico no ensino das cônicas nas aulas de matemática no ensino médio.

Como a pesquisa supracitada ainda está na fase de análise de dados, pretende-se neste trabalho realizar uma proposta de sequência didática baseada em atividades lúdicas acerca do estudo das cônicas e de suas propriedades refletoras apresentando como resultados a análise de comportamento dos alunos submetidos a esse processo.

O trabalho foi uma pesquisa aplicada de abordagem qualitativa realizada na Escola de Referência em Ensino Médio (EREM) Aníbal Falcão, localizada em Tejipló, bairro de Recife-PE.

O procedimento utilizado foi o método comparativo acerca das percepções do professor das reações dos alunos em dois momentos. Em um primeiro momento foi aplicada uma sequência didática tradicional, isto é, aulas expositivas no quadro ou de exercícios com o auxílio do livro didático (SOUZA; GARCIA, 2016). No segundo momento promoveu-se a produção de atividades lúdicas diferenciadas como a construção de modelos matemáticos concretos, observação das seções cônicas a partir de feixes de luz, construção das cônicas com barbante, dobraduras, experimentos de reflexão e aula de campo.

Os materiais utilizados no segundo momento são, em sua grande maioria, de fácil acesso e baixo custo como lanterna, cartolina, barbante, régua, compasso, tachinhas, isopor, entre outros, além de reutilizar materiais que seriam descartados promovendo um impacto positivo no meio ambiente. Alguns dos materiais produzidos foram expostos na II Feira de Matemática da EREM Aníbal Falcão pelos alunos da turma do 3º ano A.

## **DESENVOLVIMENTO**

A parte prática da pesquisa se dividiu em duas etapas. A primeira, que apresentou as aulas sob uma abordagem tradicional e a segunda utilizando atividades lúdicas.

### **Parte I: Sequência didática tradicional**

Esta etapa foi realizada seguindo apenas as orientações do livro didático adotado em sala (SOUZA; GARCIA, 2016) acrescida de uma aula expositiva sobre as propriedades refletoras das cônicas.

Nesse momento seguiu-se as recomendações no livro didático e os alunos não participaram em momento algum das construções, mantendo o processo de ensino-aprendizagem sob responsabilidade unilateral do professor, característica do ensino tradicional.

### **Parte II: Introdução de atividades lúdicas nas aulas**

Apresentaremos aqui a sequência didática desenvolvida através de pesquisa, com o objetivo de tornar mais lúdico o ensino de cônicas.

Tema: As cônicas e suas propriedades refletoras.

Público alvo: alunos do 3º ano do ensino médio.

Duração: 12 aulas (aproximadamente 4 encontros com duas aulas cada e 1 encontro de quatro aulas para a visita técnica).

Disciplina: Matemática.

Objetivo geral: Apresentar uma sequência didática utilizando atividades lúdicas no ensino de das cônicas e suas propriedades refletoras.

Objetivos específicos:

1. Reconhecer as características de cada cônica;
2. Identificar os elementos das cônicas;
3. Comprovar a definição de cada cônica através de teste de medição;
4. Identificar as retas tangentes às curvas;
5. Compreender e aplicar as propriedades refletoras das cônicas;
6. Motivar os alunos a estudarem matemática.

- Atividade 1: Experimento com lanterna. (Duração: 1 aula)

Materiais adotados: notebook, datashow e lanterna.

Foi apresentado inicialmente um vídeo (CONIC, 2015) mostrando a relação de cada cônica com o ângulo de inclinação do plano que secciona o cone duplo em relação ao seu eixo.

Em um ambiente suficientemente escuro, direcionou-se a lanterna para a parede e, a medida que se inclinou a lanterna em relação à parede, a intersecção dos feixes de luz com a parede desenhava as cônicas. Os feixes de luz que saem da lanterna são emitidos em forma de cone e a parede se comporta como um plano que o secciona. A cada figura nova que surgia os alunos eram instigados a refletir para responder as seguintes perguntas:

1. Que tipo de ângulo (reto, agudo maior que o da geratriz do cone, agudo igual ao da geratriz do cone ou agudo menor que o da geratriz do cone) o plano faz com o eixo do cone?

2. Qual é a cônica formada?

Através da variação da inclinação pode-se obter uma circunferência, uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole.

- Atividade 2: Construções das cônicas com barbante. (Duração: 3 aulas)

A segunda atividade diferenciada proposta foi a construção das cônicas pelos alunos.

Materiais utilizados: cartolina, barbante, régua, esquadro, lápis e tachinhas.

Essa atividade seguiu o procedimento de construção sugerido pelo livro didático adotado em sala, porém os próprios alunos realizaram a tarefa.

Um dos procedimentos de construção realizado foi o da elipse descrito abaixo:

“Para esboçarmos uma elipse, marcamos dois pontos sobre uma folha de papel ( $F_1$  e  $F_2$ ) e fixamos nesses pontos as extremidades de um barbante. Com um lápis na posição indicada, traçamos a curva contínua, de maneira que o barbante permaneça constantemente esticado, obtendo-se ao final uma elipse.” (SOUZA; GARCIA, 2016, p. 89)

Após a construção, os alunos marcaram dois pontos quaisquer sobre a elipse e com o auxílio da régua verificaram que a soma das distâncias de qualquer um desses pontos aos pontos  $F_1$  e  $F_2$  é constante. Em seguida, identificaram na figura os elementos da elipse.

Foram realizadas também as construções da hipérbole e parábola conforme as instruções de Souza e Garcia, 2016, encontrados nas páginas 97 e 104. Sempre após as construções foram feitos os testes de medições com no mínimo dois pontos distintos da curva para verificar as definições de cada uma, além de realizar a identificação dos elementos de cada cônica.

- Atividade 3: Construção das cônicas usando dobradura. (Duração: 2 aulas)

O terceiro experimento realizado foi adaptado do trabalho de Hartung e Meirelles (2010) e de vídeos do youtube (CONSTRUÇÃO, 2015) que utiliza dobraduras para que através da marcação das retas tangentes às curvas fossem obtidas as cônicas.

- Atividade 4: Experimento de reflexão. (Duração: 2 aulas)

- i. Propriedade refletora da parábola

Dada uma parábola, a reta tangente a um ponto P da parábola forma ângulos iguais com a reta que passa por P paralela ao eixo de simetria e como segmento que liga P ao foco.

Pela propriedade de reflexão da luz, se houver uma fonte de luz situada no foco de um espelho parabólico todos os seus raios refletidos serão paralelos ao eixo de simetria. Também vale o contrário, quando os raios de luz externos à parábola chegam à superfície desse espelho paralelamente ao eixo de simetria serão refletidos para o foco.

Para simular essa propriedade refletora da parábola utilizou-se um antena parabólica, papel alumínio, dois lasers e desodorante aerosol.

Cobriu-se a superfície côncava da antena com papel alumínio tomando cuidado de evitar ao máximo formar bolhas. Em um ambiente com pouca luz, direcionou-se os lasers à essa superfície da antena de modo que os raios de luz fossem paralelos ao eixo de simetria do paraboloide. Para tornar os raios dos lasers visíveis, borrifou-se desodorante aerosol no ar ao longo do trajeto da luz.

Após repetir esse procedimento em vários pontos do paraboloide, verificou-se que os raios sempre se cruzavam em um determinado ponto (foco das parábolas).

#### ii. Propriedade refletora da elipse

A reta tangente à elipse num ponto P forma ângulos iguais com os segmentos que unem P aos focos. Se houver uma fonte de luz situada em um dos focos, todos os raios refletirão na superfície interna da elipse e se concentrarão no outro foco.

Para simular essa propriedade refletora da elipse utilizou-se folhas de isopor, folhas de papel laminado e laser.

Utilizando o molde, desenhou-se uma mesma elipse em cinco folhas de isopor. Retirou-se a parte interna da elipse e colou-se as placas umas sobre as outras e em seguida, esse bloco foi colado em uma folha inteira de isopor formando uma cavidade com borda elíptica. Nessa base, marcou-se os focos e a borda foi toda revestida de papel laminado.

O laser foi posicionado horizontalmente em um dos focos de maneira que a luz refletisse na borda da elipse. Verificou-se que independente da direção para onde se apontava o laser, a luz refletida sempre passava pelo outro foco.

#### iii. Propriedade refletora da hipérbole

Sabe-se que a reta tangente à hipérbole num ponto P forma ângulos iguais com os segmentos que unem P aos focos. Por isso, se uma luz for dirigida a um dos focos de um espelho hiperbólico será refletida em direção ao outro foco.

Para simular essa propriedade refletora da hipérbole construiu-se um modelo de bilhar hiperbólico em MDF no qual uma das bordas possui o formato de um ramo de hipérbole e a caçapa se localiza no ponto focal externo a esse ramo. Na borda da mesa cujo formato é hiperbólico inseriu-se uma placa de fórmica para refletir a luz.

Posicionou-se um laser horizontalmente sobre a mesa de maneira que a luz refletisse na borda na direção do foco interno à hipérbole. Verificou-se que independente da posição de onde o laser emitisse a luz, ela sempre passava pela caçapa (outro foco).

- Atividade 5: Visita ao Museu Interativo de Ciência de Pernambuco – Espaço Ciência (Duração: 4 aulas)

A última atividade lúdica proposta foi a visita ao Espaço Ciência que possui em seu acervo de exposições na área de percepção, algumas aplicações das propriedades refletoras das cônicas.

Os alunos assistiram a apresentação dos experimentos e os manipularam. Após a visita, eles escreveram relatórios sobre suas observações.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Durante a primeira etapa de ensino a maior parte dos alunos não demonstrou interesse acerca do tema. Consideraram, inclusive, bastante complicado e enfadonho. Diferente do que ocorreu durante a segunda fase de ensino das cônicas quando foi utilizada uma abordagem lúdica, onde os estudantes construíram modelos, realizaram experimentos e visitaram um museu de ciência.

No primeiro experimento da lanterna, simulou-se as secções de um plano em um cone. Todos os alunos conseguiram associar as figuras formadas na parede com suas respectivas curvas. Na atividade 2, foram trabalhada as definições e os elementos de cada curva. Segundo os alunos, ficou mais fácil compreender a relação da figura com a sua respectiva definição como lugar geométrico. Na atividade 3, os alunos exercitaram tanto as habilidades referentes à área de matemática como desenvolveram seu lado artístico e produziram várias cônicas usando dobraduras. A atividade 4 foi a que mais empolgou os alunos devido aplicação prática das propriedades refletoras utilizando luzes. Além do interesse dos alunos em estudar matemática, nessa atividade, foi reforçado a identificação dos elementos das cônicas, como focos e eixos. Pensou-se na aplicação da atividade 4 para que os alunos desenvolvessem competências como a observação científica e a conversão entre a linguagem visual e a escrita.

Em geral, o resultado após essas atividades lúdicas foram alunos mais interessados em assistir e participar das aulas de matemática, além de demonstrarem maior compreensão sobre o assunto quando indagados acerca do formato, dos elementos e das propriedades refletoras das cônicas.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática é, sem dúvida, uma ciência abstrata, entretanto, isso não implica que seja chata ou incompreensível. Para que essa ciência se aproxime mais da realidade dos alunos é válido que o professor utilize métodos de ensino divertidos e aplicados no cotidiano.

Nesse trabalho foram apresentados os resultados de uma aplicação de uma sequência didática para o ensino das cônicas baseada na ludicidade que obteve resultados satisfatórios.

Espera-se que esse artigo inspire professores de matemática a aplicarem às suas aulas, a proposta apresentada.

**Palavras-chave:** Propriedades refletoras das cônicas; Ensino de matemática; Lúdico.

## REFERÊNCIAS

ALVES JÚNIOR, Moacir Carvalho. **Seções cônicas: propostas de atividades com ênfase nas propriedades refletoras e aplicações.** 2015. vi, 65 f., il. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)—Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

CONIC Section 3D Animation. [s.i.]: Creative Learning, 2015. Son., color. Disponível em: <<https://youtu.be/HO2zAU3Eppo>>. Acesso em: 08 ago. 2019.

CONSTRUÇÃO da Elipse através do Origami. [s.i.]: Bruna Rodrigues, 2015. Color. Legendado. Disponível em: <<https://youtu.be/RNMrDGKYbxw>>. Acesso em: 08 ago. 2019.

CONSTRUÇÃO da Hipérbole através do Origami. [s.i.]: Bruna Rodrigues, 2015. Color. Legendado. Disponível em: <<https://youtu.be/p8pRw9RIrWY>>. Acesso em: 08 ago. 2019.

CONSTRUÇÃO da Parábola através do Origami. [s.i.]: Bruna Rodrigues, 2015. Color. Legendado. Disponível em: <<https://youtu.be/GEvgDMBLRDQ>>. Acesso em: 08 ago. 2019.

DA SILVA, Francisca Marlene et al. O uso do material concreto no ensino da matemática. In: **Anais do VIII Fórum Internacional de Pedagogia**. 2016.

HARTUNG, Guilherme Erwin; MEIRELLES, Rita. **Construção das Cônicas com Dobraduras**. 2010. Disponível em: <<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=27219> >. Acesso em: 10 ago. 2019.

LOUZADA, Silvia. **Relações entre cônicas e funções no ensino médio**. 2013. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Espírito Santo.

MONTEIRO, RUBENS MARINHO. **Resgate do Teorema de Dandelin no Estudo de Cônicas Com o Geogebra**. 2014. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Espírito Santo.

(SEE) Secretaria de Educação de Pernambuco. **Conteúdos de matemática por bimestre para o Ensino Médio: com base nos parâmetros curriculares do estado de Pernambuco**. 2013. Disponível em: <<http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/4171/Conteúdos%20de%20Matemática%20por%20Bimestre%20para%20o%20Ensino%20Médio.pdf>>. Acesso em: 11 ago. 2019.

SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. **#Contato Matemática, 2º ano**. São Paulo: Ftd, 2016. 3 v. (III).