VI CONGRESSO NACIONAL de EDUCAÇÃO
Conedu

EXPLORANDO A MATEMÁTICA DO SKATE: ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL ATRAVÉS DO SOFTWARE MAPLE

Adelmo Artur de Aquino [1]
Davi Ferreira de Lima Silva [2]
Murilo Carvalho Feitosa[3]
Otávio Paulino Lavor[4]

RESUMO

Esta pesquisa aborda a possibilidade de ensino de cálculo diferencial a partir da modelagem matemática aplicada a um sistema físico através do uso de funções de várias variáveis, bem como seus métodos de estudo, como é o caso da derivada direcional. Diante disso, esta abordagem diz respeito a situação usual da trajetória simples de um skatista numa rampa tradicional do esporte. Dependendo da perspectiva, esta modelagem pode ser feita de forma analítica, no entanto o objetivo da pesquisa visa a utilização de métodos computacionais, neste caso o software matemático Maple, como auxílio didático na análise do sistema em questão. O sistema analisado é descrito pela trajetória simples de um skatista, a qual está relacionada fisicamente a três possíveis situações em que o movimento está sujeito, são elas: superfície plana ou nivelada, rampa e paraboloide. Com isso, é feita a análise das superfícies de contorno, curvas de nível e derivadas direcionais das equações que modelam cada possível cenário, a fim de instigar a análise das demais características através dos resultados obtidos, como é o caso da análise da eficiência na velocidade do skatista durante a sua trajetória, e como comporta-se a conservação da energia presente numa rampa, por exemplo. Acreditamos que o ensino de matemática pode e deve se estender além dos cálculos teóricos, tendo como objetivo a aplicação de ferramentas computacionais adequadas. A problemática em questão aqui respondida representa de forma intuitiva a aplicação de superfícies de nível, derivada direcional, além de métodos computacionais atrelados à modelagem matemática.

Palavras-chave: Ensino de cálculo diferencial, Derivada direcional, Funções de várias variáveis, Maple.

INTRODUÇÃO

A matemática está presente em todos os fenômenos da natureza, sendo estes traduzidos a partir de seus padrões e semelhanças como parâmetros palpáveis ao ser humano. Basta olharmos ao nosso redor para notarmos sua presença em tudo, como na geometria dos

---

[1]Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade do Estado do Rio Grande do Norte - UERN, artur-aquino1@hotmail.com;
[2]Graduando do curso de Engenharia Civil pela Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, davi_tali@hotmail.com;
[3]Graduando do curso Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia pela Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, murilocfeitosa@gmail.com;
[4]Professor Dr. Adjunto da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, otavio.lavor@ufersa.edu.br;

objetos, nas medidas de comprimento, massa, tempo, etc. Em termos mais avançados, a matemática está intrinsicamente ligada à pesquisa, à investigação de situações e fatos de origem natural ou àqueles modelados pelo homem, e também ao objetivo por descobrir o novo, tudo isso através de uma ciência baseada em uma linguagem criteriosamente lógica e consistente.

É inato ao ser humano a necessidade de relacionar os acontecimentos naturais ao seu cotidiano, especialmente à sua forma de viver coletivamente, em que tal necessidade é observada desde a antiguidade. A busca pela tradução dessas situações, muitas vezes observada em padrões, despertou o interesse do homem pelos números e pelas formas de utilizá-los para representar diferentes situações. Atualmente, a matemática pode ser considerada como a ciência mais relevante do mundo moderno, já sendo abordada desde os níveis iniciais de ensino, preparando as crianças em diferentes aspectos, sejam cognitivos ou àqueles voltados à formação social.

Em relação ao ensino atual da matemática no Brasil, de acordo como observa Pinto (2017), o campo da educação matemática possui lacunas que são enraizadas desde os documentos regulamentadores dos aspectos curriculares, e teórico-metodológicos, uma vez que categorias como a etnomatemática, história da matemática, e modelagem matemática sequer são discutidas de forma a embasar os educadores. Logo, faz-se necessário a reprodução da importância da matemática não somente como uma ciência exata, mas também como uma área de conhecimento que advém das práticas sociais.

Outro importante aspecto a ser considerado, diz respeito as metodologias de ensino da matemática frente às novas tecnologias. Dessa forma, a busca por diferentes estratégias de ensino torna-se uma das tarefas cuja responsabilidade muitas vezes é erroneamente empregada somente ao professor (MATTAR, 2013). Diante disso, evidencia-se a emergente necessidade de adaptação das instituições de ensino quanto a utilização as Novas Tecnologias da Informação e Comunicação (NTIC's), uma vez que a não adesão às ferramentas digitais acarretará no fracasso das metas de ensino-aprendizagem. Consequentemente, os métodos tradicionais adotados se tornam ultrapassados diante a essa realidade (FAVA, 2012).

Embora prover as escolas com equipamentos e recursos didáticos seja um fator condicionante, somente essa ação não proporcionará a renovação almejada. A utilização da tecnologia como mecanismo de apoio ao ensino sempre gera fortes discussões pedagógicas, sobretudo devido a necessidade de desenvolvimento de recursos metodológicos que auxiliem os docentes no uso das novas tecnologias, bem como a aplicação destas em suas aulas (TEDESCO, 2004 *apud* FRANCO; PORTO; ALMEIDA, 2016, p. 14).

Analisando as circunstâncias descritas, e fundamentando-se nos discursos de autores referências no ensino, bem como em pesquisas atuais que abordam o uso das NTIC's, julgamos necessário contornar esses cenários questionando as abordagens e possibilidades metodológicas do ensino de matemática, em particular do cálculo diferencial, quando indagamos: Por que os estudantes do ensino superior veem o estudo da matemática como uma tarefa desinteressante, tediosa e de difícil aprendizagem? Em quais perspectivas é possível abordar os conceitos do cálculo diferencial frente às novas tecnologias?

A reflexão sobre as práticas didático-pedagógicas empregadas no ensino de ciências exatas levanta questionamentos não somente no ensino superior, mas em todos os níveis de ensino. Indagações relevantes referente as lacunas observadas são corriqueiras no âmbito educacional, a nível de ensino e de aprendizagem das disciplinas e conteúdos relacionados à essa área do conhecimento. A ausência de metodologias eficazes e acessíveis que fazem uso de recursos computacionais é outra variável recorrente e condicionante. Diante disso, nota-se um cenário preocupante onde evidencia-se a escassez no emprego destes mecanismos de forma a encabeçar reflexões e estratégias de planejamento direcionadas à aprendizagem significativa dos conteúdos.

Mediante isso, a presente pesquisa tem o intuito de explorar a utilização das novas tecnologias, em especial o software matemático Maple, com o objetivo de trazer uma nova abordagem ao ensino de cálculo diferencial, essencialmente para o conteúdo de derivadas direcionais, que está contido na ementa da disciplina de introdução às funções de várias variáveis. Cremos ser possível ensinar e analisar de forma mais aprofundada a matemática existente por trás de uma trajetória simples de um skatista através da modelagem matemática.

Neste cenário, serão tratadas três situações onde o skatista faz o percurso em uma: superfície plana, em uma rampa e finalmente em um paraboloide. Podemos associar essas situações à modelos matemáticos já existentes e a partir desse tipo de analogia podemos quantificar a situação, podendo também, além do ensino de cálculo diferencial, aplicar esses resultados ao ensino de física. Assim, justificamos o objetivo dessa pesquisa, com o propósito de apresentar uma ferramenta que possibilita uma abordagem diferente ao conteúdo de derivadas direcionais, e além disso, averiguar os resultados encontrados na problemática estudada, como é o caso da análise da eficiência na velocidade do skatista durante a sua trajetória, e como comporta-se a conservação da energia presente numa rampa, por exemplo.

Acreditamos que o desenvolvimento dessa abordagem poderá possibilitar discussões em sala a partir dos conceitos desenvolvidos e trabalhados. Ressaltamos ainda que o uso de softwares matemáticos aparecerem como excelente ferramenta de apoio ao professor, desde as etapas de elaboração de materiais didáticos, planos de aula, quanto no objetivo prioritário de qualquer estratégia de ensino: a aprendizagem. Destacamos ainda outras possibilidades de aproveitamento desses mecanismos, por exemplo nos métodos avaliativos, na motivação dos alunos, na integração e exploração de atividades colaborativas, e também na abordagem de cunho interdisciplinar de diversas disciplinas das ciências exatas e naturais.

METODOLOGIA

A pesquisa é arquitetada em uma abordagem descritiva e explicativa de forma direta, consistindo inicialmente no levamento e análise bibliográfica de obras referências no estudo de cálculo diferencial e fundamentos de mecânica clássica (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2012; STEWART, 2009; THOMAS, 2003). Enfatiza-se os estudos teóricos e empíricos acerca das situações em questão, modelagens, e tratamentos físicos e matemáticos que envolvem deslocamento, velocidade, superfícies de contorno, curvas de níveis, e derivada direcional.

A partir dessa etapa, o método introduzido na estruturação da pesquisa é basicamente voltado para a transcrição da situação física, feita no software Maple, com auxílio das funções matemáticas que modelam a trajetória de um skatista numa rampa tradicional do skatismo.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

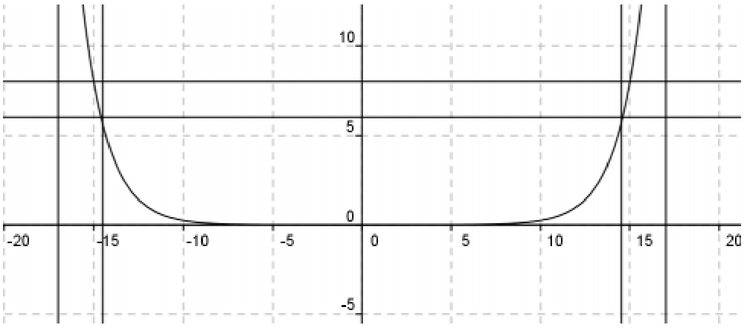
Para contornar a situação da trajetória do skatista numa rampa, ilustramos na Figura 1 a rampa tradicional do esporte, e na Figura 2 o gráfico das funções que modelam a superfície do trajeto. Em seguida esboçaremos as superfícies, contornos e curvas de nível do cenário em estudo.

Figura 1: Rampa simples de skate.

Fonte: Adaptado de Trens e Moreira, 2013.

Observe que durante o trajeto, o skatista ocupa toda a rampa cuja sua trajetória é descrita por uma parte plana, por uma rampa e por um paraboloide, respectivamente.

Figura 2: Gráficos associados à rampa.



Fonte: Adaptado de Trens e Moreira, 2013.

Observe que as funções plotadas, no plano cartesiano, já demonstram grande semelhança com a rampa de skate, e foi através dessa representação que construímos a modelagem matemática no plano tridimensional. As curvas que serão esboçadas a seguir foram geradas a partir do código abaixo representado pela Figura 3, desenvolvido no software Maple. O tipo da superfície depende do valor atribuído inicialmente e da sua forma no plano.

Figura 3: Código responsável por gerar as três superfícies.

```
p = 0.1;
[x,y] = meshgrid(-1:p:1,-1:p:1)
% Para cada valor da variável forma
 é esboçado uma curva diferente.
forma = 3;

if forma == 1
    %% PLANO
    z = x+y;
elseif forma == 2
    %% PARABOLOIDE
    z = 1-(x.^2+y.^2);
else
    %% SENOIDE
    z = sin(4*x+4*y)
end

%% PLOT
subplot(1,2,1)
surf(x,y,z)
title('Superficie','fontsize',14)
xlabel('x','fontsize',14)
ylabel('y','fontsize',14)
zlabel('z','fontsize',14)

subplot(1,2,2)
contour(x,y,z)
title('Curvas de nível','fontsize',14)
xlabel('x','fontsize',14)
ylabel('y','fontsize',14)
```

Fonte: Autoria própria, 2019.

Define-se um valor inicial a variável *forma* em um intervalo *p* que varia de -1 até 1 em *x* e em *y*. De acordo com cada variação, se esboça graficamente uma curva de nível diferente, que em sua completude descreverá o trajeto que ocorre na superfície da rampa. Após isso, verifica-se condicionalmente o valor da variável forma para averiguar se esta ocupa uma das três possibilidades de superfície no plano. Em sequência usa-se o comando interno de plotagem da superfície tridimensional das variáveis espaciais. Por fim, agora fazendo uso do comando responsável pela plotagem das curvas de nível e contorno, gera-se a segunda parte da análise para cada superfície.

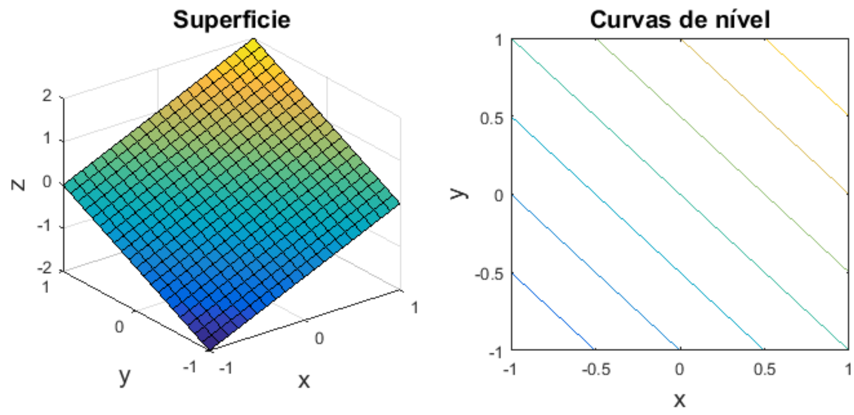
As equações modelos de cada superfície estão apresentadas no topo das figuras a seguir. Ao lado esquerdo das figuras são apresentadas as superfícies, e ao lado direito as curvas de nível e o contorno.

Para a superfície plana temos:

$$y = x + y$$

Que plotando, obtemos a Figura 4.

Figura 4: Superfície, curvas de nível e contorno para a parte nivelada.



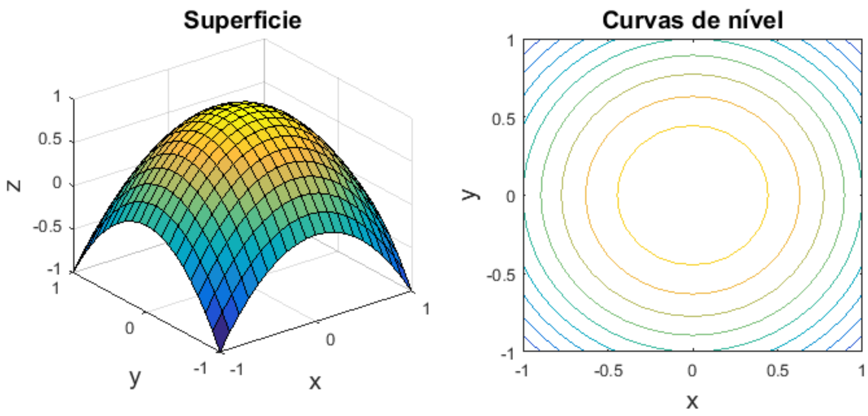
Fonte: Autoria própria, 2019.

Analogamente, para a superfície cuja trajetória é descrita por um paraboloide, temos:

$$z = (1 - x^2 + y^2)$$

E é representada pela Figura 5 abaixo.

Figura 5: Superfície, curvas de nível e contorno para o paraboloide.



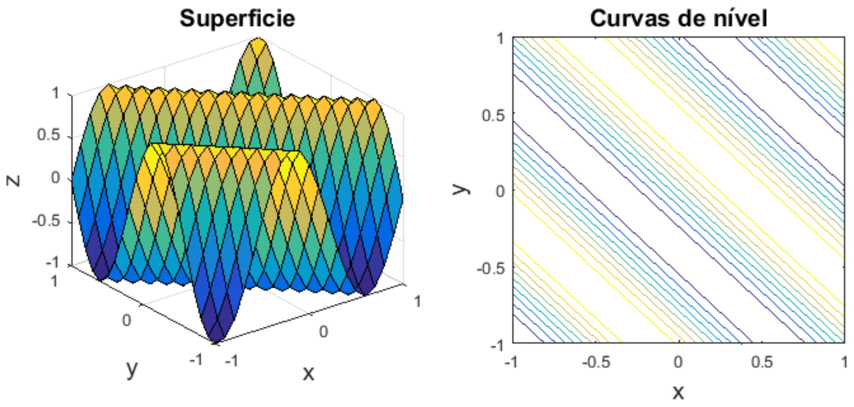
Fonte: Autoria própria, 2019.

Agora, a equação que modela o senoide:

$$z = sin(4 * \mathrm{x} + 4 * \mathrm{y})$$

Para este caso, obtemos as superfícies, curvas de nível e contornos, ilustrados pela Figura 6 a seguir.

Figura 5: Superfície, curvas de nível e contorno para o senoide.



Fonte: Autoria própria, 2019.

Como vimos, a trajetória de um skatista é introduzida, primeiro em um plano nivelado, em seguida em uma rampa e finalmente em uma paraboloide. Considerando uma trajetória circular de um skatista, os gráficos que serão mostrados a seguir ilustram a trajetória em um plano nivelado, em uma rampa e em um paraboloide. Para gerar essas curvas o código foi desenvolvido em duas partes, em que a primeiro gera a superfície e o segundo a trajetória em cima da superfície. Analisemos a Figura 7 logo abaixo.

Figura 7: Código responsável por gerar as as superfícies e trajetórias.

```
% CÓDIGO RESPONSÁVEL POR GERAR AS SUPERFÍCIES
p = 1;
l = 10;
c = 10;
[x,y] = meshgrid(-l:p:l,-c:p:c)

forma = 1;
if forma == 1
    %% PLANO
    a = 0;
    b = -1;
    c = 1;
    d = 0;
    z = (d - (a*x + b*y))/c;
elseif forma == 2
    %% PARABOLOIDE
    ('dasd')
    z = -(1-(x.^2+y.^2));
else
    z = sin(4*x+4*y)
end
%% PLOT
surf(x,y,z)
title('Superficie','fontsize',14)
xlabel('x','fontsize',14)
ylabel('y','fontsize',14)
zlabel('z','fontsize',14)

% CÓDIGO RESPONSÁVEL POR GERAR A TRAJETÓRIA
w = 1;
T = 2*pi/w;
p = 0.01;
t = 0:p:T
A = 5;
x = A*cos(w*t);
y = A*sin(w*t);

hold on

forma = 1;
if forma == 1
    a = 0;
    b = -1;
    c = 1;
    d = 0;
    z = (d - (a*x + b*y))/c;
    plot3(x,y,z,'color','red','LineWidth',2)
elseif forma == 2
    plot3(x,y,-(1-(x.^2+y.^2)),'color','red','LineWidth',2)
end
```

Fonte: Autoria própria, 2019.

O código inicia-se definindo valores genéricos as variáveis *p*, *l*, e *c* que servirão de intervalo de variação na plotagem tridimensional. Analogamente ao código da Figura 3, utiliza-se uma condição com o valor da variável *forma* para analisar quais das três possibilidades de superfície está sendo ocupada.

Para o plano, é inserida a equação da trajetória do movimento, tomando valores hipotéticos para todos os coeficientes. Já para o paraboloide, altera-se o sinal da equação de referência para que a concavidade da superfície seja invertida. Em seguida, utiliza-se novamente a equação que descreve o movimento, desta vez senoidal, para que se obtenha a rampa que descreve a segunda parte do movimento do skatista. Por fim, é feita a plotagem para os três casos.

Para melhor detalharmos os resultados obtido no plano (Figura 8), analisemos a equação da trajetória do movimento no plano:

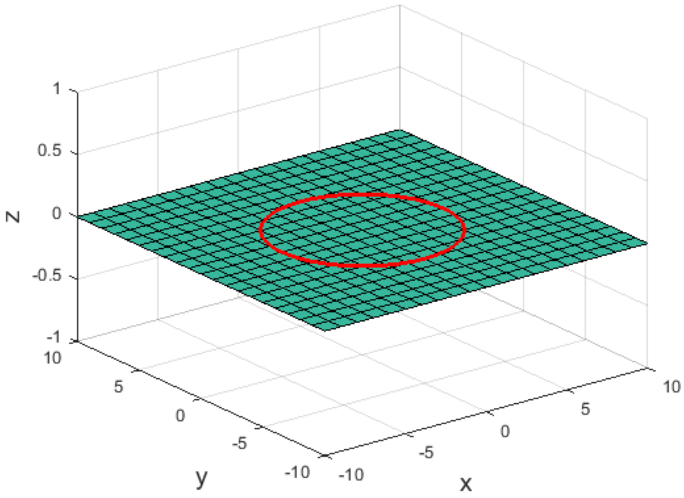
$$f(x, y) = (d - ax - by)/c$$

Derivando a equação acima:

$$f_x(x, y) = -a/c$$
$$f_y(x, y) = -b/c$$

Observa-se que a taxa de variação do movimento no plano é constante. Isso significa que não há redução ou aumento da velocidade em razão da posição.

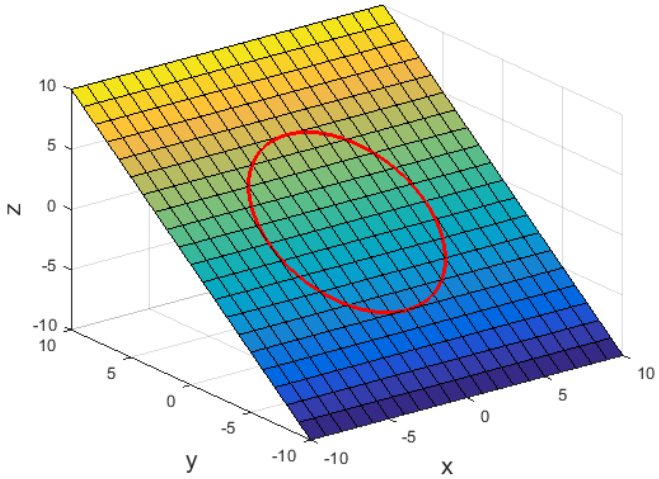
Figura 8: Trajetória circular na superfície plana.



Fonte: Autoria própria, 2019.

A derivada direcional do movimento na rampa apresenta o mesmo resultado que no plano, como apresenta a Figura 9.

Figura 9: Trajetória circular na rampa.



Fonte: Autoria própria, 2019.

Finalmente, analisemos a equação da trajetória do movimento no paraboloide:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

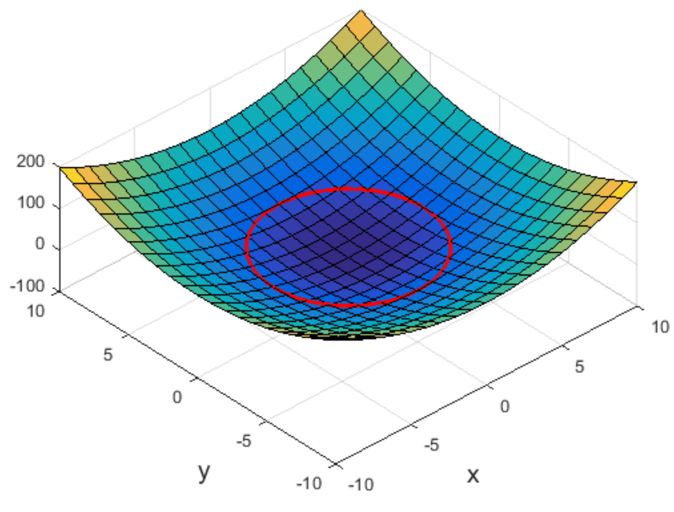
Derivando:

$$f_x = 2x$$

$$f_y = 2y$$

Que a representação gráfica é feita pela Figura 10 abaixo.

Figura 10: Trajetória circular no paraboloide.



Fonte: Autoria própria, 2019.

Note que a taxa de variação aumenta quando o objeto se move para fora do ponto central do paraboloide. Esse comportamento era esperado pois se trata de uma subida.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em virtude dos aspectos abordados, concluímos que a abordagem esquematizada de uma situação física real pode ser melhor compreendida a partir da transcrição de seus padrões utilizando ferramentas computacionais, bem como os tratamentos matemáticos utilizados nas disciplinas de ciclo básico de grande parte dos cursos de ciências exatas.

Acreditamos que o ensino de matemática pode e deve se estender além dos cálculos teóricos, tendo como objetivo a aplicação de ferramentas computacionais adequadas. A problemática em questão aqui respondida representa de forma intuitiva a aplicação de superfícies de nível, derivada direcional, além de métodos computacionais atrelados à modelagem matemática. Portanto, diante dos resultados expostos, foi possível correlacionar uma situação usual da trajetória simples de um skatista com as ferramentas do cálculo diferencial de várias variáveis, bem como instigar a analisar das demais características através das equações obtidas na utilização do software Maple.

REFERÊNCIAS

FAVA, Rui. **O Ensino na Sociedade Digital**. SEMESP, 2012. Disponível em: <http://www.semesp.org.br/noticias/o-ensino-na-sociedade-digital/>. Acesso em: 28 de set. 2019.

FRANCO, Vera Nácia Duarte; PORTO, Maria Beatriz Dias da Silva; ALMEIDA, Lidiane Aparecida. **O desafio de inserção das tecnologias digitais na escola básica contemporânea.** Revista Multidisciplinar de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura, Rio de Janeiro, v. 5, n. 10, p.14, dez. 2016.

HALLIDAY, D., RESNICK R. e WALKER, J., **Fundamentos de Física**, Vol. 1, 9ª edição, Ed. LTC, 2012.

MATTAR, João. **Aprendizagem em ambientes virtuais: teorias, conectivismo e MOOCs**. Revista Digital de Tecnologias Cognitivas, n. 7, p.21-40, jan. 2013.

PINTO, Antonio Henrique. **A Base Nacional Comum Curricular e o Ensino de Matemática: flexibilização ou engessamento do currículo escolar.** Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 31, n. 59, p.1045-1060, dez. 2017.

STEWART, J. **Cálculo**, vol. 2, 6ª edição. Editora Pioneira Thomson Learning, 2009.

THOMAS, G. **Cálculo**, vol. 2, 10ª edição. Editora Addison Wesley, 2003.

TRENS, Roselaine Maria; MOREIRA, Laura Leal. **Matemática e skatismo: aproximando jogos de linguagem**. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Curitiba, p.1-12, 2013.