MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA NA MECÂNICA EM PROBLEMAS DE VELOCIDADE DE ESCAPE.

Laedson Luan dos Santos Silva(1); Damião Franceilton Marques de Sousa (1); Natham Cândido de Oliveira (2); Isaac Ferreira de Lima (3);

Universidade Federal de campina grande – laedsonluan00@gmail.com
Universidade Federal de campina grande – marques0sousa@gmail.com
Universidade Federal de campina grande – nathan.oliveira_@hotmail.com
Universidade Federal de campina grande – - isaacferrreira031@gmail.com

Resumo: Geralmente, durante algumas disciplinas dos cursos de licenciaturas não dá tempo de ser visto todo o conteúdo programático, devido a diversos fatores, como o pouco tempo durante um semestre letivo para um vasto conteúdo. Assim, uma das maneiras para que tanto os alunos e os professores possam ter um ensino eficaz, é através da pesquisa do conteúdo que está sendo trabalhado. Nos cursos de exatas, a muitos depoimentos de falta de aplicabilidade tornando-se disciplinas monótonas, que servirão apenas para ser aprovado semestre letivo. Desta forma, neste trabalho, relata a pesquisa feita durante a disciplina de Equações diferenciais ordinárias, disciplina essa que faz parte da grade curricular dos cursos de licenciatura de Física e Matemática da UFCG – CES, com intuito de sempre ter um melhor ensino-aprendizagem possível. Mostrando as possibilidades de se deduzir alguma das equações importantes da mecânica, com o uso de um ferramental mais pesado, visto que as mesmas podem ser obtidas de maneira mais fácil. . O tema pesquisado e aqui abordado é a aplicação do método de solução de equações diferencias conhecido como equações separáveis, na área da física, mas precisamente na lei de Gravitação Universal de Isaac Newton, formulada pelo mesmo em e publicada em 1687 em uma das suas obras. Através desse método, podemos manipular a lei de gravitação de Newton e determinar uma variável conhecido como velocidade de escape, capaz de determinar o valor máximo que um objeto ou corpo pode ser arremessado para fora da superfície terrestre sem que saia de sua órbita, algo muito aplicado nos lançamento de e satélites e foguetes.

Palavras-chave: EDO, Equações-Separáveis, Física, Velocidade-escape.

1. INTRODUÇÃO

Uma das principais dificuldades tidas por alunos dos cursos superiores da área de exatas é no momento de aplicar todo aquele conhecimento que lhe foram ensinados. Muitas das vezes nos são apresentados diversas definições pré-estabelecidas que no fim de um semestre letivo, acabam servindo apenas para ser aprovado em tal disciplina.

Pensando em reverter essa situação, na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, comumente, chamada de "EDO", que faz parte da grade curricular dos cursos de licenciatura de Física e Matemática da Universidade Federal de Campina Grande – Campus Cuité, foi passado durante o decorrer da disciplina trabalhos de pesquisa de algumas aplicabilidades dessa disciplina, com o proposito de ter melhor rendimento do aluno na disciplina, e assim, um melhor ensino eficaz.

Portanto, este trabalho traz o relato da pesquisa que aborda a aplicabilidade na área da Física, mas precisamente, quando trabalhamos com a lei da gravitação Universal formulada por Isaac Newton, dando ênfase, a velocidade de escape que certos corpos precisam para escapar da atração do campo gravitacional terrestre imposto pelo planeta Terra.

1.1.VELOCIDADE DE ESCAPE.

Da experiência cotidiana, sabe-se que qualquer objeto lançado para cima a partir da superfície terrestre tende a retornar à superfície. Nota-se isso no lançamento de uma pedra, nos jatos d'agua expelidos por uma fonte ou no arremesso de uma bola de basquetebol rumo à cesta. Esse retorno dos objetos ao solo após o lançamento ocorre em virtude da atração gravitacional entre a Terra e o objeto arremessado. Tal atração, tão familiar a nós o que nos mantém ligados à superfície do planeta; é o que impede que um simples salto nos projete pelo espaço afora.

É conhecido também o fato de que um objeto lançado para cima atinge maiores altitudes a cada vez que é atirado com maior velocidade. Desprezando a resistência do ar e a presença de qualquer obstáculo na atmosfera, é possível deduzir que deve haver certa velocidade de lançamento grande o suficiente para que o objeto se distancie do planeta Terra de tal forma que jamais retorne à sua superfície. Em uma posição tão distante, o objeto estaria livre da influência da gravidade do planeta, conseguindo escapar de seu campo gravitacional. De fato, tal velocidade existe e damos a ela o nome de velocidade de escape.

Em termos formais, a velocidade de escape é a velocidade mínima que um objeto precisa ter para se deslocar da superfície de um corpo até o infinito. Saindo da Terra, por exemplo, um projétil que fosse lançado com essa velocidade iria viajar indefinidamente, sempre com velocidade progressivamente menor, sem nunca ser parado pela força gravitacional da Terra. O valor da velocidade de escape, que permitiria ao projétil essa viagem, pode ser calculado comparando a energia inicial do projétil e à sua energia final.

Da lei da gravitação universal, sabemos que a força gravitacional entre a Terra e o projétil e proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional a distância entre eles. Assim, quando chegasse a uma distância infinita, a força entre o projétil e a Terra seria zero.

1.2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS SEPARÁVEIS

Segundo ZILL e CULLEN, (2001) diz que por definição uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de Equação Diferencial (ED). Essas equações podem ser classificadas de acordo com seu tipo, a ordem, e linearidade.

KREYSZIG (2013), diz Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação que contém uma ou mais derivadas de uma função desconhecida, à qual usualmente chamamos de $y(x)$ (ou, às vezes $y(t)$, caso a variável independente seja o tempo t). Essa equação pode conter o próprio y, funções conhecidas de x (ou de t) e constantes.

As equações separáveis é um tipo de equação diferencial ordinária de primeira ordem podendo ser escritas da seguinte forma:

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{1.1}$$

Ao multiplicar ambos os lados à equação (1.1) por dx, obtemos:

$$h(y)dy = g(x)dx \tag{1.2}$$

Desta forma, temos uma equação dita separável, e uma das maneiras mais acessível para resolução da equação (1.2) é separando e integrando em relação a suas respectivas variáveis, por exemplo:

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + \text{C}; \qquad \text{C = Constante arbitrária} \tag{1.3}$$

Temos que:

$$h(y) = \int g(x)dx \tag{1.4}$$

Logo,

$$\frac{dh}{dx} = g(x) \tag{1.5}$$

Ao substituir, a equação (1.5) na equação (1.0), obtém-se que:

$$h(y)\frac{dy}{dx} = \frac{dh}{dx} \quad (1.6)$$

O que nos fornece que:

$$g(x) = \frac{dh}{dx} = \frac{dh}{dy}.\frac{dy}{dx} \quad (1.7)$$

Usando a regra de derivação, conhecido como regra da cadeira, obtemos:

$$\frac{dh(y(x))}{dx} = \frac{dh}{dy}.\frac{dy}{dx'} \quad (1.8)$$

Como a equação (1.8), pode ser reescrita, como simplesmente:

$$\frac{dh(y(x))}{dx} = g(x) \quad (1.9)$$

Ao integrar ambos os lados em relação a variável x, obtemos:

$$\int h(y)y'x = \int g(x)dx + C; \qquad C = \text{Constante arbitrária} \quad (1.10)$$

Substituindo $y'x$ por dy, segue que a equação (1.10), torna-se exatamente a equação (1.3), uma das formas de resolução para equação diferenciais dita como equações separáveis.

2. METODOLOGIA

Este trabalho foi realizado durante a disciplina de Equações diferenciais Ordinária, que faz parte da grade curricular dos cursos de licenciatura de Física e Matemática, da UFCG-CES, e também de outros cursos superiores que fazem parte da área de ciências exatas. Utilizamos a modelagem matemática aplicada, mas precisamente, o método de equações separáveis, em problemas que envolvem a leis da gravitação universal formulada por Isaac Newton, para determinar a velocidade de escape de um corpo ao ser arremessado para fora da superfície terrestre. A pesquisa foi feita através de referenciais bibliográficos, existente na própria biblioteca da Universidade e através de pesquisa feita em meios de comunicações, como a internet.

Sendo um exemplo mostrado a seguir:

Exemplo: Um determinado corpo é lançado da superfície terrestre com velocidade v_0, de forma que a única força atuante sobre ele é a força gravitacional da Terra (força Peso), sendo essa força proporcional a sua massa e inversamente proporcional a sua distância ao centro da Terra. Com que velocidade um determinado corpo deve ser arremessado para escapar da atração gravitacional da Terra?

Matematicamente falando, a força gravitacional formula por Isaac Newton, ao ser comparada com à força peso do objeto é dada por é dada por:

$$m.\frac{dv}{dt} = -\frac{G.M.m}{r^2} \tag{2.0}$$

Lembrando que quando o objeto encontra-se na superfície, $r = R$, à força Peso do mesmo, em modulo ela é igual ao produto de sua massa com a aceleração da gravidade, ou seja, $p = m.g$, dessa forma a equação (1.11) se resume em:

$$m.g = \frac{G.M.m}{r^2} \tag{2.1}$$

Ao isolar o as constantes $G.M$ na equação acima, e logo após substituindo na equação (2.1), dizemos que:

$$m.\frac{dv}{dt} = -\frac{g.R^2.m}{r^2} \tag{2.2}$$

O nosso exemplo nos diz que o objeto foi lançado com velocidade v_0, então temos $v_0 = v(0)$, assim resultado em um problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} m.\dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{g.R^2.m}{r^2} \\ \quad e \\ v_0 = v(0) \end{cases}$$

Podemos supor que $v_0 = v(r)$ e $r_0 = r(t)$, pela regra da cadeira, temos:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}.\frac{dr}{dt} \tag{2.3}$$

Sendo, que o $\frac{dr}{dt}$ existente na equação acima é nossa velocidade linear v, assim:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}.v \tag{2.4}$$

Substituindo o resultado da equação (2.4) em (2.2), e cancelando as massas inerciais em (2.2), chegamos a uma equação separável do formato da equação (1.1), sendo ela:

$$v.\frac{dv}{dr} = -\frac{g.R^2}{r^2} \tag{2.5}$$

Que também pode ser reescrita da forma mostrada a seguir (equação 2.6), pelo motivo de ser classificada como equação diferencial separável.

$$v.dv = -\frac{g.R^2}{r^2}.dr \tag{2.6}$$

Pelos nossos conhecimentos em soluções de equações separáveis, como mostrado no decorrer deste trabalho, podemos em nossas atribuições, integrar ambos os lados na equação (2.6). Assim:

$$\int v.dv = -\frac{g.R^2}{r^2}.dr \tag{2.7}$$

Usaremos o método mostrado abaixo para resolver a integral dada por (2.7).

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{2.8}$$

Dessa forma, obtemos:

$$\frac{v_0^2}{2} = \frac{g.R^2}{r} + C \tag{2.9}$$

Para os valores de $v_0 = v(0)$ e $r = R$, e logo após isolando o valor de C, temos que:

$$\frac{v_0^2}{2} - g.R = C \tag{2.10}$$

Assim, a solução do PVI é dada implicitamente, ao substituir a equação (2.10) em (2.9), sendo ela:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{g.R^2}{r} + \frac{v_0^2}{2} - g.R \tag{2.11}$$

Ao analisar a equação acima temos que A velocidade ser igual v nula nos indica que $r = r_{máx}$, ou seja, quando r for muito grande, de tal modo que certamente o corpo é deve ter superado a força gravitacional da terra. Fazendo $v = 0$ na equação acima, e logo após isolando v_0, já considerando a mesmo como sendo a velocidade de escape v_{esc}, temos:

$$v_{esc} = \sqrt{2.g.R(1-\frac{R}{r_{máx}})} \qquad (2.12)$$

Como queremos que r cresça, de modo que supere a força gravitacional, tomamos o limite de v_{esc} a medida de $r_{máx}$ aumenta para seu valor máximo (ou infinito), ou seja:

$$\lim_{r_{máx}\to\infty} v_{esc} = \lim_{r_{máx}\to\infty} \sqrt{2.g.R(1-\frac{R}{r_{máx}})} \qquad (2.13)$$

Resolvendo o limite dado pela equação (2.13), para o nosso problema de velocidade de escape, ou seja, a velocidade de escape é dada por:

$$v_{esc} = \sqrt{2.g.R} \qquad (2.14)$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Através do método de resolução de EDO's conhecido como equações separáveis conseguimos chegar a uma expressão que nos fornece a velocidade de escape, ou seja, a velocidade limite que certo objeto pode ser arremessado para fora da superfície terrestre, para que não se perca no espaço ao sair da orbita da Terra, dado pela equação (2.14), método é muito utilizado no lançamento de foguetes.

A equação (2.14) nos mostra que as únicas incógnitas que vão fazer efeito diante dessa velocidade são a aceleração da gravidade (g) e a distância que o objeto se encontra da superfície terrestre (R).

4. CONCLUSÕES

O uso da pesquisa no ensino é de suma importância para a eficaz do ensino-aprendizagem. Porque durante a disciplina o aluno tem a oportunidade de ir mais afundo do que está sendo trabalhado, descobrindo o real motivo para que lhe são ensinado, sendo que muitas das vezes esses exemplos não se é repassado, devido ao curto tempo de cada disciplina, para abordar muitos conteúdos. Assim, com a pesquisa na área de modelagem matemática com aplicação na física, nós graduando, tanto do curso de licenciatura em Física quanto em Matemática, podemos perceber a importância não só da modelagem matemática, mas também do conceito de velocidade de escape.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYCE, W. E; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** Oitava edição. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

HALLIDAY, D; RESNICK, R e WALKER, J. **Fundamentos de física**. Oitava edição. Rio de Janeiro: LTC, 2009. V. 02.

KREYSZIG, E. **Matemática Superior para Engenharia.** Volume 1. 9 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. V. 01.

ZIIL, D. G; CULLEN, M. R., **Equações diferenciais.** Volume 1. 3ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2007.

ZIIL, D. G; CULLEN, M. R., **Equações diferenciais com aplicações em modelagem.** Volume 2. 3ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2007.