A HISTÓRIADA PROBABILIDADE:DESPERTANDO O RACIOCÍNIO EM SITUAÇÕES NÃO DETERMINÍSTICAS

Jaques Silveira Lopes[1]; Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes[2]

[1]*Universidade Federal do Rio Grande do Norte, jaques@ccet.ufrn.br*
[2]*Universidade Federal do Rio Grande do Norte, gabriela@ccet.ufrn.br*

Resumo:
Neste artigo apresentamos um pouco da história da Probabilidade, como área do conhecimento. Além disso, definimos Probabilidade e sugerimos algumas aplicações da Teoria de Probabilidade que podem ser utilizadas em sala de aula na Educação Básica. Nos primeiros anos na escola, os alunos encontram dificuldades em aprender as quatro operações básicas, o que, mais tarde, acaba dificultando aprendizado e a resolução de problemas que envolvam o cálculo probabilístico. Entretanto, podemos utilizar a resolução de problemas interessantes que tenham o viés aleatório, em que o aluno precise calcular a probabilidade da ocorrência de um determinado evento. Neste contexto, levamos os alunos ao melhor entendimento de algumas noçõesde teoria de conjuntos e da geometria, conduzidos pela resolução desses problemas. No primeiro problema aqui trazido, apresentamos uma interessante característica da medida probabilística do conjunto dos números irracionais. Para tal, mostraremos que é zero a probabilidade de se escolher um número do intervalo [0, 1] e este número ser racional. Consequentemente temos que é de cem por cento a probabilidade de se escolher um número do intervalo [0, 1] e este número ser irracional. Fato, que pode surpreender num primeiro momento. No segundo problema fazemos uma conexão entre a Geometria Plana e a Probabilidade. Com a Probabilidade funcionando como um instrumento para o desenvolvimento desse pensamento geométrico, com a aquisição de diversas habilidades, além do amadurecimento dos mecanismos envolvidos nos processos de modelagem dos espaços de probabilidade. Tratamos, ainda, um pouco da história da Teoria de Conjuntos e alguns conceitos básicos de Probabilidade.
Palavras-chave: Teoria da Probabilidade, Teoria dos Conjuntos, Geometria Plana, Educação Básica.

Introdução

A Teoria da Probabilidade, a qual se situa na modelagem e resolução dos problemas associados aos fenômenos aleatórios (ou seja, aqueles que não são determinísticos) é de suma importância no desenvolvimento e compreensão de situações teóricas e cotidianas, sobretudo em situações que necessitamos tomar decisões. Isso acontece porque as conclusões obtidas nos processos inferenciais são baseadas em dados aleatoriamente escolhidos, consequentemente, sempre admitem determinada margem de incerteza. Por isso, a Teoria de Probabilidade se constitui numa essencial ferramenta, o que impõe que noções básicas em relação à probabilidade devem ser estudadas desde a Educação Básica, para que os alunos possam compreender melhor o mundo que os cercam.

O domínio da Probabilidade torna-se, a cada dia, muito importante na formação de um aluno, pois ela é responsável pela criação de modelos que servem para o estudo dos experimentos aleatórios, que representam grande parte das situações cotidianas. No tocante a sua origem, como descrito por Moreira e Salsa (2008), sabe-se que esse conhecimento matemático começou a ser estudado a partir do século XVI, com o matemático, astrólogo e médico, Gerolamo Cardano (1501–1576). Ele, que também era jogador de jogos de azar, escreveu, por volta de 1550, a obra *Liber de Ludo Aleae* (que em tradução livre significa, O livro dos jogos de azar), a qual é tida como o primeiro manual organizado que traz algumas noções de probabilidade. Nesse livro, o autor desenvolve cálculos de expectativas acerca de jogos de dados.

Cardano desperta para o funcionamento do acaso e incorporava, em certo sentido, o que hoje chamamos de espaço amostral. Esse conceito representava uma nova ideia e uma nova metodologia, formando a base da descrição matemática da incerteza pelos séculos que se seguiram. Na linguagem moderna, a regra de Cardano é expressa da seguinte maneira: suponha que um processo aleatório tenha muitos resultados igualmente prováveis, alguns favoráveis, ou seja, ganhar, e outros desfavoráveis, isto é, perder. A probabilidade de obtermos um resultado favorável é igual à proporção entre os resultados favoráveis e o total de casos. O conjunto de todos os resultados possíveis é chamado de espaço amostral. Uma das maiores deficiências do trabalho de Cardano foi o fato de não ter feito uma análise sistemática.

O estudo sistemático de probabilidade começou em 1654, quando Antoine Gombaud, também conhecido como Chevalier de Méré, um jogador francês, escreveu ao matemático Blaise Pascal (1623-1662) fazendo várias perguntas sobre as probabilidades de se ganhar no jogo de dados e outros jogos de azar. Perguntas do tipo: O que é mais provável, rolar um “seis” em quatro jogadas de um dado ou rolar um “duplo seis” em 24 jogadas com dois dados? (CRILLY, 2017). Pascal então escreveu a outro matemático francês, Pierre de Fermat (1607–1665), expondo as perguntas feitas por Chevalier de Méré. A partir dessa situação, a correspondência entre os matemáticos Pascal e Fermat mostra que eles aprofundaram seus estudos sobre probabilidades e chegaram a definir conceitos como expectativa, chance e média, muito embora não tenham publicado seus estudos.

Ainda no século XVII, no ano de 1657, o matemático holandês Christian Hiygens (1629 – 1695) publicou o livro *O Raciocínio nos Jogos de Dados*, o qual continha contribuições importantes ao estudo das probabilidades. Nesse mesmo século, o matemático suíço Jacques Bernoulli (1654–1705) propôs um teorema em que afirmava que a probabilidade de um evento ocorrer tende a um valor constante quando o número de ensaios desse evento tende ao infinito. Depois de Bernoulli, Abraham De Moivre (1667–1751) publicou o livro *A Doutrina do Azar*, dando valiosa contribuição para o estudo das probabilidades através de suas análises em relação aos de jogos de azar. Posteriormente, no século XIX, o matemático Pierre Simon Laplace (1749–1827) sistematizou uma estrutura de raciocínio e um conjunto de definições importantes nessa área e expôs seu trabalho com a publicação do seu livro *Teoria Analítica das Probabilidades* (1812).

O matemático alemão Gauss (1777-1855) desenvolveu, a partir de estudos sobre a distribuição do erro de medidas físicas, um modelo probabilístico de grande importância e utilização na estatística, o modelo normal, também conhecido como a curva de Gauss. No século XX, Andrei Nikolayevich Kolmogorov (1903–1987), um dos mais influentes matemáticos russos do século passado, desenvolveu, a partir da teoria dos conjuntos, a moderna teoria matemática da probabilidade, dando-lhe um tratamento axiomático, pilares da formalização dos teoremas que sustentam o corpo teórico da probabilidade. Os estudos teóricos do cálculo de probabilidades renderam sua primeira publicação em 1929: *General Theory de MeasureandProbabilityTheory*. Esse livro, muito importante, pois expõe a formulação de um conjunto de princípios conhecidos como a axiomática de Kolmogorov (1933).

Metodologia

Uma das constatações mais comuns no ensino de Matemática é de que existe, nos alunos, uma resistência bem acentuada no momento da aprendizagem dos assuntos que envolvam Probabilidade. Nas séries iniciais, os alunos encontram muitas dificuldades em aprender as quatro operações, e isso traz sérias consequências ao seu desenvolvimento, principalmente no que se refere modelagem e a resolução de problemas probabilísticos. Os textos matemáticos mais tradicionais do Ensino Médio trazem, para esse conteúdo, um excesso de fórmulas e regras. Já na parte inicial de combinatória, o aluno se perde e fica desmotivado a entender a Probabilidade, como uma teoria importante. Não fica muito claro onde essas situações e modelos podem ser importantes na vida cotidiana do aluno.

O excesso de formalismo nos conceitos e definições contribui, de forma significativa, para um baixo nível de aprendizagem por torná-las enfadonhos. Por isso, nossa estratégia é tratar do tema trazendo parte de sua história. Só depois fazemos a resolução de problemas que sejam interessantes aos alunos.

Apresentamos alguns fatos históricos relacionados à Teoria dos Conjuntos e como isso influencia a Teoria da Probabilidade. A teoria dos conjuntos moderna começou com o matemático alemão Georg Cantor (1845-1918). Ele fez uma tentativa real de classificar as coleções infinitas.Cantor em 1883 com o trabalho “Sobre Conjuntos Lineares” trata o infinito como um ente matemático definido. Cantor disse que era possível estabelecer uma correspondência entre duas coleções infinitas, mesmo que uma seja apenas parte da outra. Ele afirmava que duas coleções (finitas ou infinitas) são equivalentes ou tem a mesma potência se pudermos comparar elemento por elemento.

Precisamos saber lidar com os conjuntos, pois a Probabilidade é uma função conjunto, ou seja, é uma medida da ocorrência de determinado conjunto, que chamamos de evento. Enquanto os conjuntos são constituídos por poucos elementos, não existe dificuldade em trabalhar com suas propriedades, como por exemplo contar seus elementos. Entretanto, quando os conjuntos são finitos, mas com grande de elementos, ou, ainda, quando são infinitos, aí sim necessitamos teorias robustas que, nos auxiliem no completo entendimento de propriedades concernentes a esses conjuntos.

A Probabilidade, como teoria, só pôde avançar em relação ao seu caráter empírico quando houve um real avanço na Teoria dos Conjuntos. Matemáticos como Cantor e Émile Borel (1871-1956), este último um grande expoente da matemática francesa, assumiram papel fundamental na criação da Teoria dos conjuntos, da Teoria da Medida e, em particular, na Teoria da Probabilidade.

Discussão e Resultados

As definições e resultados que apresentamos aqui são relacionadas às situações baseadas em experimentos aleatórios, que, de acordo com James (2015), são aqueles que ao serem repetidos em processos semelhantes, dentro de uma situação de regularidade, produzem, em geral, resultados diferentes (mas que conheçamos o conjunto formado por todos os possíveis resultados). Como exemplos mais comuns, temos o lançamento de um dado e a observação da face voltada para cima e o lançamento de uma moeda e a observação da face voltada para cima, sendo que no primeiro exemplo podemos ter seis resultados diferentes $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e no segundo, apenas dois resultados {cara, coroa}. Por outro lado, a noção de experimento determinístico, que é aquele que, de antemão, sabemos o resultado mesmo antes da realização do experimento, como, por exemplo, a observação da temperatura de ebulição da água (dentro de condições normais de temperatura e pressão), que é sempre de 100 ºC.

Os experimentos aleatórios, ou estocásticos, estão presentes em muitas situações cotidianas, como por exemplo, nunca sabemos quando a lâmpada de nossa sala deixará de funcionar. Ou quem ganhará uma simples aposta, ou, ainda, se um voo específico terá o chamado *Overbooking* (uma expressão em inglês que significa excesso de reservas, que acontece quando a venda ou reserva de bilhetes ou passagens fica acima do número de lugares realmente disponíveis no veículo ou lugar). Nem sabemos quando irá chover. É nesse contexto que surge a Probabilidade, que mesmo não sabendo os resultados de experimentos em tempo real, podemos olhar para traz e enxergar padrões e estabelecermos modelos que nos ajudem a fazer inferências e previsões, ainda que submetidos a certas margens de erros, que podemos controlar e ajustar.

Nos experimentos aleatórios são produzidos os possíveis resultados, e esses possíveis resultados são agrupados em conjuntos que são denominados espaços amostrais. O espaço amostral possui subconjuntos, que submetidos a uma modelagem matemática, são denominados eventos. Assim, numa abordagem clássica, a probabilidade de um acontecimento (evento) A, que é um subconjunto de um espaço amostral S finito, de resultados igualmente prováveis é $\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{N(A)}}{\mathrm{N(S)}}$. Sendo $\mathrm{N(A)}$ e $\mathrm{N(S)}$ as quantidades de elementos de A e de S, respectivamente.

Nesse, contexto cada elemento de um espaço amostral finito forma um conjunto unitário, que chamamos de evento simples. A cada elemento $\mathrm{a_i}$ do espaço amostral, associamos um número $\mathrm{P_i}$ que é a sua probabilidade, com a condição de que: $\mathrm{P_1},\ \mathrm{P_2}, \dots ,\ \mathrm{P_n} \geq 0$, com$\mathrm{P_1} + \mathrm{P_2} + \cdots + \mathrm{P_n} = 1$.

Considerando que esse espaço amostral S é equiprovável, temos que $\mathrm{P_i} = \frac{1}{\mathrm{n}}$ e, daí, $\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{N(A)}}{\mathrm{n}}$, onde $\mathrm{N(A)}$ é o número de elementos de A e $\mathrm{n} = \mathrm{N(S)}$ é o número de elementos de S. Com uma abordagem mais teórica, seja E um experimento aleatório com um espaço amostral associado S. A cada evento $\mathrm{A} \subset \mathrm{S}$ associa-se um número real, representado por $\mathrm{P(A)}$ e denominado de probabilidade de A que satisfaz as seguintes propriedades (axiomas):

a) $0 \leq \mathrm{P(A)} \leq 1$;
b) $\mathrm{P(S)} = 1$;
c) $\mathrm{P(A \cup B)} = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)}$ se A e B forem mutualmente excludentes.

Uma definição mais geral, baseada nos axiomas de Kolmogorov, pode ser encontrada em James (2015). Note que, abaixo, fica claro que a probabilidade é uma função conjunto, que a cada evento associa um número, entre 0 e 1, que quantifica (mede) o quão provável é a ocorrência de um determinado evento. Apresentamos a definição do Espaço de Probabilidade da seguinte maneira. Sejam E: experimento aleatório e S: espaço amostral associado a E (Conj. de todos os possíveis resultados de E). Além disso, consideramos $\Im$ a classe de subconjuntos de S como a classe de eventos de S.

Assim, definimos P : medida de probabilidade sobre $(S, \Im)$, ou seja,

$\mathrm{P} : \Im \to [0,1]$ é uma função conjunto tal que

(i) $\forall A \in \Im$, $\mathrm{P}(A) \geq 0$;

(ii) $\mathrm{P}(S) = 1$;

(iii) $A_1, A_2, \cdots \in \Im$, $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_j).$$

Dizemos, então, que (S, $\Im$, P) é um espaço de probabilidade.

Apresentamos, agora, algumas consequências dessa definição. Seja S um espaço amostral associado a um experimento aleatório. A, B e C são eventos de S. A^C é o evento complementar de A.

a) $P(\emptyset) = 0$; b) $P(A^C) = 1 - P(A)$; c)$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$;

d)$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; e) A, B e C forem três eventos quaisquer, então:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C);$$

f)Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Na Educação Básica é dado um tratamento com enfoque principal voltado para o cálculo de probabilidades em espaços amostrais finitos. Isso limita muito e prejudica o real entendimento do conceito de probabilidade. Devemos, sempre, estar preocupados com o bom domínio da Teoria da Probabilidade, pois ele pode ser muito útil na formação de professores. Em Lopes (1998) encontramos uma discussão sobre a introdução da Teoria da Probabilidade e os conceitos de Estatística na Educação Básica.

Aqui faremos o uso da geometria, ela que no ensino médio está relacionado ao tratamento das propriedades relacionadas às formas geométricas e as medidas que podemos obter dessas formas, mais precisamente: comprimentos, áreas e volumes. De acordo com Smole Et. Al. (2008) é possível compreendermos o ensino de geometria para o desenvolvimento do raciocínio espacial. Sabendo-se que a geometria e o raciocínio espacial estão intimamente interligados. Com isso, o aluno pode ganhar muito na construção das representações mentais das figuras geométricas e das propriedades envolvidas. Segundo essas autoras é muito importante o desenvolvimento do pensamento geométrico, e que esse desenvolvimento não ocorre de forma rápida, e nem somente ao longo do ensino fundamental, cabendo ao ensino médio uma parte considerável dessa tarefa.

A Probabilidade, então, funcionará como um instrumento para o desenvolvimento desse pensamento geométrico, com a aquisição de diversas habilidades, além, é claro, do amadurecimento dos mecanismos envolvidos nos processos de modelagem dos espaços de probabilidade.

No Ensino Médio, a abordagem de probabilidade se restringe aos casos finitos e problemas, na maioria das vezes, de contagem de casos possíveis e favoráveis. O estudo particular da probabilidade, junto à geometria, torna-se indispensável, e, para isso, melhores mecanismos didáticos devem ser propostos e estudados, a fim de aumentar o interesse. Professores de Matemática do Ensino Médio devem apresentar com certa frequência problemas de probabilidade, pois assim o aluno melhorará seu raciocínio e poderá resolver problemas que envolvam essa modelagem matemática, com viés aleatório, que, como vimos anteriormente, são aqueles em que os resultados não podem ser determinados de antemão. Woodward e Hoehn (1994) dão algumas possibilidades de como os Professores podem trabalhar esse tema:

> “Um dos caminhos possíveis seria a introdução de um capítulo à parte sobre probabilidade no curso atual. Uma alternativa melhor, no entanto, talvez fosse a introdução oportuna de problemas bem escolhidos de probabilidade em geometria na sequência de tópicos já existentes. Esse procedimento possibilita uma transição fácil para a probabilidade, sem o rompimento da estrutura do curso atual.” (WOODWARD, E.; HOEHN, 1994).

Queremos, assim, utilizar tais apontamentos e abordagens pedagógicas para mudar essa tendência predominante empregada, que visa mais a automatização de resolução direta de problemas, do que a real compreensão e a consolidação do raciocínio lógico e criativo, advindo de uma nova prática mais interessante e contextualizada para os alunos.

Apresentamos, agora, algumas situações problema:

Problema 1: Dada enumerabilidade do conjunto dos números racionais, fazemos a seguinte pergunta: Qual é probabilidade de se escolher, ao acaso, um número no intervalo $[0, 1]$ e ele ser um número racional ?

Para responder a pergunta acima definiremos um espaço de probabilidade, cuja medida de probabilidade, sobre o espaço amostral $S=[0,1]$, é $P(A)=\dfrac{comp(A)}{comp(S)}$, $A\subset S$. E a probabilidade zero do conjunto $Q\cap[0,1]$ é mostrada de maneira natural, usando a enumerabilidade deste conjunto e a σ-aditividade da função de probabilidade.

Indo ao Cálculo da Probabilidade de se escolher aleatoriamente um número no intervalo [0, 1] e ele ser racional:

Dado o espaço amostral $S=[0,1]$, seja $P(A)=\dfrac{comp(A)}{comp(S)}$, $A\subset S$.

Como $Q\cap[0,1]\subset Q$, temos que

$$P(Q\cap[0,1])=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} r_i\right),\quad r_i\in Q\cap[0,1] \qquad \text{(I)}$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty} P(\{r_i\})$$

De modo que fica faltando apenas o cálculo da probabilidade de cada evento simples $\{r_i\}$.

Sabendo que o comprimento de um intervalo fechado, mesmo que no caso degenerado, é dado por $comp([a,b])=b-a$, temos que:

$$P(\{r_i\})=\frac{comp(\{r_i\})}{comp(S)}=\frac{r_i-r_i}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

Consequentemente, voltando em (I), temos que $\sum_{i=1}^{\infty} P(\{r_i\})=\sum_{i=1}^{\infty} 0=0$.

Concluímos ser zero a probabilidade de se escolher aleatoriamente um número no intervalo [0, 1] e ele ser Racional.

Exibimos então uma importante aplicação da Teoria de Probabilidade que pode ser utilizada em sala de aula no Ensino Médio, porque proporciona o reconhecimento da medida do conjunto dos números irracionais como subconjunto dos números reais. Mostramos que é zero a probabilidade de se escolher um número do intervalo [0, 1] e este número ser racional.

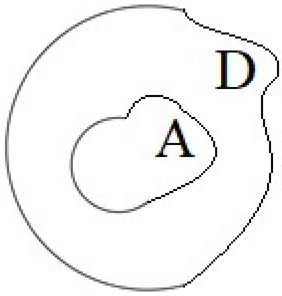
Consequentemente, como $\{Q \cap [0,1]\} \cup \{Q^C \cap [0,1]\} = [0,1]$, temos que é de cem por cento a probabilidade de se escolher um número do intervalo [0, 1] e este número ser irracional. Onde usamos Q^C para representar o conjunto dos números irracionais.

Problema 2: Extraído de Silva (2017).

Quando selecionamos um ponto ao acaso em uma parte limitada do plano é, também, bastante razoável supor que a probabilidade do ponto selecionado pertencer a uma certa região seja proporcional à área dessa região. Assim,

$$P(A) = \frac{\text{Área da Região } A}{\text{Área da Região } D}$$

Figura 1: Região *A* contida na Região D.



Fonte: Extraído de Silva (2017).

Agora, o problema: Escolhem-se, aleatoriamente, três pontos num plano. Ache a probabilidade de serem os vértices de um triângulo obtusângulo.

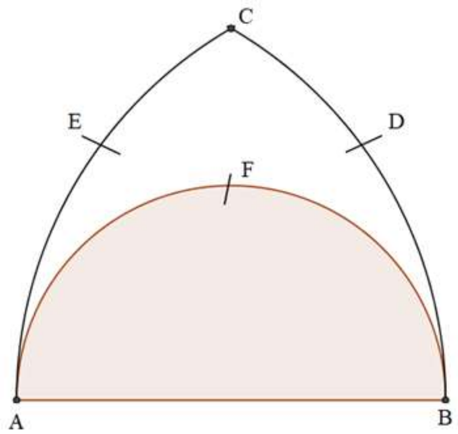
Algumas informações úteis na solução do problema: Triângulo obtusângulo é aquele que tem um ângulo obtuso, ou seja, um ângulo que mede mais do que 90 graus e menos do que 180 graus. O Axioma da Tricotomia: Se $a, b \in \mathbb{R}$, então uma, e só uma, das seguintes proposições é verdadeira: $a < b$ ou $a = b$ ou $a > b$.

A Resolução do problema:Antes de mais nada, podemos assumir que os três pontos formam um triângulo, pois a probabilidade de serem colineares é (praticamente) nula.

Seja $\overline{AB}$ o maior lado do triângulo. Utilizando esse lado para base do triângulo, trace a semicircunferência AFB. Trace, também, com centro em A e em B e tomando para raio a distância $\overline{AB}$, os arcos BDC e AEC, que se intersectamem C.

Concluímos, facilmente, que o outro vértice do triângulo não pode estar no exterior da Ogiva, representada de base $\overline{AB}$ e vértice C, uma vez que, por hipótese, $\overline{AB}$ é o maior lado do triângulo. Se o terceiro vértice M pertencer a Ogiva e não pertencer ao semicírculo, então o triângulo ABM é acutângulo. Se o terceiro vértice M pertencer a semicircunferência, então o triângulo formado será retângulo em M. Se M pertencer ao semicírculo, então, pelo Axioma da Tricotomia, concluímos que o triângulo será obtusângulo.

Figura 2: Semicircunferência AFB e ogiva.



Fonte: Extraído de Silva (2017).

Assim, a probabilidade P procurada é:

$$P = \frac{\text{Área do semicírculo}}{\text{Área da Ogiva}} = \frac{s}{w}$$

Tome $\overline{AB} = 2a$. Desse modo, a área s é igual a $s = \frac{\pi a^2}{2}$

$$w = 2 \cdot \text{Área do setor circular } ABCD - \text{Área do } \Delta ABC$$

Assim,

$$w = 2 \cdot \frac{4 \cdot \pi a^2}{6} - \sqrt{3a^2} = a^2 \cdot \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$$

$$P = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}} = \frac{3}{8 - \frac{6\sqrt{3}}{\pi}}$$

$$P = \frac{3}{8 - \frac{6\sqrt{3}}{\pi}}$$

Conclusões

Com nosso artigo atendemos àquilo que diz respeito às noções de Probabilidade que devem ser apresentadas aos alunos na Educação Básica. Realçamos a importância de estudar probabilidade e os fenômenos aleatórios, e de que a partir desses conhecimentos os alunos podem entender conceitos e palavras relacionadas à chance, incerteza e probabilidade, que aparecem na nossa vida cotidiana, particularmente nos meios de comunicação. Esses importantes conceitos abarcam a compreensão de que a probabilidade é uma medida da certeza, que os modelos são úteis para simular eventos, para estimar probabilidades, e que algumas vezes nossas intuições são incorretas e podem nos levar a uma conclusão equivocada no que se refere à probabilidade e à chance.

Nas situações e nas experiências em que existe o caráter aleatório, os estudantes necessitam aprender a descrevê-las em termos de eventualidades, associá-las a um conjunto de eventos elementares e representá-las de forma de um modelo. Os alunos precisam também dominar a linguagem de eventos, levantar hipóteses de equiprobabilidade, associar a estatística dos resultados observados e as frequências dos eventos correspondentes, e utilizar a estatística de tais frequências para estimar a probabilidade de um evento dado.

Além disso, contribuímos para o melhor conhecimento da história dessas teorias, tão importantes nas ciências exatas. Nesse sentido, com uma melhor abordagem desse tema, o aluno terá a condição de perceber a existência de diversos tipos de problemas e modelagens probabilísticas.

Referências

CRILLY, T. 50 Ideias de Matemática que você precisa conhecer. São Paulo: Planeta, 2017.

JAMES, B. R. Probabilidade: um curso em nível intermediário. 4ª. Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

LOPES, C. E. A probabilidade e a estatística no Ensino Fundamental: uma análise curricular. Campinas: Faculdade de Educação da Unicamp,1998. 125 p. Dissertação (Mestrado em Educação).

MOREIRA, J. A.; SALSA, I. S.: Probabilidade e Estatística. Natal: EDUFRN, 2008.

SILVA, A. R. Motivações Matemáticas por meio de resolução de problemas de Probabilidade Geométrica. Natal: Centro de Ciências Exatas e da Terra, UFRN, 2017. 62 p. Dissertação (Programa De Pós-Graduação Em Matemática Em Rede Nacional Mestrado Profissional).

SMOLE, K. S; DINIZ, M. I.; PESSOA, N.; ISHIHARA, C. Jogos de Matemática: de 1º a 3º ano. Porto Alegre: Artmed, 2008.

WOODWARD, E.; HOEHN, L. Probabilidade na Geometria do Segundo Grau. In: Aprendendo e Ensinando Geometria. Org. Lindquist, M. M. e Shulte, A. P. São Paulo: Atual Editora, 1994.