

## MOBILIZANDO CONTEÚDOS DE ÁLGEBRA NO ENSINO DE GEOMETRIA PLANA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes<sup>1</sup>; Jaques Silveira Lopes<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Rio Grande do Norte, [gabriela@ccet.ufrn.br](mailto:gabriela@ccet.ufrn.br)

<sup>2</sup>Universidade Federal do Rio Grande do Norte, [jaques@ccet.ufrn.br](mailto:jaques@ccet.ufrn.br)

### Resumo:

Neste artigo, trazemos a possibilidade de uma articulação entre o ensino de Geometria Plana na educação básica e conteúdos da componente curricular de Álgebra Abstrata, particularmente Grupo de Isometrias, presente nos cursos de Licenciatura em Matemática. É maravilhoso notarmos a perfeição em algumas coisas que fazem parte da nossa vida! Quando observamos uma flor na natureza, vemos que uma de suas pétalas é semelhante à outra. Quando olhamos no espelho, percebemos uma harmonia na posição dos nossos olhos, nariz e boca. Se imaginarmos uma linha vertical passando pela ponta do nosso nariz, notamos que o lado direito é bem parecido com o lado esquerdo. O que percebemos é a presença de uma característica que denominamos simetria. Tanta perfeição na natureza despertou no ser humano a vontade de também se manifestar buscando tal perfeição. Desde a antiguidade, vários povos utilizavam figuras geométricas como elementos decorativos e nas construções arquitetônicas. Com o passar do tempo foram aperfeiçoadas a visão e percepção das simetrias e foi desenvolvida uma forma matemática de abordá-las a qual chamamos de Isometrias. Exploramos, neste artigo, alguns aspectos geométricos e algébricos das isometrias, discutimos formas de abordar as isometrias como uma ferramenta construtiva para o aprendizado e fixação de conteúdos de geometria plana, além de examinarmos algumas aplicações das isometrias. Nossa intenção não é esgotar o assunto e sim provocar, nos leitores, o interesse pelo conteúdo que é vasto e fascinante.

**Palavras-chave:** Simetria, Geometria Plana, Grupo de isometrias, Matemática da Educação Básica.

### Introdução

O mundo em que vivemos e observamos desperta a nossa imaginação e faz com que nós, seres humanos, ao contemplarmos tanta beleza tentemos reproduzi-lo. Notamos, por exemplo, uma harmonia na natureza, nas artes, na arquitetura e em várias outras manifestações culturais humanas. Na beleza de uma simples flor ou na beleza de uma borboleta, observamos um padrão desenhado pela natureza. O homem, com a sua criatividade, mostrou-se capaz de inventar formas de representar esses fenômenos naturais por meio da Matemática. Por muitos séculos, a Matemática descreveu apenas a geometria envolvida nestes feitos, em 1891, Evgraf Stepanovich Fedorov (1853-1919) conseguiu apontar uma teoria estrutural, baseada na Teoria de Grupos. A partir daí foram elaborados os grupos de isometria no espaço e no plano, nos focaremos neste último para indicar a articulação entre essa teoria, presente nos cursos de Licenciatura em Matemática, constituindo uma possibilidade de ensino da Geometria Plana na Educação Básica.

Estamos sempre cercados por problemas físicos que necessitam de conceitos e procedimentos da Geometria para serem compreendidos e resolvidos. As relações entre elementos de figuras planas podem desenvolver nos estudantes o pensamento geométrico e

Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. (BRASIL, 2017, p.227)

Simetria é um conceito muito importante em Matemática. E percorre várias aplicações em outras áreas do conhecimento como artes, Química, Música, Geologia, Arquitetura, Cristalografia, e outras. Segundo Pasquini e Bortolossi (2015), “Ao longo da história, a palavra simetria teve diferentes significados culminando com o conceito moderno de invariância por um grupo de transformações”. Esse conceito se encaixa em uma perspectiva acadêmica que pode ser desenvolvido em um curso inicial de formação de professores de Matemática, mas se mostra não eficiente para uma condução no contexto escolar da Educação Básica.

As atividades para a exploração das simetrias devem iniciar-se de forma Lúdica já na Educação Infantil e concordamos que “No Ensino Fundamental – Anos Iniciais, [...] O estudo das simetrias deve ser iniciado por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano” (BRASIL, 2017, p. 227).

Nos anos finais do Ensino Fundamental, já pode figurar como objeto de conhecimento, as simetrias de translação, rotação e reflexão com o objetivo de desenvolver habilidades como “reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenhos ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros” (BRASIL, 2017, p.261). Nesse sentido, podemos explorar essas simetrias apoiados na observação de objetos do mundo físico naturais, como estrela do mar, flores e animais ou objetos do mundo físico que são frutos da construção humana, tais como, pinturas, artesanatos e construções arquitetônicas. Com isso estaremos permitindo ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

Com o conceito e o entendimento de simetrias, assim podemos dizer, proporcionamos aos alunos inúmeras possibilidades de estabelecimento de conexões com diversas outras áreas do conhecimento. Esse caráter multidisciplinar do conceito moderno de simetria ressalta a importância da abordagem desse tema já na Educação Básica, sobremaneira no Ensino Médio,

onde os alunos detêm um ferramental teórico importante, já disponível, para a compreensão dos assuntos abordados. É importante que na formação dos Professores de Matemática já seja colocada essa possibilidade de exploração pedagógica do tema, pois o conceito de simetria pode passar despercebido e, com isso, ser perdida uma grande oportunidade de pontuar ao futuro licenciado que temas como esses podem abrir uma grande janela de motivação para seus futuros alunos.

O incentivo ao estudo da geometria, e a compreensão de temas relacionados, no Ensino Médio é extremamente importante. Segundo Smole et. al. (2008) é possível compreendermos o ensino de geometria para o desenvolvimento do chamado *raciocínio espacial*, sendo que para elas esse dueto é harmonioso, ou seja, geometria e o raciocínio espacial estão intimamente interligados. Com isso, o aluno pode ganhar muito na construção das representações mentais das figuras geométricas e das propriedades concernentes. As mesmas autoras ainda ressaltam a importância do desenvolvimento do pensamento geométrico, e destacam que “[...] esse desenvolvimento não ocorre de forma rápida, e nem somente ao longo do ensino fundamental, cabendo ao ensino médio uma parte considerável dessa tarefa”. O estudo de isometrias pode funcionar como um caminho condutor para o desenvolvimento desse pensamento geométrico, com a aquisição de diversas habilidades.

## **Metodologia**

Tratamos aqui do estudo de conteúdos de Álgebra Moderna e da discussão acerca da utilização destes tópicos usando como fio condutor a noção de simetrias. Nosso guia com os passos para a realização da abordagem aqui apresentada é baseado em três pilares:

- Compreender o conceito de simetria ligado ao conhecimento matemático em Álgebra Moderna;
- Articular o conceito de simetria ligado ao conhecimento matemático em Álgebra Moderna com o conceito de simetria no contexto escolar da Educação Básica;
- Uma discussão mais ampla sobre a História do Conceito de simetria pode ser encontrada em Pasquini e Bortolossi (2015). Consideramos para a nossa investigação, conceitos modernos de simetria.

Um significado de simetria que podemos encontrar:

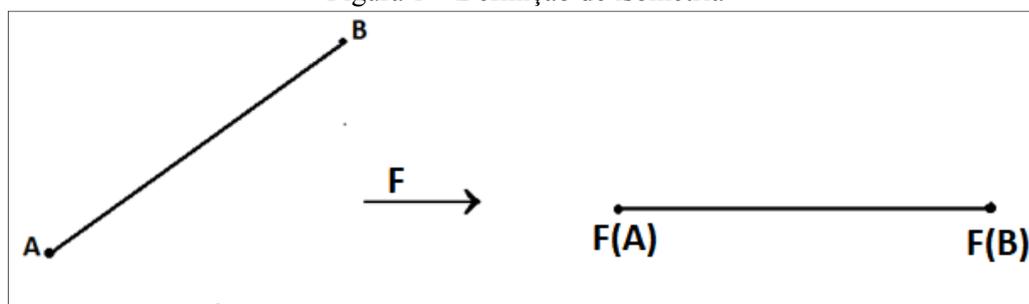
O conceito moderno de simetria refere-se a uma relação lógico-matemática ou uma propriedade intrínseca de uma entidade matemática as quais, sob uma certa classe de transformações (tais como rotações, reflexões, inversões

ou outras operações abstratas) deixam algo inalterado (invariante). (HON e GOLDSTEIN, apud PASQUINI e BORTOLOSSI, 2015)

Mais precisamente, podemos apresentar como uma definição matemática de Simetria o seguinte: Seja  $X$  um subconjunto não vazio do plano euclidiano  $R^2$ . Dizemos que uma função  $F : R^2 \rightarrow R^2$  é uma simetria do conjunto  $X$  se  $F$  satisfaz as duas condições seguintes:

- a)  $F$  é uma isometria, isto é,  $F$  preserva distâncias. Mais precisamente: quaisquer que seja os pontos  $A, B \in R^2$  tem-se  $d(A, B) = d(F(A), F(B))$ .

Figura 1 – Definição de isometria



Fonte: elaborado pelos autores

- b)  $F(X) = X$ , isto é,  $X$  é invariante por  $F$ . Isto significa que a imagem do conjunto  $X$  pela função  $F$  é igual ao conjunto  $X$ .

A palavra Isometria tem origem grega, isos (iguais) e metria (medida). Uma isometria é uma transformação geométrica que conserva as medidas dos comprimentos dos segmentos de retas e as medidas de amplitude dos ângulos, sendo assim os segmentos de reta de uma figura transformada por uma isometria são *geometricamente* iguais aos da figura original, logo as transformações dão origem a objetos congruentes, isto é, apenas mudam os objetos de posição conservando sua forma e tamanho originais. As isometrias no plano são as mais estudadas, pois as repetições ordenadas dão origem, por exemplo, às decoração de igrejas, de azulejos, mosaicos, frisos e papéis para decoração. Um exemplo de aplicação das isometrias na matemática está no estudo de ornamentos, classificados a partir do conjunto de isometrias que aplicam um determinado ornamento entre si.

Em uma componente curricular de Álgebra em cursos de Licenciatura em Matemática, a estrutura de grupos é ensinada do ponto de vista estrutural desse conjunto, mas pouco satisfatório na direção de se alcançar a compreensão do funcionamento interno dos elementos deste conjunto. Além disso, esse procedimento oculta o fato de como são esses elementos e

suas propriedades e não mostra a relação entre este componente curricular e a futura prática docente do professor de matemática. Essa é a prática dominante na Matemática acadêmica, a valorização das estruturas sobre a natureza dos objetos que as compõe como indicado por Diueudonné (1990). A incluir o estudo do Grupo de Isometrias nesta componente curricular, os futuros professores podem notar as propriedades geométricas dos seus elementos podendo assim associar esse conteúdo à geometria plana da educação Básica.

Como já destacamos, as isometrias possuem diversas aplicações em várias áreas, como por exemplo, na física, química, artes e a arquitetura. Intuitivamente, o fato de termos que um objeto, quando possui algum tipo de simetria, poder ser convertido nele próprio, a partir de uma de suas partes, é algo que abre esse grande número de aplicações. Com simetrias podemos manter formas e distâncias, fazendo com que se estabeleça uma relação entre as partes e o todo de uma figura ou objeto no qual se observam harmonia e algum tipo de regularidade.

Diversos povos antigos já utilizavam formas geométricas como elementos decorativos, na arquitetura, nas manifestações artísticas e até em seus utensílios domésticos. E podemos perceber que a disposição dessas figuras geométricas tornou-se mais trabalhada e complexa, à medida que o tempo foi passando, ao ponto de que em algumas civilizações podemos perceber tipos diferentes de ornamentos, utilizando, para isso, repetições em um plano de uma mesma figura geométrica, de forma que estas repetições preenchessem todo o plano. Podemos perceber que a geometria está presente fazendo com que esses padrões possuem eixos de simetria, aplicação de rotações, translações, reflexões, que formam a chamada Matemática das isometrias. A exploração desses ornamentos promove a interdisciplinaridade envolvendo as dimensões culturais, sociais, políticas e econômica de grupos sociais em diversas épocas.

### **Resultados e Discussão**

Em boa parte dos cursos de licenciatura em Matemática são apresentadas aos alunos várias estruturas algébricas que, geralmente, são consideradas temas de difícil compreensão e concretização. Entretanto é possível levar ao aluno uma melhor abordagem de uma importante estrutura algébricas que é a estrutura de Grupo. Podemos relacionar a teoria de Grupos com as isometrias no plano, baseando-nos na geometria, propiciando uma maior clareza de alguns dos conceitos algébricos abordados.

A abordagem geométrica de conceitos teóricos dá, ao estudante, uma perspectiva

diferente da teoria de Estruturas Algébricas. É importante mostrar para os alunos de que é possível visualizar geometricamente conceitos algébricos, pois isso poderá favorecer sua futura prática docente.

Nesse sentido, podemos caracterizar as isometrias sob diferentes pontos de vista, por exemplo, no que diz respeito a pontos fixos ou invariantes. Organizarmos, assim, o conteúdo de grupo de isometrias no plano mobilizando conteúdos de Álgebra da Licenciatura em Matemática e os conteúdos de geometria plana da Educação Básica conforme a Tabela 1.

Tabela 1- Conteúdos mobilizados em cada nível de educação

Nível de Ensino	Curso de Licenciatura em Matemática	Educação Básica
Conteúdos Mobilizados	Pela Álgebra	Pela Geometria Plana
Definir isometrias no plano	Definição de aplicação	Toda isometria preserva ângulos. A imagem de um triângulo por uma isometria é um triângulo congruente ao original. Distância entre pontos.
Construir o grupo de isometrias	A composição de duas isometrias é uma isometria, uma isometria é bijetiva e a inversa de uma isometria também é uma isometria.	Apresentar e discutir a Restrição Cristalográfica no plano.
Definir translação	A composição de duas translações é uma translação. O subgrupo das translações é normal no grupo de isometrias. O elemento inverso de uma translação é uma translação	Não fixa pontos do plano. Retas paralelas, paralelogramos, vetor ou segmento orientado
Definir rotação	A composição de duas rotações é uma rotação. O elemento inverso de uma rotação é uma rotação	Só fixa um ponto, o centro de rotação. Ângulos
Definir reflexão	A composição de duas reflexões é uma rotação . A ordem de uma reflexão é 2.	Fixa uma reta: o eixo de reflexão. Retas perpendiculares, triângulos congruentes, mediatriz.
Definir reflexão com deslizamento	Reflexão com deslizamento é a composição de uma reflexão com uma translação.	Não fixa pontos do plano. Retas paralelas e retas perpendiculares.

Fonte: Elaborado pelos autores

Por exemplo, nas atividades voltadas para a Educação Básica podemos abordar as isometrias nas culturas indígenas brasileiras. Desta forma enriquecemos as discussões em sala de aula, promovendo a interdisciplinaridade envolvendo as dimensões culturais, sociais, políticas e econômica de grupos indígenas remanescentes no Brasil. Como citação, os Tapirapés são um grupo indígena brasileiro que habita as áreas indígenas Tapirapé/Karajá e Urubu Branco, no nordeste do estado do Mato Grosso, e o Parque do Araguaia, na ilha do Bananal, no estado do Tocantins. Esse grupo produz peneiras com grafismos (Figura 2) de onde observamos a ação das isometrias na constituição das tramas.

Figura 2 – Peneira Tepirapé

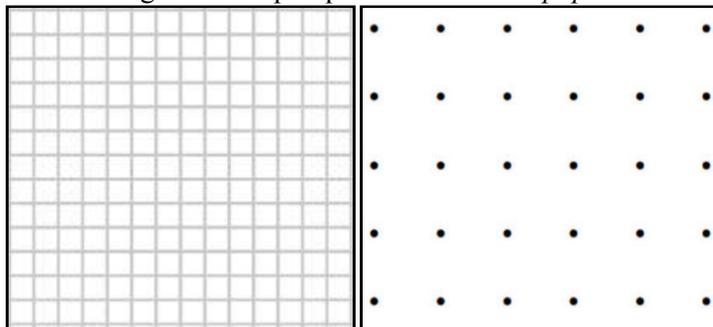


Fonte: <https://spcity.com.br/sao-paulo-tambem-arte-indigena/> (Acesso: 05/09/18)

Uma atividade que envolve as isometrias na Educação Básica é a observação do desenho explícito no objeto. Após essa observação pode-se identificar e discutir as isometrias presentes na constituição da trama.

O estudante pode, então, em um papel quadriculado (Figura 3) desenvolver o seu próprio desenho e socializar com os colegas indicando as isometrias por ele usadas.

Figura 3 – Papel quadriculado e *dot paper*



Fonte: Acervo dos autores

O estudo das simetrias de figuras geométricas planas pode ser feito com o auxílio do *dot paper* (figura 3) promovendo a inserção do sistema cartesiano de coordenadas. Os estudantes

traçam os eixos cartesianos e formam uma figura marcando pontos referentes a pares ordenados.

A partir desses pontos e pela ação de uma isometria os estudantes podem ser levados a marcar novos pontos, esses novos pares ordenados quando ligados formam uma figura isométrica a original. A partir da comparação da figura original com a posteriormente construída, poderá ser feita a discussão da transformação ocorrida.

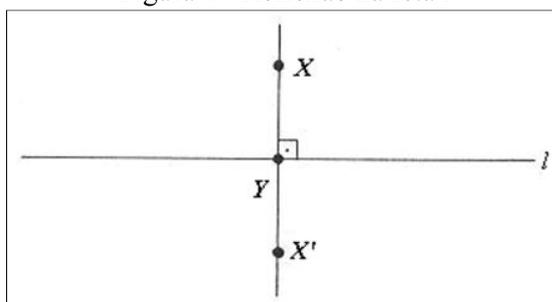
Sob o ponto de vista da inserção dos grupos de isometria na componente curricular de Álgebra nos cursos de Licenciatura, podemos fazer a definição de rotação, reflexão, translação via geometria plana, dessa forma algumas propriedades algébricas desses elementos, como por exemplo a sua ordem no grupo e isometrias, podem ser mais facilmente notados, esse procedimento, em geral é feito de forma abstrata.

Vejamos uma abordagem elaborada a partir de Lima (1996) e Brigitta (1982):

- Definição de reflexão em uma reta: Seja  $l$  uma reta no plano  $E$ . A reflexão em relação à reta  $l$  é a transformação  $R_l: E \rightarrow E$  assim definida:  $R_l(X) = X, \forall X \in l$  e para  $X \notin l, R_l(X) = X'$  é tal que a mediatriz do segmento  $XX'$  é a reta  $l$ . A reta  $l$  chama-se eixo de reflexão.

Ilustremos graficamente, na figura 4, o simétrico  $X' = R_l(X)$  de um ponto  $X$  não pertencente a uma reta  $l$ , em relação a essa reta.

Figura 4 - Reflexão na reta  $l$

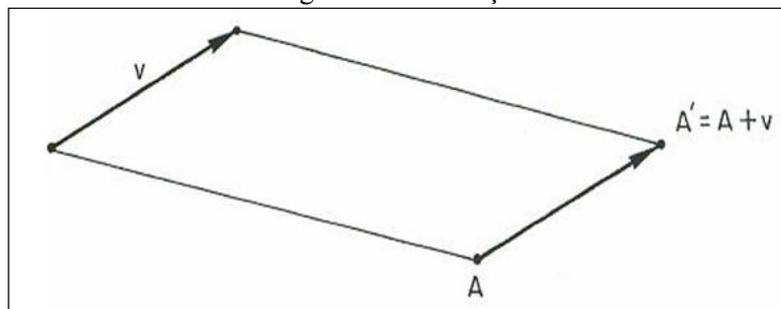


Fonte: acervo dos autores

Na figura acima  $Y$  é o pé da perpendicular baixada de  $X$  sobre  $l$ . E  $Y$  é o ponto médio do segmento  $XX'$ .

- Definição de translação: A translação (Figura 5) determinada pelo vetor  $v \in \mathbb{R}^2$  é a transformação  $T_v: E \rightarrow E$  que leva cada ponto  $A \in E$ , no ponto  $A' = A + v$ .

Figura 5 - Translação



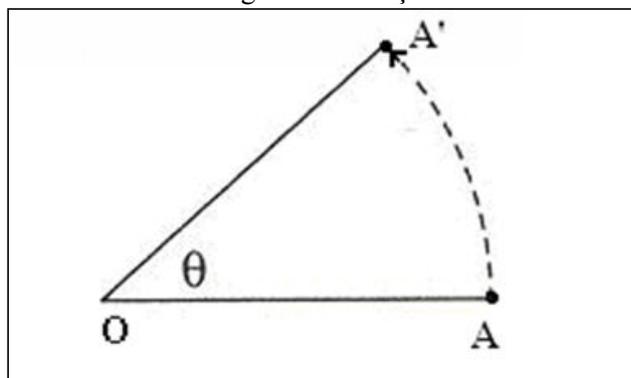
Fonte: acervo dos autores

- Definição de rotação: Seja  $O$  um ponto no plano  $E$  e  $\theta$  um ângulo orientado,  $-\pi < \theta \leq \pi$ , conforme a figura 2.15. A transformação, que tem  $O$  como ponto fixo, e que a cada ponto  $A$ ,  $A \neq O$  do plano  $E$  associa o ponto  $A' = \text{Rot}_{O,\theta}(A)$  de forma que se tenha

$$OA' = AO \text{ e } \widehat{AOA'} = \theta$$

chama-se rotação de centro  $O$  e ângulo  $\theta$ .

Figura 6 - Rotação



Fonte: acervo dos autores

Dessa forma, as definições geométricas de reflexão, translação e rotação podem ser abordadas tanto na Educação Básica, quanto nos cursos de Formação de professores de Matemática. É importante ressaltar que na formação dos Professores de Matemática essa abordagem oferece uma oportunidade ao futuro licenciado de trabalhar com temas que podem abrir uma grande janela de motivação para seus alunos no estudo da Geometria Plana na Educação Básica.

## Conclusão

Neste nosso trabalho apresentamos as isometrias no plano, com base na geometria plana, e conectamos esse conceito às Estruturas Algébricas, que são as áreas da Matemática que fundamentam essa teoria. Apresentamos o viés histórico, bem como definimos formalmente uma isometria. Foram trazidas situações em que professores de Matemática poderão tratar, desse tema, com seus alunos. São destacados exemplos de isometrias como: Reflexão, Translação, Rotação e Reflexão com Deslizamento. Com o trabalho, apontamos que a abordagem geométrica de conceitos teóricos dá, ao estudante, uma perspectiva diferente da teoria de Estruturas Algébrica, pois é de suma importância mostrar para os alunos de que é possível visualizar geometricamente conceitos algébricos. O estudo das isometrias no plano mostra ser viável esse entendimento geométrico de importantes conceitos algébricos.

## Referências

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA.

Texto da BNCC aprovado pelo CNE, 2017. Disponível em:

<[http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_docman&view=download&alias=79611-anexo-texto-bncc-aprovado-em-15-12-17-pdf&category\\_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79611-anexo-texto-bncc-aprovado-em-15-12-17-pdf&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192)>. Acesso em: 05 set. 2018.

BRIGITTA, Érika e Rouff, Ledergerber, Isometrias e Ornamentos no Plano Cartesiano. São Paulo: Atual, 1982.

DIEUDONNÉ, J. A formação da Matemática contemporânea. Tradução: J.H.von Hafe Perez. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1990.

LIMA, Elon L., Isometrias. Coleção de Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

PASQUINI, R. C. G.; BORTOLOSSI, H. J. Simetria: história de um conceito e suas implicações no contexto escolar. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. – (Série História da Matemática para o ensino; v.9).

SMOLE, K. S; DINIZ, M. I.; PESSOA, N.; ISHIHARA, C. Jogos de Matemática: de 1º a 3º ano. Porto Alegre: Artmed, 2008.