

ERROS EM PROBLEMAS DE PROPORÇÃO DUPLA: UM ESTUDO DE CASO COM ESTUDANTES DO 6º ANO

Anna Barbara Barros Leite (1); Leidy Johana Peralta Marín (2); Ariédja de Carvalho Silva (3)
Síntria Labres Lautert (4)

Universidade Federal de Pernambuco
e-mail: anna.barbara.leite@hotmail.com

Resumo: o presente material tem como objetivo analisar a natureza dos erros cometidos por uma amostra de estudantes ao resolver situações problema de proporção dupla. Para esta análise foram selecionados 10 estudantes do 6º ano do ensino fundamental de uma escola pública da cidade do Recife, de ambos os sexos e com média de idade de 12 anos, os materiais analisados foram da atividade de resolução escrita de problemas de proporção dupla. A análise dos erros cometidos pelos participantes baseou-se numa proposta construtivista que explana sobre a relevância de tornar o erro objeto observável para a compreensão do raciocínio dos estudantes, bem como, utilizá-lo como ferramenta para o ensino da matemática. De forma geral foram encontrados dois tipos de resolução dos problemas: completas e incompletas, dentro dos quais foram identificados erros quanto às etapas de solução e erros quanto à manipulação das informações em situações de proporção composta. Conclui-se que analisar os erros cometidos nestes tipos de situações revelam formas de pensar próprias dos estudantes neste segmento educacional, bem como, sugerem aos professores pistas de como utilizar os erros como ferramentas didáticas para o ensino das proporções.

Palavras-chave: análise do erro, proporção dupla, educação matemática em crianças.

Introdução

Uma possível articulação entre os campos de saberes da Educação Matemática e a Psicologia Cognitiva é o processo de resolução de problemas, o qual, é considerado por ambas um recurso propiciador de aprendizagem e uma ferramenta pedagógica (BRASIL, 1997). Nos estudos realizados nestas áreas de conhecimento, observa-se que o papel do erro na resolução de problemas matemáticos é objeto relevante de discussões, pois, ressaltam que os erros cometidos são formas de conhecer o raciocínio dos alunos e revelam os limites e as possibilidades de pensamento sobre os seus conhecimentos matemáticos (SPINILLO; PACHECO; GOMES; CAVALCANTI, 2014). Partindo deste posicionamento os erros apresentados pelos estudantes frente a uma situação problema devem ser objeto de análise tanto do professor quanto para o pesquisador, pois, revelam a natureza das suas dificuldades e propiciam as ações didáticas para superá-las. Para o desenvolvimento do presente estudo foi escolhido o conceito de proporção dupla, definido por situações que envolvem duas ou mais proporções independentes ligadas entre si por uma variável em comum (VERGNAUD, 1983; 1988; 2011). A escolha por este conceito deve-se ao fato de que o raciocínio proporcional é considerado uma pedra angular na compreensão do campo multiplicativo, por envolver o sentido de co-variância e múltiplas

comparações, bem como, se referir à capacidade de reunir e processar mentalmente conjuntos diferentes de informação (LESH; POST; BEHR, 1988).

Segundo Polya (1995), a atividade de resolução de problemas envolve quatro etapas sequenciais:

- 1- Compreensão do problema: consiste em identificar as partes principais do problema, articulando a incógnita, os dados e a condicionante;
- 2- Estabelecimento de um plano: nesta etapa exige-se que o sujeito tenha conhecimento dos procedimentos (cálculos, desenhos) necessários para a resolução do problema. Ressalta-se que pode haver dificuldade na passagem da compreensão do problema para o estabelecimento de um plano, referindo-se este último à etapa principal da resolução.
- 3- Execução do plano: envolve a seleção e aplicação do procedimento mais útil;
- 4- Verificação da solução ou retrospecto: consiste em reexaminar a resolução escolhida, analisar o plano e sua execução.

É importante ressaltar que no âmbito escolar observam-se várias possibilidades de avaliar o desempenho dos estudantes ao resolverem problemas, dentre elas duas abordagens destacam-se:

- (i) abordagem tradicional: que considera o erro como algo a ser corrigido ou apagado, para que haja uma substituição do raciocínio incorreto, privilegia-se a avaliação do produto final em detrimento do processo da resolução, e, a aprendizagem está centrada em reforços positivos em relação ao acerto e punições frente ao erro (MACEDO, 1990; SPINILLO; PACHECO; GOMES; CAVALCANTI, 2014);
- (ii) abordagem construtivista: o erro é concebido como algo natural, necessário e inevitável no processo de aquisição do conhecimento da criança. Esta abordagem, baseada numa proposta piagetiana, postula que as ideias são criadas e construídas pelo processo de auto-regulação, no qual o sujeito pode ter ações que devem ser corrigidas ou mantidas. Levando em consideração os resultados que quer alcançar, os erros tornam-se objetos de análise para a compreensão de sua essência e surgem como ferramenta didática para o processo de ensino (MACEDO, 1990; SPINILLO, 1995; PINTO, 2000; CURY, 2008; SPINILLO, PACHECO, GOMES, CAVALCANTI, 2014);

Para este estudo será considerada a perspectiva construtivista, na qual o processo de avaliação deve considerar os movimentos de desequilíbrios e conflitos cognitivos do estudante. Nesta perspectiva, não se pretende ignorar o erro ou aceitá-lo, mas, busca-se compreender o

raciocínio dos alunos e por isso se baseia tanto na interpretação dos erros quanto dos acertos, bem como, apoia que haja um retorno cognitivo posterior às avaliações, seja em forma de *feedback* ou do uso de estratégias metacognitivas. Ao considerar o caminho percorrido pelo estudante na construção de seu conhecimento, e não apenas o produto de uma avaliação, torna-se possível atentar e analisar a real compreensão acerca do conteúdo avaliado, visto que, os acertos podem ser decorrentes apenas de uma memorização de procedimentos enquanto que alguns erros são derivados de hipóteses construídas pelos alunos.

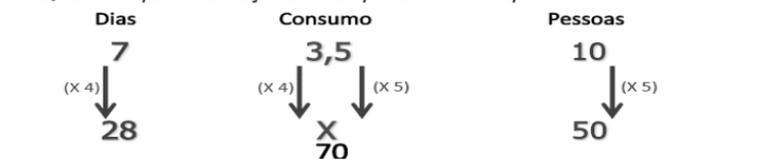
Portanto, sob este ponto de vista, a avaliação de um objeto de conhecimento, como por exemplo um conceito matemático, deve considerar a relação entre os estágios de desenvolvimento do estudante, os conhecimentos já consolidados cognitivamente e o que necessita ser adquirido.

Com respeito ao conceito de proporcionalidade, sua definição é baseada no sentido de covariância e múltiplas comparações, bem como, se refere à capacidade de reunir e processar mentalmente conjuntos diferentes de informação. Outra característica deste conceito refere-se à capacidade de entender a relação multiplicativa inerente em situações de comparação (LESH; POST; BEHR, 1988). As situações que envolvem proporcionalidade caracterizam-se pela presença de relações entre variáveis, e estas podem apresentar-se de três formas diferentes: (i) proporção simples, definida pela existência de uma relação constante entre os dois números; (ii) proporção múltipla, caracterizada por situações que envolvem duas ou mais proporções simples conjugadas; (iii) proporção dupla, caracterizada por situações que envolvem duas ou mais proporções independentes ligadas entre si por uma variável em comum (VERGNAUD, 1983; 1988; 2011).

Nos casos que envolvem proporção dupla, apresenta-se na situação uma estrutura composta por dois ou mais pares de grandezas, os quais não mantêm relação proporcional entre si, mas permeada por uma terceira variável, chamada de produto. Ou seja, os pares de grandezas envolvidos (por exemplo, M_1 , M_2 e M_3) relacionam-se dois a dois separadamente, de forma que M_3 é o produto da situação problema apresentada e se relaciona separadamente com M_1 e M_2 . (SANTOS, 2015; GITIRANA e cols., 2014; VERGNAUD, 2011; 1995; 1994). Na Figura 1 é ilustrado um exemplo para este tipo de situação, nota-se que o conjunto de dias e o conjunto de pessoas não mantêm uma relação proporcional direta entre si, mas permeada pela informação da quantidade de consumo de açúcar que depende do número de pessoas e do tempo que estas irão permanecer na situação dada ao contexto.

Figura 1: Exemplo de proporção dupla ilustrado por Magina 2015.

Um grupo com 50 pessoas vai passar 28 dias em férias no campo. Elas precisam comprar uma quantidade de açúcar suficiente. Elas sabem que a média de consumo por semana para 10 pessoas é de 3,5kg. Quantos quilos de açúcar elas precisam comprar?



Fonte: Magina, 2015.

Neste sentido, para a resolução deste tipo de problema opera-se multiplicativamente a partir dos operadores escalares de cada conjunto, de forma que para encontrar o produto final é necessário realizar a seguinte operação: $3,5(x4) (x5) = 70$. A relação entre as taxas de proporcionalidade de cada par de grandeza está mais fortemente atrelado ao fator escalar e ao número de replicações. Outra característica observada neste tipo de situação é que, caso sejam mantidos o valor inicial da grandeza produto e as taxas de proporcionalidade, mudanças nos pares numéricos nos outros conjuntos não acarretariam em mudança no resultado final.

Diante do exposto, considera-se que é relevante investigar o raciocínio matemático do estudante ao resolver de forma escrita problemas matemáticos de proporção dupla, e, especificamente analisar os erros cometidos buscando identificar sua natureza.

MÉTODO

Participantes

Para a composição desta amostra foi realizado um processo de triagem dentro de um banco de dados de uma pesquisa realizada anteriormente por Lautert (2015), que compreendia 210 alunos de ambos os sexos matriculados nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio, de uma escola pública da cidade do Recife, divididos em subgrupos de 30 participantes por ano escolar. Para este material foram selecionados 10 estudantes do 6º ano do ensino fundamental (média de idade:11 anos) que erraram na resolução de um dos problemas da atividade proposta.

Procedimentos e material

Todos os estudantes realizaram uma atividade escrita composta de dois problemas de proporção múltipla e dois problemas de proporção dupla. A instrução dada a todos participantes pode ser assim resumida: “Gostaríamos que vocês resolvessem individualmente esta ficha utilizando apenas lápis, borracha ou caneta. Abaixo de cada pergunta há um espaço para a

resolução, sendo possível utilizar outros espaços em branco deste material. É necessário que vocês apresentem de forma clara a resposta encontrada”. (LAUTERT, 2015)

Para essa análise utiliza-se as resoluções escritas de um dos problemas de proporção dupla, apresentado abaixo, este problema foi escolhido porque apresentou elevado número de erro para sua resolução.

Na Escola Rui Barbosa está sendo realizada uma gincana escolar e neste ano uma das tarefas propostas aos estudantes é que eles se mobilizem na arrecadação de alimentos para doação. Na turma do 5º ano, um grupo de 6 estudantes conseguiu arrecadar 20 quilos de alimentos em 5 dias. Quantos quilos de alimentos seriam arrecadados se o grupo fosse composto por 18 estudantes trabalhando durante 10 dias?

Fonte: Lautert (2015)

Na sequência apresentam-se os resultados e as discussões dos dados selecionados.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na análise realizada, de forma geral, foram identificados dois tipos de resoluções que levaram ao erro no problema proposto, a saber:

- 1- Resoluções incompletas:** neste tipo de erro os participantes apenas reconhecem e operam com dois dos três conjuntos de grandezas apresentados no problema. Observou-se que foram utilizadas tanto estratégias escalares como funcionais (ver LEITE, 2016)¹, contudo, a natureza dos erros identificados refere-se especialmente ao fato de que os participantes realizam apenas uma operação de proporção simples, podendo utilizar qualquer par de conjuntos de grandezas apresentados no problema, abaixo seguem-se exemplos deste tipo de erro encontrado.

¹ Estratégia escalar: uso de uma relação escalar entre cada conjunto de grandeza, ou seja, a partir da quantidade de vezes que esse conjunto se altera. Estratégia funcional: estabelece uma ou mais relações funcionais entre os conjuntos de grandezas apresentados.



Exemplo 1: Resolução Incompleta

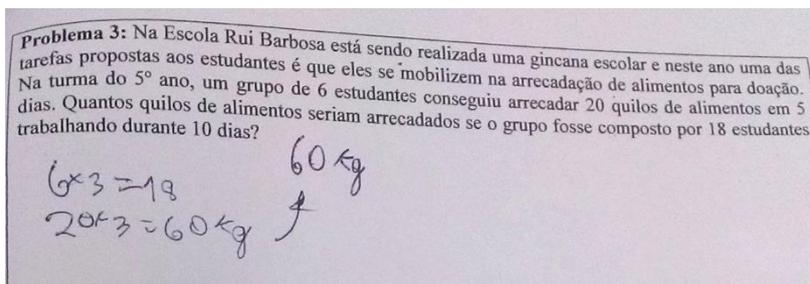


Figura 3: Extrato de Protocolo nº 04, sexo masculino.

Na Figura 3 observa-se que o estudante omite uma das informações do enunciado do problema (quantidade de dias) e, calcula as replicações sofridas pelo conjunto de estudantes (vezes 3) que está relacionado ao fator escalar deste conjunto para posteriormente utilizar o mesmo número de replicações no conjunto dos quilos arrecadados e assim dar resolução ao problema.

Exemplo 2: Resolução Incompleta

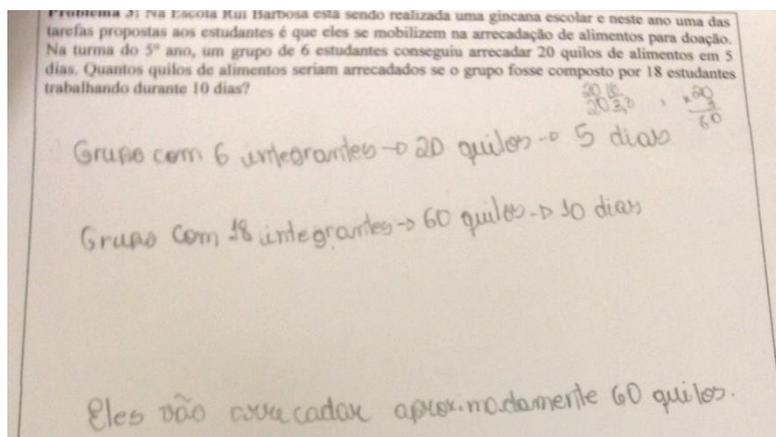


Figura 4: Extrato de Protocolo nº 05, sexo feminino

Na Figura 4, o participante, registra todas as informações do problema, diferentemente da resolução apresentada na Figura 3, contudo, ao proceder com as informações apresentadas não manipula os três conjuntos de grandezas calcula as replicações sofridas pelo conjunto de estudantes (vezes 3) que está relacionado ao fator escalar deste conjunto para posteriormente utilizar o mesmo número de replicações no conjunto dos quilos arrecadados e assim dar resolução ao problema.

Exemplo 3: Resolução incompleta

Nome: *Gracia Carmila* Data: *04/11/15*
 Data de Nascimento: *07/09/2003* Ano: *6^aA*

Problema 1: Na Escola Rui Barbosa está sendo realizada uma gincana escolar e neste ano uma das tarefas propostas aos estudantes é que eles se mobilizem na arrecadação de alimentos para doação. Na turma do 5º ano, um grupo de 6 estudantes conseguiu arrecadar 20 quilos de alimentos em 5 dias. Quantos quilos de alimentos seriam arrecadados se o grupo fosse composto por 18 estudantes trabalhando durante 10 dias?

F	Kg	dias
6	20	5
18	20	10

4 kg por dia

Figura 5: Extrato de Protocolo nº 02, sexo feminino

Na Figura 5, o participante registra todas as informações do problema, contudo, não manipula os três conjuntos de grandezas envolvidos no problema, apenas utilizando as informações dos conjuntos de dias e quilos arrecadados. Ao resolver a situação, utiliza uma estratégia funcional em busca do fator-função existente entre os conjuntos de grandezas (4kg/dia) e depois multiplica equivocadamente este valor encontrado pela quantidade final de dias (10) apresentado no problema.

Ao tomar os erros cometidos como observáveis, nota-se que os estudantes apresentam dificuldades nas primeiras etapas para resolução do problema de acordo com a proposta de Polya (1995) que consistiria na compreensão do problema e estabelecimento de um plano. Contudo, observa-se que os mesmos conseguem discriminar as partes principais do problema, que consistem nos três conjuntos de grandezas em articulação com a pergunta, esbarrando na segunda etapa que consistiria no estabelecimento dos procedimentos necessários para resolver tal situação o que gera uma série de erros em cadeia nas etapas subsequentes de resolução (execução do plano e verificação da solução).

- 2- Resoluções completas:** neste tipo de erro os participantes reconhecem e operam os três conjuntos de grandezas apresentados no problema, foi observado o uso de estratégias escalares e funcionais para a resolução, contudo, a natureza dos erros identificados refere-se especialmente ao fato de que os participantes realizaram operações envolvendo fatores encontrados (informações implícitas que se referem a relações existentes entre os conjuntos de grandezas) com as quantidades de cada conjuntos (informações explícitas apresentadas no problema).

Exemplo 1: Resolução Completa

Problema 3: Na Escola Rui Barbosa está sendo realizada uma gincana escolar e neste ano uma das tarefas propostas aos estudantes é que eles se mobilizem na arrecadação de alimentos para doação. Na turma do 5º ano, um grupo de 6 estudantes conseguiu arrecadar 20 quilos de alimentos em 5 dias. Quantos quilos de alimentos seriam arrecadados se o grupo fosse composto por 18 estudantes trabalhando durante 10 dias?

6 estudantes → 20 kg de al. → 5 dias
18 estudantes → 270 kg → 10 dias

$$\begin{array}{r} 1,5 \\ \times 18 \\ \hline 120 \\ + 15 \\ \hline 270 \end{array}$$

270 kg

1 dia → 4 kg 6 $\frac{14}{20}$ kg

Figura 6: Extrato de Protocolo nº 09, sexo feminino

Na Figura 6, o participante registra e manipula todas as informações do problema, busca identificar a unidade utilizando uma estratégia funcional (1,5kg/estudante/dia) e depois multiplica equivocadamente este valor encontrado pela quantidade final de estudantes (18) e pela quantidade final de dias (10) apresentado no problema.

Abaixo é apresentada a Figura 7, na qual o participante registra e manipula todas as informações do problema, realiza primeiramente a multiplicação entre a quantidade de quilos pelo número total de dias de arrecadação (20kg x 10 dias = 200) e depois multiplica este valor pelo número de replicações sofridas no conjunto dos estudantes (vezes 3), encontrado o que acha ser o resultado do problema

Exemplo 2: Resolução Completa

Problema 3: Na Escola Rui Barbosa está sendo realizada uma gincana escolar e neste ano uma das tarefas propostas aos estudantes é que eles se mobilizem na arrecadação de alimentos para doação. Na turma do 5º ano, um grupo de 6 estudantes conseguiu arrecadar 20 quilos de alimentos em 5 dias. Quantos quilos de alimentos seriam arrecadados se o grupo fosse composto por 18 estudantes trabalhando durante 10 dias?

6 → 20kg - 5d 18 → 600kg - 10d

20 × 10 = 200

200 × 3 = 600

R: 600kg

Figura 7: Extrato de Protocolo nº 10, sexo masculino

Na Figura 8, apresentada abaixo, o participante registra e manipula todas as informações do problema, contudo erra na identificação do fator do conjunto de estudantes ($6 \times 2 = 18$) e a relação entre este fator e o conjunto da grandeza seguinte, quilos de alimentos ($20 \times 2 = 40$), com isso comete uma sequência de erros de cálculo nos passos seguintes do problema (relação entre quilos e dias).

Exemplo 3: Resolução Completa

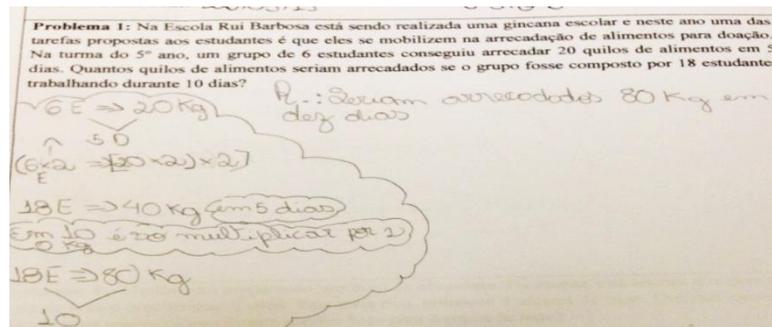


Figura 8: Extrato de Protocolo nº 06, sexo feminino

Após a discussão destes resultados é possível estabelecer parâmetros de comparação entre os dois tipos de resolução encontradas (incompletas e completas). No que se refere às diferenças, observa-se que estas são caracterizadas pela dificuldade de um dos grupos, na identificação das partes do problema e do estabelecimento de um plano de execução (grupo de resolução incompleta), enquanto o outro grupo consegue identificar e estabelecer plano de execução da resolução do problema utilizando as informações características da situação (grupo de resolução completa) (POLYA, 1995).

Quanto às semelhanças identificadas nos dois tipos de resolução, observa-se que em ambas os participantes ignoram questões conceituais, como por exemplo, as operações grandezas semelhantes. Com isto realizam cálculos entre fatores e quantidades, ou entre quantidades de grandezas diferentes, (kg x dia ou dia x estudantes) sem atentar para qual produto final será encontrado. Ademais, cometem erros procedurais nas multiplicações realizadas o que pode ser um indício de dificuldades em manipular muitos conjuntos de grandezas ao mesmo tempo.

CONCLUSÕES

Conforme apontado na seção teórica, analisar os erros cometidos por estudantes auxiliam na compreensão das suas formas de pensar sobre o conceito que está sendo aprendido, bem como, expõem obstáculos do processo de assimilação e acomodação das novas informações provenientes deste conhecimento.

Quanto aos erros cometidos em problemas matemáticos deve-se atentar para a proposta de construção de um conceito em rede, no qual os estudantes valem-se de conhecimentos adquiridos anteriormente para a aprendizagem dos novos conceitos (VERGNAUD,2003).

Na amostra analisada, observa-se de forma ampla quatro dificuldades dos estudantes ao resolverem problemas de proporção dupla, a primeira dificuldade apresentada se refere ao número de informações a serem manipuladas na resolução de problemas de proporção composta, esperava-se que estudantes matriculados no 6º ano já possuíssem conhecimento sobre razão e proporção simples para aprender sobre a proporção composta, pois trata-se de um tema abordado em séries anteriores (BRASIL, 1997).

O conhecimento acerca da relação entre as grandezas surge como outro obstáculo na resolução dos problemas de proporção dupla, pois, foi observado que muitos participantes realizam operações com conjuntos de grandezas diferentes no problema apresentado, como por exemplo, multiplicar ou dividir as quantidades de estudantes pelo número de dias. Esse tipo de erro sugere a necessidade de abordar ou retomar nas discussões em sala de aula conteúdos sobre operações de grandezas articulando com o conteúdo da proporção para que a resolução do problema não seja apenas operar com os números, mas, tenha um significado para o estudante que o realiza.

A identificação dos fatores que se encontram implícitos no problema (números de replicações e co-variações) surgem como uma dificuldade relevante neste tipo de problema, porque leva o estudante a buscar por informações que não estão disponíveis e para isto ele (a) necessitará compreender o conceito abordado e operar com as informações explicitadas. Além disso o erro cometido nesta etapa gera erros nas demais etapas de resolução do problema, visto que o processo de identificação dos dados e elaboração de um plano de resolução estarão afetados (POLYA, 1995).

A quarta e a última dificuldade observada refere-se a realização de operações entre fatores que se encontram implícitos com as informações quantitativas relacionadas explicitamente às grandezas apresentadas no problema. Este obstáculo tem relação com todas as dificuldades acima mencionadas e caracteriza-se como erro tanto procedural (erros nos cálculos) como erro conceitual, pois, o estudante demonstra não possuir compreensão do significado do problema e do conceito de proporção (VERGNAUD,1983).

Conclui-se que analisar os erros cometidos nestes tipos de situações revelam formas de pensar próprias dos estudantes neste segmento educacional, que contribuem significativamente para atuação dos professores em busca de ferramentas e estratégias pedagógicas para o ensino das proporções.

REFERÊNCIAS

- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil**, v.3. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- CURY, H.N. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Belo Horizonte: Autêntica. 2008.
- GITIRANA, V.; MAGINA, S.; SPINILLO, A. G.; CAMPOS, T. M. M. **Repensando multiplicação e divisão – Contribuição da Teoria dos Campos Conceituais**. São Paulo: PROEM, 2014.
- LAUTERT, S.L. **Compreensão sobre os conceitos de função bilinear e múltipla em estudantes do Ensino Fundamental II e Ensino Médio**. Projeto de Pesquisa. Parecer CEP/UFPE de nº 973.620. 2015.
- LEITE, A.B.B. **Resolução de problemas de proporção dupla e múltipla: um olhar para as situações diretamente proporcionais**. Dissertação de Mestrado. Programa da Pós Graduação em Psicologia Cognitiva. UFPE, Recife. 2016.
- LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. **Proportional reasoning**. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teacher of Mathematics, 1988.
- MACEDO, L. de. **Para uma visão construtivista do erro no contexto escolar**. In C. de T. Aguiar (Org.) *Coletânea de Textos de Psicologia*. São Paulo: Secretaria da Educação/Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas, 1, 1990. p. 75-84.
- PINTO, N.B. **O erro como estratégia didática: o estudo do erro no ensino da matemática elementar**. São Paulo. Papyrus. 2000.
- POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. [tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo]. 2º Ed. Rio de Janeiro: Interciência. 1995.
- SANTOS, A. **Formação de professores e as estruturas multiplicativas**. 1º Edição. Curitiba: Appris, 2015.
- SANTOS, L. **Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como?** In Ministério de Educação. Departamento do Ensino Básico. Universidade de Lisboa, 2002. Disponível em: www.ie.ulisboa.pt/pls/portal/docs/1/298506.PDF
- SOARES, A. B.; EMMERICK, T. A. **Compreensão de textos: processos e modelos**. In M. P. E. Mota; A. G. Spinillo. *Compreensão de textos*. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2013. p. 13- 40
- SPINILLO, A. G.; PACHECO, A.B. DE; GOMES, J.F.; CAVALCANTI, L. **O erro no processo de ensino-aprendizagem da matemática: errar é preciso?** Boletim GEPEN (Online), Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, 64, 2014. p. 1-12.
- SPINILLO, A.G. **Avaliação da aprendizagem numa perspectiva cognitiva**. *Psychologica* (Universidade de Coimbra, Portugal), 14, 1995. p. 83-99.

VERGNAUD, G. **Multiplicative structure.** In: LESH, R.; LANDAU, M. (Orgs.). Acquisition of mathematics concepts and processes. London: Academic Press, 1983.

VERGNAUD, G. **O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática.** Educar em Revista. Curitiba, PR: Ed. UFPR, n. Especial 1/2011, p. 15-27, 2011.

VERGNAUD, G. **Structures Multiplicatives.** In: HIEBERT, H.; BEHR, M. (Orgs.). Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in Middle Grades. Laurence Erlbaum Ed. Hillsdale, 17. 1988. p. 141-161.