

## **RELAÇÃO ENTRE A GEOMETRIA ESPACIAL E A FORMAÇÃO DOS ALVÉOLOS DAS ABELHAS URUÇU-AMARELA**

Autor: Adelson Jose Brandão Silva; Co-autor: Ivan Rodrigues de Moura; Co-autor: Lucas de Jesus Pires Aguiar Silva; Co-autor: Gorete Rodrigues da Silva; Orientador: Antonio Francisco Ramos

*Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Piauí, IFPI- Campus Angical do Piauí;*

*E-mail: dg.caang@ifpi.edu.br*

### **Resumos**

O presente trabalho busca mostrar um modo de ensino-aprendizado para o estudo de Geometria Espacial utilizando os alvéolos das abelhas Uruçu-Amarela, de maneira a fazer pensar em novas formas de aprender, relacionando os formatos dos alvéolos das abelhas ao estudo da geometria. Este artigo é de cunho qualitativo. Tem como base, pesquisa descritiva que nos traz um maior conhecimento sobre o tema abordado. Para observação da coleta de dados, foram-se utilizados 17 acadêmicos do VI módulo do Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI, campus Angical do Piauí, com faixa etária entre 19 (dezenove) a 23 (vinte e três) anos de idade. Assim, foi posto em prática na sala de aula o uso da relação, Geometria Espacial e alvéolos, por fim, aplicamos um questionário prognóstico. Após a coleta dos dados observamos que houve uma facilidade, pela maioria dos estudantes no qual aplicamos o questionário, na absorção da correlação do assunto de Geometria Espacial com um elemento da natureza, no caso, os alvéolos das abelhas estudadas. Observamos também a concordância dos estudantes em afirmar que é fundamental utilizar contextualizações no ensino da matemática.

**Palavras chaves:** Geometria Espacial, Alvéolos, Volume.

## **Introdução**

Este tema foi motivado por uma curiosidade pela forma que as abelhas Uruçu-Amarela constroem seus alvéolos. Através da leitura e estudo de literaturas feitas por outros autores sobre o assunto, podemos observar um padrão no comportamento da natureza, mais especificamente na geometria empregada pelas abelhas Uruçu-Amarela na criação dos alvéolos. Este padrão pode ser compreendido graças a várias pesquisas realizadas com objetivo de entender os tipos de forma que poderiam assumir e as forma que eles possuem na realidade.

A matemática está muito presente na natureza. E neste artigo, apresentaremos um pouco da "geometria espacial das abelhas" e de sua aplicação na construção dos alvéolos da colmeia. Será demonstrado ainda, como são utilizadas as formas geométricas ao seu favor, quais as que mais beneficiam na construção e por que são as únicas que poderiam ser usadas.

Será esclarecido o motivo de a forma hexagonal ser a mais indicada para a construção, e como fica a economia utilizando-se losangos inclinados para revestir o fundo.

O presente projeto de pesquisa constitui-se numa proposta de relacionar os conceitos de Geometria Espacial com a forma dos alvéolos das abelhas Uruçu-Amarela, buscando ressaltar através de um estudo geométrico a redução significativa da área e o aumento de volume pela forma como elas constroem seus alvéolos.

Para obter uma forma de ensinar matemática, de maneira atrativa e construtiva, buscamos relacionar os conceitos de Geometria Espacial com a forma de formulação dos alvéolos. Traçamos um estudo no qual se utiliza de modo especial à pesquisa descritiva. A fim de responder o problema proposto, o artigo será de cunho qualitativo, buscando a estimulação da compreensão de um grupo social.

Com este artigo, será possível identificar como as formas dos alvéolos podem contribuir para o ensino da matemática. Assim, a questão básica que guia a pesquisa é entender qual será a relação entre a Geometria Espacial e a forma dos alvéolos das abelhas Uruçu-Amarela, encontradas no Brasil?

## **Geometria na formação dos alvéolos**

Desde a antiguidade este é um tema muito requisitado entre os estudiosos da área da matemática, descobrir quais formas geométricas são utilizadas pelas abelhas e o seu por que. Esses sábios tinham curiosidades especialmente no sentido de relacionar os alvéolos e suas propriedades com conceitos matemáticos.

De acordo com Vasconcelos (2000, p. 01) em seu artigo:

[...]. O primeiro a se interessar por esse estudo parece ter sido Pappus de Alexandria, matemático grego (320 DC). [...]. Entretanto foi Erasmus Bartholin quem primeiro observou que a hipótese de “economia” nada tinha a ver com o trabalho das abelhas que apenas procuravam executar suas células circulares com a maior área possível, mas que, devido à pressão exercida pelas companheiras de trabalho, ficavam impedidas de executar paredes que não fossem planas. (VASCONCELOS, 2000, p. 01).

Ainda com base em Vasconcelos (2000, pg.1) Pappus de Alexandria descreve quais foram os sólidos geométricos que mais se justapõem aos critérios de formação dos alvéolos. Segundo seus estudos, chegou a observar que as formas de prismas de seção hexagonal, triangular e quadrada eram as mais indicadas. Deixou transparecer que os prismas hexagonais podiam armazenar mais mel do que as outras duas formas geométricas.

A sociedade das abelhas é constituída por três tipos de indivíduos: a rainha, os zangões e as operárias. Sendo que nesta sociedade, apenas as operárias se dedicam à construção dos alvéolos. Por sua vez, os constroem geralmente a partir de um plano vertical, cuja inclinação é de aproximadamente  $13^\circ$  sobre o horizonte e, é feita de cima para baixo.

As abelhas Uruçu-Amarela constroem seus alvéolos no intuito de armazenar o seu mel, de forma intuitiva, conseguem gerar um prisma que otimiza mais a economia, isto é, que apresenta o maior volume para a menor porção de material gasto.

Apesar de aparentemente a colmeia apresentar poucos alvéolos, ela na verdade, possui uma quantidade muito grande de benefícios e armazenagem do mel, por conta das formas prismáticas utilizadas por elas que geram uma economia significativa tanto na cera como no espaço.

Para que não houvesse desperdício, seus alvéolos não poderiam ser de formar cilíndrica, pois, do contrario não haveria paredes que se justapõem sem deixar espaço. Com isso, de uma forma bastante intrigante, utilizaram formas prismáticas que possuem paredes comuns entre elas, e que tem um alto índice de economia.

Teixeira (2009, p.1) descreve o objetivo da construção dos alvéolos e de como são feitos:

Com uma única finalidade a abelha constrói seus curiosos alvéolos: é para neles depositar o mel que fabrica. Esses alvéolos são feitos de cera. Levadas (afirmam os sábios pesquisadores) por um instinto admirável, as abelhas procuram obter para seus alvéolos uma forma que seja a mais econômica, isto é, que apresenta “maior volume” ou maior capacidade para a menor porção de material empregado (TEIXEIRA, 2009, p.1).

As formas geométricas mais propícia para os alvéolos possuírem são as de prismas triangulares, quadrangulares e hexagonais. Por serem prismas que se justapõem sem deixar espaços vazios entre eles, gerando, assim, um grande benefício no depósito do mel. Essas formas são mais utilizadas devido à organização que elas proporcionam dentro da colmeia.

Com base nos estudos bibliográficos dos autores supracitados, o hexágono é o mais útil desses prismas, assegurando ao término da colmeia uma economia trivial de espaço e volume. Logo, o alvéolo não pode ter forma cilíndrica, pois, do contrário, não haveria paredes comuns e o desperdício de material seria enorme. Era preciso, então, para o alvéolo, adotar uma forma prismática.

Segundo Lins (2009), as bases de prismas triangulares, quadrangulares e hexagonais com mesma área lateral e mesma altura, possui também o mesmo perímetro. Ela exemplifica ainda porque os prismas hexagonais são mais viáveis a ser utilizado do que os triangulares e quadrangulares:

Sendo  $a$ ,  $b$ ,  $c$  as arestas das bases destes prismas, temos  $3a = 4b = 6c$ , e, assim,  $b = 3a/4$  e  $c = a/2$ . Como o volume de um prisma é igual ao produto da área da base pela altura, considerando  $h$  a altura dos prismas, os volumes  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$ , respectivamente dos prismas de base triangular, quadrada e hexagonal são dados por:  $V_1 = (a^2 3h) / 4 \approx 0,43a^2h$ ;  $V_2 = (a^2 9h) / 16 \approx 0,56a^2h$  e  $V_3 = (3a^2 3h) / 8 \approx 0,65a^2h$ . Portanto,  $V_1 < V_2 < V_3$  (Lins, 2009).

Apesar dos prismas possuírem perímetros semelhantes seus volumes variam entre eles. Temos, portanto, o valor do prisma triangular menor que do quadrangular, por sua vez, ambos os volumes sendo menores que da forma hexagonal. Assim, fica concretizado a importância deste prisma e sua contribuição no final do fechamento da colmeia.

Outro fato bastante interessante é o que acontece no fechamento dos alvéolos construídos de forma hexagonal. Em vez de construírem um hexágono plano para revestir o fundo, as abelhas economizam cerca de um alvéolo em cada cinquenta, utilizando três losangos iguais colocados inclinadamente. Pode parecer pouco, mas a economia de 2% (dois

por cento) que elas conseguem com o fechamento de milhões de alvéolos representa uma grande quantidade, tendo no final uma gigantesca economia.

O método de construção, além de ser o mais efetivo é também o que ocupa menos espaço, assim, acarretando em um meio muito mais eficiente e eficaz para o depósito do mel. Com isso, as abelhas usam a melhor forma de armazenamento, pelo modo que são construídos seus alvéolos.

Esta relação de economia dos alvéolos, ou seja, mais volume por menor área, pode ser entendido com conceitos de Geometria Espacial, que aplicados de forma atrativa na metodologia de ensino, pode-se obter um enorme conhecimento de matemática aplicada.

Esse estudo proporcionará uma inovadora e atrativa forma para ajudar o ensino da matemática, pois de acordo com Jael (2012, p.01), “uma busca por novos meios de ensino de matemática devem ser constantes, pois os estudantes mudam de acordo com a época, e sempre há uma necessidade de melhorar a aprendizagem, e isso deve permanecer em foco”.

Esses dados são de pesquisas bibliográficas de alguns autores que se debruçaram sobre o assunto proposto. Com isso o tema foi explanado de forma descritiva, para uma melhor compreensão deste assunto. Tais estudiosos entraram em um estudo bastante aprofundado sobre este tema, e, após várias observações, perceberam a maravilhosa forma usada para a construção dos alvéolos.

Segundo Cleber (2013, p.01) “a observação pode ser muito útil no princípio de qualquer outro tipo de pesquisa, pois com isso é possível começar a interrogar e perceber alguns aspectos importantes para outro tipo de pesquisa”.

### **Procedimentos Metodológicos**

Este trabalho tem como objetivo conhecer a importância de se trabalhar os conceitos matemáticos através da geometria empregada pelas abelhas Uruçu-Amarela, de forma intuitiva, para que se possa ter uma aprendizagem significativa por parte dos discentes.

Para responder o problema da pesquisa e alcançar os objetivos propostos, foi imprescindível a determinação dos métodos de pesquisas que se foi utilizado. Este artigo é de cunho qualitativo, buscando a estimulação da compreensão de um grupo social. Foram-se necessários à pesquisa descritiva, logo após, um longo estudo bibliográfico, com complemento de um questionário prognóstico. Este método é um ótimo meio para identificar

tais fatores, pois, segundo Gil (2007, p. 43): “Uma pesquisa descritiva pode ser a continuação de outra explicativa, posto que a identificação de fatores que determinam um fenômeno exige que este esteja suficientemente descrito e detalhado”.

Nesta parte da pesquisa foram utilizados 17 acadêmicos do VI módulo do curso de matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI, campus Angical do Piauí, com faixa etária entre 19 (dezenove) a 23 (vinte e três) anos de idade. Esta escolha cabe-se, pois os mesmos já havia estudado sobre Geometria Espacial, ficando de mais fácil entendimento o assunto que iríamos ministrar. A inclusão dos participantes foi de forma voluntária, logo após um chamado prévio dos autores do artigo.

Para coleta dos dados foi-se necessário somente um encontro. Começamos ministrando uma “aula” para os alunos sobre o referido tema, explicando-lhes uma prévia da história das abelhas Uruçu-Amarela e as formas geométricas empregadas por elas, de forma intuitiva, para a construção dos seus alvéolos. Explicamos ainda, o porquê de a forma hexagonal ser a mais indicada para a construção e como fica a economia utilizando-se losangos inclinados para revestir o fundo. Para concluirmos a “aula”, passamos algumas questões referentes ao tema abordado, seguido de relações de área e volume para que se recordassem da matéria que já tinha lecionado: Geometria Espacial.

Para analisarmos os dados obtidos durante a aplicação do referido questionário, fez-se uso da técnica comparativa, ou seja, foi feita uma relação entre os dados coletados através do questionário com o desempenho deles durante a “aula”, analisando a quantidade de acertos e erros dos voluntários ao longo da tal pesquisa.

Por fim, averiguamos no processo de aplicação do modelo em questão o grau de envolvimento e aprendizagem sobre o tema abordado, guardando/armazenando os pontos principais expostos pelos alunos.

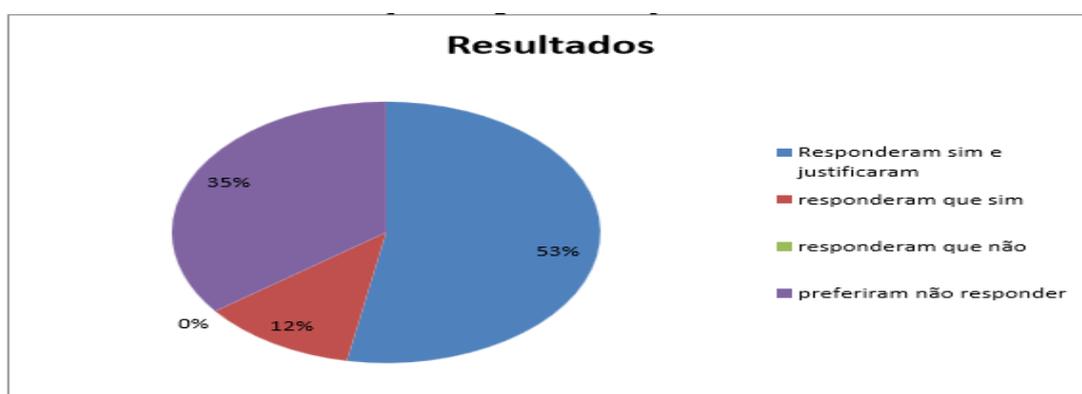
## **Resultados e Discussões**

A pesquisa teve o intuito de viabilizar uma ferramenta que pode facilitar no processo de ensino aprendizagem da matemática, propondo uma forma de relação com um elemento da natureza, no caso, os formatos dos alvéolos das abelhas Uruçu-Amarela. Visando despertar a curiosidade dos alunos para que este possa utilizar os conceitos matemáticos em seu cotidiano.

Feitos os procedimentos de acordo com o artigo, ministrado a “aula” e aplicado o questionário com ajuda dos modelos de sólidos geométricos, no caso, a forma prismática dos alvéolos, estudando suas características, no Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Piauí- IFPI no Curso Superior de Licenciatura em Matemática VI período, obtivemos os seguintes resultados:

Você concorda que o ensino dos conceitos de Geometria Espacial, com auxílio da forma geometria dos alvéolos, facilitou sua aprendizagem? Justifique.

Gráfico desenvolvido pelos autores



Fonte: acervo do autor, 2017.

Para essa pergunta, com um total de 17 discentes, obtivemos uma percentualidade de: 53% (cinquenta e três por cento) dos alunos responderam SIM e justificaram sua resposta, 12% (doze por cento) responderam somente SIM e não justificaram, e apenas 35% (trinta e cinco por cento) preferiram não responder esta pergunta.

Não houve estudantes que negaram a importância do ensino matemático voltado à matemática aplicada.

Podemos observar que 65% dos estudantes, no qual foi aplicado o questionário, concluíram que é indispensável à utilização de elementos da natureza para a real compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos, em particular, Geometria Espacial.

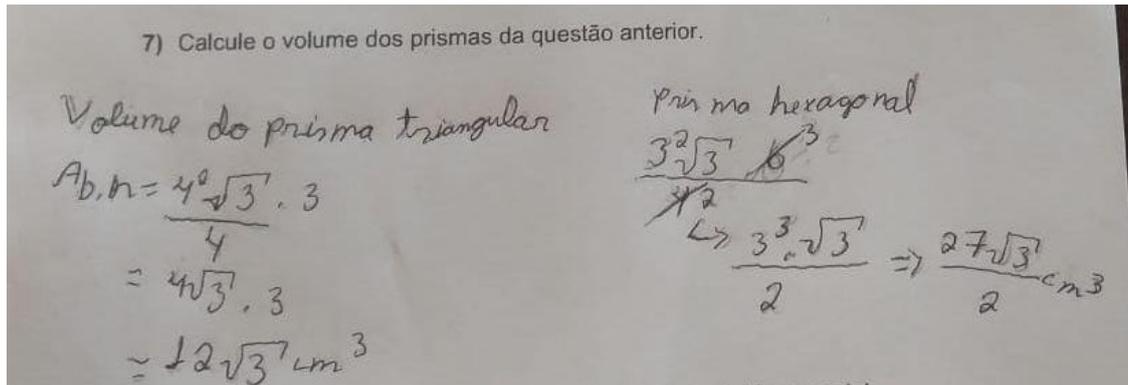
De maneira geral, as justificativas dos estudantes se resumem em afirmar que é fundamental a contextualização para o ensino da matemática, originando um maior aproveitamento do conhecimento e, elevado o índice de aprovação.

Em relação às questões mais específicas de Geometria Espacial no contexto dos alvéolos, observamos que a grande maioria dos estudantes respondeu corretamente de acordo

com os dados e formulas apresentadas em sala. Foram impostas questões onde era preciso calcular tanto a área como o volume dos prismas explanados no artigo, como por exemplo:

Calcule o volume dos prismas triangular e hexagonal onde a medida dos lados é: triangular AB= 4 cm, BC= 4 cm, CF= 3 cm; hexagonal AB= 3 cm, BF= 6 cm.

**Figura 1**– questão desenvolvida pelos alunos.



7) Calcule o volume dos prismas da questão anterior.

Volume do prisma triangular  
 $A_b \cdot h = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 3$   
 $= 4\sqrt{3} \cdot 3$   
 $= 12\sqrt{3} \text{ cm}^3$

Prisma hexagonal  
 $\frac{3^2 \sqrt{3}}{2} \cdot 6$   
 $\Rightarrow \frac{9 \sqrt{3}}{2} \cdot 6 \Rightarrow \frac{27 \sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3$

Fonte: acervo do autor, 2017.

Nesta questão, houve-se um índice razoável de acertos. Apenas 9 (nove) alunos conseguiram responder a questão devidamente, contabilizando um percentual de 52,9 % (cinquenta e dois virgula nove por cento) do total. Os outros 47,1% (quarenta e sete vírgula um por cento) dos docentes não conseguiram ou responderam incorretamente.

Averiguamos que, ainda há um déficit muito grande em relação à resolução de questões que envolvam cálculos. Com isso, concluímos que uma ferramenta de auxílio para facilitar a visualização deste tipo de questões é primordial/indispensável, pois, haverá uma maior captação do conteúdo ministrado, acarretando em uma elevação nos acertos.

Ao termino desta aplicação, foi possível verificar um maior envolvimento dos alunos no decorrer da aula/abordagem, proporcionando um melhor envolvimento entre aluno e professor, tornando, assim, o processo de ensino-aprendizagem mais interativo.

Observamos que houve uma facilidade da maioria dos estudantes responderem o questionário que se referia da correlação do assunto de Geometria Espacial com um elemento da natureza, no caso, os alvéolos das abelhas estudadas.

Ao término da análise concluímos que o ensino de matemática voltada a uma aula contextualizada pode trazer grandes lucros e benefícios, tanto aos estudantes quanto ao professor. Pois, ao coletarmos os dados averiguamos um índice elevado de acerto nas

questões propostas, concretizando assim, o envolvimento dos alunos e a captação do conteúdo ministrado graças à relação entre a geometria e os alvéolos.

## **Conclusão**

Este trabalho procurou utilizar em toda a sua extensão um caráter compreensivo de possíveis mudanças na educação no contexto ensino-matemática. E pensando nisso, evidenciamos uma forma de melhorar a metodologia de ensino de Geometria Espacial, utilizando um elemento da natureza fundamental para a compreensão de seus conceitos e aplicações. Este artigo foi idealizado para mostrar um modo de focalizar em contextualizações da realidade.

Este tema teve uma importância de relacionar um elemento da natureza com a Geometria Espacial, através dos estudos bibliográficos dos autores supracitados, podemos vê qual a forma prismática mais apta para armazenagem, vimos ainda como fica o revestimento do fundo, e sua economia ao termino. Através desta observação, podemos fazer à relação com a geometria, analisando a área e o volume deste e de outros prismas. Com esta correlação, averiguamos a importância de uma ferramenta da natureza como auxiliar no desenvolvimento cognitivo dos alunos, ou seja, uma forma de melhor visualização das superfícies e espaços geométricos, estimulando seu raciocínio lógico.

Com este artigo podemos concluir que o professor poderá barrar (quebrar) possíveis preconceitos de uma matemática “chata”, neutra e que não tem aplicações na realidade. Pois, com uma contextualização para o ensino da matemática, relacionando Geometria Espacial com as formas prismáticas dos alvéolos, fica mais fácil o entendimento, gerando assim, um índice maior de aprovação. Quanto ao estudante, este poderá aumentar não apenas sua curiosidade, mas também seu interesse no assunto de matemática aplicada e suas possíveis aplicações no mundo.

## **Referências**

BARCO, Luiz. **A geometria instintiva das abelhas**, 31 de out. 2016. Disponível em: <<https://super.abril.com.br/ciencia/a-geometria-instintiva-das-abelhas/>>. Acesso em: 28 de ago. 2017

CLEBER, Cristiano. **Metodologia do trabalho científico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

LINS, Cristina. **A matemática das Abelhas**. Nov. de 2009. Disponível em: <  
<http://abelhasgeometras.blogspot.com/>>. Acesso em: 14 de ago. de 2017

MACEDO, Jael. **Modelagem aplicada no ensino da matemática**. Medianeira, 2012.  
Disponível  
em:<[http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/2562/1MD\\_ENSCIE\\_III\\_2012\\_33](http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/2562/1MD_ENSCIE_III_2012_33)>.  
Acesso em: 07 de set. 2017.

TEIXEIRA, J.C. **A abelhas geômetras**, 16 de dez de 2009. Disponível  
em:<<http://www.republicaeditorial.com.br/?p=488>>. Acesso em: 14 de ago. de 2017.

VASCONCELOS, Augusto. **Abelhas: A matemática dos alvéolos**, Nov. 2000. Disponível  
em: <<http://www.apacame.org.br/mensagemdoce/59/artigo.htm>>. Acesso em: 14 set. 2017