APLICAÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL EM SITUAÇÕES COTIDIANAS E NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DE EXAMES DE ACESSO AO ENSINO SUPERIOR

Antônio Gabriel Leal de Sousa,Antonio Soares Siqueira Neto, Mariana Thayra Gonçalves de Oliveira, Bruno Oliveira de Sousa

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ-CAANG. (libra.ifpiedu.br)

1.INTRODUÇÃO

O cálculo sempre se mostrou como uma das técnicas mais poderosas da matemática, sendo estudada pelos mais variados filósofos dos séculos passados. Porém, foi no século XVII que o cálculo começou a dar seus primeiros passos.

Ainda hoje é possível encontrar controvérsias a respeito do descobrimento do Cálculo Diferencial. Isaac Newton e Gottfried Leibniz, foram os primeiros filósofos a compreender profundamente e formularam independentemente um do outro o teorema fundamental do cálculo. Newton desenvolveu a sua teoria voltada para as taxas de variação e Leibniz concentrou-se no cálculo da derivada como sendo uma diferencial. Assim, Leibniz criou fórmulas para denotar a derivada e as diferenciais e depois algumas regras de derivação, conforme discutido em Santana (2010) e Stewart (2013).

Assim como outras áreas da Matemática, o Cálculo Diferencial, surgiu e se desenvolveu a partir de uma combinação entre problemas e formulações de conceitos e teorias adequados para resolvê-los. E, por sua vez, estas teorias suscitaram novos problemas, novas teorias e assim tivemos a formulação de um conjunto compreensivo de regras operacionais para a solução de diversos problemas.

Analisando artigos da área da educação matemática, livros, teses e dissertações, relacionados ao ensino de cálculo diferencial, descobrimos que ele é um ramo importante na matemática sendo desenvolvido a partir da álgebra e da geometria que se dedica ao estudo das taxas de grandezas como uma inclinação de uma reta ou na acumulação de quantidades como em uma curva ou volume de um sólido.

O conceito e as regras de cálculo diferencial podem ser aplicados em situações do cotidiano que aparecem nas mais variadas áreas, por exemplo, em Economia, Física, nas Ciências Biológicas e na Medicina, tendo essa vasta abrangência de áreas os discentes sempre se vê diante a questionamentos como: “Onde eu vou utilizar isso?” ou “No que isto me será útil?”. Sendo assim, este trabalho tem por finalidade apresentar o cálculo diferencial de uma forma mais palpável ao olhar dos alunos aplicando-o não só no cotidiano como também no ensino médio.

2.METODOLOGIA DA PESQUISA

A metodologia deste estudo se constitui de uma pesquisa de cunho bibliográfico. De acordo com Antônio Carlos Gil (2010, p. 27). A pesquisa bibliográfica é elaborada com base em material já publicado. Tradicionalmente, esta modalidade de pesquisa inclui material impresso, como livros revistas, jornais, teses, dissertações e anais de eventos científicos.

> A principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente. Essa vantagem torna-se particularmente importante quando o problema de pesquisa requer dados muito dispersos pelo espaço. Por exemplo, seria

> impossível a um pesquisador percorrer todo território brasileiros em busca de dados sobre a população ou renda per capita; todavia se tenha a sua disposição uma bibliografia adequada, não terá maiores obstáculos para contar com as informações requeridas. A pesquisa bibliográfica também é indispensável nos estudos históricos. Em muitas situações, não há maneira de conhecer os fatos passados se não com base em dados bibliográficos.

Além da metodologia de pesquisa de cunho bibliográfica, buscamos discutir situações problema cotidianas em que se utilize o cálculo diferencial, como também, aplicar derivada na resolução de questões de exames de acesso ao ensino superior, analisando livros, artigos da área de Educação Matemática, teses e dissertações, relacionados ao Ensino de Cálculo Diferencial.

Após a pesquisa serão sintetizados os conhecimentos obtidos durante os estudos de referência, e o utilizamos para solucionarmos situações aplicativas com o intuito de discutir exercícios de Cálculo Diferencial que propiciem não apenas o entendimento e fixação dos conceitos derivada, mas também, expor como esse conteúdo pode ser utilizado em situações reais, e em outras áreas, dando condições ao discente de interpretar os resultados obtidos e relacionar conceitos interdisciplinares.

3.RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para dar início a análise de dados apresentamos antes alguns conceitos, teoremas e regras básicas de derivada para o entendimento de suas aplicações.

Derivada

Teorema. Seja n 0 um natural. São válidas as fórmulas de derivação:

a)f(x) = xnf'(x)=nxn-1

b)f(x) = x-nf'(x)=-nx-n-1,x0

c)f(x) = x1xf'(x)=1nx1n-1, em que x > 0 se n for par e x 0se n for ímpar(n2).

4.1REGRAS DE DERIVAÇÃO

I) A regra de potência

Se n for um inteiro positivo, então

ddx(xn) =nxn-1

Demonstração: A fórmula

xn-an=(x-a)(xn-1+xn-2a+...+xan-2+an-1)

Pode ser verificada simplesmente multiplicando-se o lado direito (ou somando-se o segundo fator como uma série geométrica). Se f(x) = , podemos usar a equação f’(a)

F’(a) =xaf(x) - f(a)x - a= xaxn - anx - a

=xa(xn-1+xn-2a+...+xan-2+an-1)

=an-1+an-2a+...+aan-1+an-1

= nan-1

II) A regra da soma

Se f e g forem ambas deriváveis, então

Demonstração: Seja F(x) = f(x) + g(x). Então

F’(x) =h0F(x+h) - F(x)h

=h0[f(x+h) + g(x+h)] + [f(x) + g(x)]h

=h0[f(x+h) - f(x)h+ g(x+h) - g(x)h]

=h0f(x+h) - f(x)h+ h0g(x+h) - g(x)h

= f’(x) + g’(x)

A regra da subtração é análoga à da soma

Definição 1: Seja um número do domínio D de uma função f. Então f(c) é o

- valor **máximo absoluto** de f em D se f(c)   f(x) para todo x em D.
- valor **mínimo absoluto** de f em D se f(c) ≤ f(x) para todo x em D.

Definição 2 O número f(c) é um

- valor **máximo local** de f se f(c)   f(x) quando x está próximo de c.
- valor **mínimo local** de f se f(c) ≤ f(x) quando x está próximo de c.

Teorema de Fermat Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e se f’(c) existir, então f’(c) = 0.

Demonstração Suponha, para fixar ideias, que f tenha um máximo local em c. Então, de acordo com a Definição 2, f(c)   f(x) se x for suficientemente próximo de c. Isso implica que, se h for suficientemente próximo de 0, com h sendo positivo ou negativo, então

f(c) ≥ f(c + h) e portanto, f(c + h) - f(c) 0

Podemos dividir ambos os lados de uma desigualdade por um número positivo. Assim, se h > 0 e h for suficientemente pequeno temos

f(c+h)-f(c) h0

Tomando o limite à direita de ambos os lados dessa desigualdade obtemos

h0+f(c+h) - f(c)hh0+= 0

Mas, uma vez que f’(c) existe, temos

f’(c) = h0f(c+h) - f(c)h=h0+f(c+h) - f(c)h

Assim mostramos que f’(c)0

Se h < 0, então o sentido da desigualdade é invertido quando dividirmos por h:

f(c+h) - f(c)h0   h < 0

Logo, tomando o limite à esquerda temos

f'(c) = h0f(c+h) - f(c)h=h0-f(c+h) - f(c)h0

Mostramos que f'(c)0 e também que f'(c) 0. Uma vez que ambas as desigualdades devem ser verdadeiras, a única possibilidade é que f'(c) = 0.

Definição 3 Se o gráfico f estiver acima de todas as tangentes no intervalo I, então f é chamada côncava para cima em I. Se o gráfico de f estiver abaixo de todas as suas tangentes em I, então f é chamada côncava para baixo em I.

Teste da Concavidade:

(a) se f''(x) > 0 para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para cima em I.

(b) se f''(x) < 0 para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.

Para a coleta de dados solucionamos questões de acesso ao ensino superior e aplicações do dia a dia utilizando derivada como a ferramenta principal.

III)PROBLEMAS

1. (EsPCex) Uma indústria produz mensalmente x lotes de um produto. O valor mensal resultante da venda deste produto é $V(x) = 3x^2 - 12x$ e o custo mensal da produção é dado por $C(x) = 5x^2 - 40x - 40$. Sabendo que o lucro é obtido pela diferença entre o valor resultante das vendas e o custo da produção, então o número de lotes mensais que essa indústria deve vender para obter lucro máximo é igual a

a) 4 lotes b) 5 lotes c) 6 lotes d) 7 lotes e) 8 lotes

Resolução:

Sabe-se que L(x) = V(x) - C(x), então:

$$L(x) = 3x^2 - 12 - (5x^2 - 40x - 40)$$

$$= 3x^2 - 12 - 5x^2 + 40x + 40$$

$$= -2x^2 + 28x + 40$$

Tomando a primeira derivada L(x) :

$$L(x) = -2x^2 + 28x + 40$$

$$L'(x) = -4x + 28$$

igualando L'(x) a 0, temos:

$$L'(x) = -4x + 28 = 0$$

$$-4x = -28$$

$$x = 7$$

De acordo com o TEOREMA DE FERMAT, esse valor x = 7 é um ponto crítico;

Para sabermos se x é realmente o valor máximo basta usarmos a definição de acordo com o teste de concavidade, onde devemos calcular L''(x):

$$L'(x) = -4x + 28$$

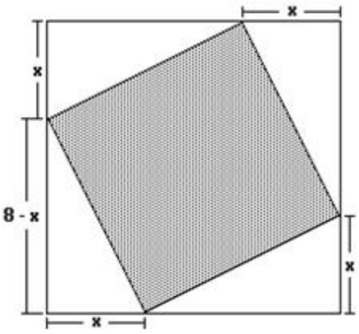
L’’(x) = -4

Como o L’’(x)< 0 concluímos que para obtermos o lucro máximo, deve-se vender 7 lotes.

item d

2. (Puccamp) Na figura a seguir tem-se um quadrado inscrito em outro quadrado. Pode-se calcular a área do quadrado interno, subtraindo-se da área do quadrado externo as áreas dos 4 triângulos. Feito isso, verifica-se que A é uma função da medida x. O valor mínimo de A é:

a) 16 cm² b) 24 cm² c) 28 cm² d) 32 cm² e) 48 cm²



Resolução:

Para resolver-mos teremos que achar a área total do quadrado em função do valor de x usando pitágoras.

h2=(8-x)2+x2

h2= 64 -16x+x2+x2

Assim, a função que representa a área do quadrado interno é A(x) = 2x2-16x+64

A seguir derivando a função e igualando a zero obtemos.

f’(x)= 4x - 16

4x - 16 = 0

x = 4

calculando f’’(x) de acordo com a definição de teste de concavidade teremos.

f’’(x) = 4 assumindo o valor mínimo

Substituindo o x na função, f(x) = 2x2-16x+64obtemos.

f(4) = 2.(4)2-16.4+64

f(4) = 32 - 64 + 64

f(4) = 32

Concluímos que o valor mínimo de A é 32cm2

item d

3. (Uel) A função real f, de variável real, dada por f(x)=-x²+12x+20, tem um valor:

a) mínimo, igual a -16, para x = 6 b) mínimo, igual a 16, para x = -12

c) máximo, igual a 56, para $x = 6$ d) máximo, igual a 72, para $x = 12$

e) máximo, igual a 240, para $x = 20$

Resolução:

Derivando e igualando a função f(x) a 0, temos:

$f(x)=-x^2+12x+20$

$f'(x)= -2x +12$

$-2x +12=0$

$x = 6$

Calculando f’’(x):

$f'(x)= -2x +12$

$f''(x)= -2$, tornando assim f(6) valor máximo;

Substituindo o x na função $f(x)=-x^2+12x+20$, obtemos:

$f(x)=-(6)^2+12.6+20$

$f(x)= 56$, assumindo o valor máximo de acordo com a definição do teste de concavidade.

item c

4. (ENEM) A empresa WQTU Cosméticos vende um determinado produto x, cujo custo de fabricação de cada unidade é dado por $3x^2 + 232$ e seu valor de venda é expresso pela função $180x – 116$. A empresa vendeu 10 unidades do produto x, contudo a mesma deseja saber quantas unidades precisa vender para obter um lucro que máximo. A quantidade máxima de unidades a serem vendidas pela empresa WQTU para obtenção do maior lucro é:

a) 10 b) 30 c) 58 d) 116 e) 232

Resolução:

Sabendo-se que se tem o lucro pela diferença entre valor de venda e o custo de fabricação, obtemos:

$L(x)= V(x) - C(x)$

$L(x)= 180x – 116 - (3x^2 + 232)$

$L(x)=- 3x^2 + 180x - 348$

Derivando a função L(x) e igualando a 0, teremos:

$L(x)=- 3x^2 + 180x - 348$

$L'(x)= -6x + 180$

$-6x + 180=0$

$x = 30$

Para verificarmos que o ponto crítico é o valor maximo , calculamos f’’(x):

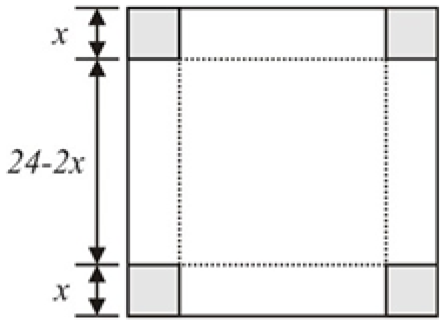
$L'(x)= -6x + 180$

L”(x)= -6, sendo assim x atinge seu valor máximo

item b

IV)APLICAÇÕES NO COTIDIANO

SITUAÇÃO 1 - Um fabricante de aquários para peixes pretende fazer aquários a partir de “folhas” quadradas de vidros com área igual a $576cm^2$, cortando quadrados iguais nos quatro cantos e retângulos nas laterais resultantes do corte dos cantos. Para a confecção dos aquários, o fabricante colará os retângulos extraídos de tal maneira que os mesmos sirvam de parede para o aquário. Determinar o lado do quadrado que deve ser cortado para se obter um aquário com o maior volume possível.



Para encontrar o volume do aquário de peixes: Ab.H = a.b.c

V(x) = (24 - 2x).(24 - 2x).x

V(x) = (576 - 96x + 4x2).x

V(x) = 4x3-96x2+576x

Derivando a função V(x) obtemos:

V’(x) = 12x2-192x+576

Encontrando temos:

=b2-4.a.c

=9216

Utilizando a fórmula de bhaskara para encontrar x1 e x2:

x = -b+- 2a

x =192+- 9624

x1 = 12 e x2 = 4

Descartamos x1 pois ele não poderá assumir valor de x em 24 - 2x;

Derivando V’(x) para identificar seu valor máximo ou mínimo para x2

V”(x) = 24x - 192

Para x2

V”(4) = 24.4 - 192 = -96

Com isso concluímos que x2 é o lado do quadrado a ser cortado de tal maneira que o aquário tenha volume máximo.

SITUAÇÃO 2 - Uma parede, cujo comprimento é 6 metros, vai ser aproveitada por um agricultor como um dos lados na construção de um cercado retangular. Para concluir o contorno desse cercado, serão utilizados 132 metros de arame, sendo que a cerca possuirá três tiras de arame. Quais as dimensões do cercado retangular de maior área possível que poderá ser construído?

$3x + 3x + 3y = 132$

$y = -2x + 44$

$A(x) = x.y$

$A(x) = x(-2x + 44)$

$A(x)= -2x2+44x$

Derivando a função f(x) e igualando a 0, obtemos:

$A'(x)= -4x + 44$

$-4x + 44=0$

$x = 11$

Para identificarmos se x atinge valor máximo derivamos a A'(x):

$A''(x)= -4$

Calculando a área, temos:

$A(x)= -2x2+44x$

$A(11)= -2112+ 4411$

$A(11)= -242 + 484$

$A(11) = 242$, que será a maior área possível.

Para nos apropriarmos de um conteúdo, é necessário, entre outros fatores, compreender como ele se estrutura e suas inter-relações com os demais itens que compõem aquele arcabouço de informações para que se construa o conhecimento necessário para se resolver problemas.

Por meio da matéria de cálculo, estudamos a derivada, que nada mais é do que a medida da declividade de uma reta tangente a cada ponto da função de onde surgiu, ela também é uma função que fornece valores relativos de muita utilidade, podemos também lembrar que o ângulo da reta tangente ao ponto da curva inicial pode ser encontrado através da derivada, pois a derivada fornece o valor da tangente deste ângulo. O objetivo central do nosso estudo é aplicar a derivada em um problema cotidiano. (BORBA,V, M. e GAIO, T, Z. pg. 01)

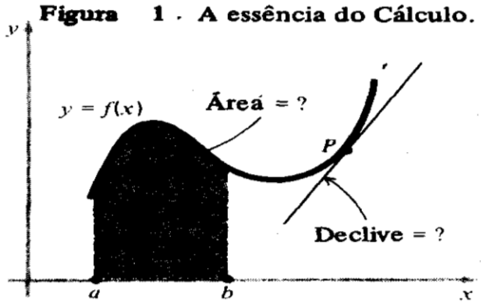
De acordo com Louis Leithold (1994, p.1):

> Algumas idéias de cálculo podem ser encontradas nos trabalhos dos matemáticos gregos da antiguidade da época de Arquimedes(287-212 A.C.) e em trabalhos do início do século 17 por René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat(1601-1665), Jonh Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1677). Entretanto a invenção do cálculo é frequentemente atribuída ao Sir Isaac Newton (1642-1725) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) pois eles começaram a efetuar a generalização e unificação do assunto.

A expressão Cálculo Diferencial designa basicamente: a derivação. A derivação "está relacionada com a descrição e mensuração da maneira como as coisas variam, se movem e crescem" (BARON, 1985, p.1). Utilizamos as derivadas sem nem ao mesmo saber derivar. Simplificadamente tudo o que envolve uma taxa de variação pode ser entendida com uma derivada. Como derivadas representam a velocidade com que alguma coisa muda em função das mudanças de outras coisas, elas passam a ser de grande utilidade.

Uma das formas mais usuais de interpretação e entendimento do processo de derivação é concebê-lo como a inclinação (declive) da reta tangente (Do latim tangere, que significa tocar) ao gráfico de uma função, conforme a figura 1.

Figura 1 . A essência do Cálculo.



Fonte: SIMMENS, 1987, p.69

A partir desta idéia outros problemas podem ser estudados. É o caso dos pontos de máximo e mínimos de uma função. Nestes pontos, as retas tangentes são horizontais, ou seja, com inclinação zero. Esta aplicação do conceito de derivada de uma função mostrou-se de grande utilidade em diversos campos da Ciência.

As principais aplicações do cálculo diferencial é o estudo de movimentos, aspectos de velocidade e aceleração, o cálculo dos máximos e mínimos, por exemplo: em uma agência de viagens ou de uma empresa, podemos saber o maior ou menor ganho que pode ser obtido em um determinado período ou de um determinado produto se o cálculo diferencial for aplicado corretamente.

No ensino tradicional vigente (ETV) a preocupação é com a formalidade matemática e com a validade dos argumentos. O aluno, por sua vez, quer entender o sentido do que está estudando, ver a possibilidade de utilizar o resultado em sua vida acadêmica e/ou profissional. Porém nesse tipo de ensino muitas vezes o aluno sequer tem a oportunidade de expressar suas ideias. "Numa palavra, o ETV pressupõe que o professor ensina mostrando e o aluno aprende vendo." (BALDINO, 1998, p. 16)

Segundo a proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) recomendam um maior aprofundamento dos conhecimentos matemáticos adquiridos no ensino fundamental de forma integrada a outras áreas de conhecimento. Isto é proposto visando a preparação do aluno para o trabalho e exercício da cidadania e também a continuação de seus estudos em níveis superiores.

O cálculo é tão importante que ele é capaz de fazer essa contextualização tão necessária com outras áreas, pois o domínio de tópicos como derivada possibilita a alunos da educação básica matematizar problemas do cotidiano e consequentemente conseguir obter a sua resolução. Segundo Geraldo Ávila," o conceito de derivada pode ser ensinado, com grande vantagem, logo na primeira série do segundo grau, ao lado do ensino de funções" , portanto, a noção do Cálculo Diferencial é uma ferramenta necessária para compreensão da Física, Química, Biologia, Geografia e da própria Matemática, presentes no Ensino Médio.

O cálculo diferencial pode ser aplicado em economia, administração, física, etc. Os principais elementos utilizados neste ramo da matemática são as funções, as derivadas, os sistemas de equações, a inclinação, entre outros; que estes, por sua vez, ajudam a fazer grandes cálculos em empresas importantes, ou operações simples na economia familiar.

Como sabemos, o cálculo diferencial é uma parte importante da análise matemática e dentro do cálculo . Este é o estudo dos aumentos nas variáveis, curvas pendentes, valores máximos e mínimos de funções, e determinação de comprimentos, zonas e volumes, a sua utilização é muito grande, especialmente em ciência e engenheiros sempre que há quantidades que variam continuamente.

O conceito e as regras de cálculo diferencial podem ser utilizados para resolver problemas do cotidiano que aparecem em diferentes áreas, por exemplo, em Economia, Física, nas Ciências Biológicas, etc.

Os conceitos básicos de derivada facilitam a compreensão dos conteúdos e os alunos não precisam do sentido de decorar fórmulas, mas de compreender situações-problemas. Sendo assim possível ensinar a derivada em um trinômio do 2º grau logo no início do ensino médio, sem o desenvolvimento da teoria dos limites. O discente dotado deste conhecimento terá em mãos uma poderosa ferramenta que o auxiliará no estudo das funções, em particular nos aspectos crescimento e decrescimento, pontos de máximo e de mínimo da função quadrática.

Temos muito o que extrair das derivadas, elas nos fornecem vários artifícios para manipular os números em uma função, possibilitando diversas maneiras de extrair informações, elas trazem um novo meio, capaz de nos trazer novas formas de analisar dados numéricos.

4.CONCLUSÃO

Por meio da revisão bibliográfica pudemos conhecer as experiências de outros pesquisadores na área e saber como eles se posicionaram diante do tema, para com isso dar embasamento ao nosso projeto. Ao analisar as questões podemos concluir que conceitos básicos de derivada são essenciais para a resolução de problemas cotidianos e que poderiam ser introduzidos na ementa do ensino médio, já que é uma técnica rápida e de fácil entendimento para a resolução de questões e compreensão de outros conteúdos.

As aplicações utilizadas foram todas apresentadas de modo que esclareça como estes conteúdos poderão ser aplicados tanto em situações reais quanto em questões de acesso ao ensino superior, e que outros acadêmicos possam adquirir conhecimentos acerca das aplicações e levá-las para a sala de aula. Afinal, os conteúdos matemáticos são essenciais para a resolução de problemas de áreas aleatórias.

Enfim, podemos dizer que calculo diferencial é um assunto essencial não só para o ensino superior, mas também para o ensino básico servindo de alicerce para a compreensão de novos conteúdos abordados em sala de aula.

5.REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. -**O ENSINO DO CÁLCULO NO SEGUNDO GRAU**. In: Revista do Professor de Matemática, n.18, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p.1-9.

BALDINO, R. R. Desenvolvimento de Essências de Cálculo Infinitesimal. MEM/USU,

v.4, Rio de Janeiro, 1998

BARON, Margareth E. **CURSO DA MATEMÁTICA: ORIGENS E DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO**. 5 Ed. Brasília:UNB, 1985.

CARRANZA, G. S. B. Cálculo diferencial " vida cotidiana". Disponível em: <http://vidacotidianaalma.blogspot.com/2015/10/calculo-diferencial-en-la-vida.html?m=1> Acesso em: 27 de Jul de 2018

FILHO, R. Pereira, A. Maia, **PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS**. disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>

GAIO, Tayná Zeni. BORBA, Victoria Moraes. APLICAÇÃO DE DERIVADAS EM SITUAÇÕES COTIDIANAS. Disponível em: <portaldeperiodicos.unibrasil.com.br/index.php/anaisevinci/article/download/979/955>

Acesso em: 27 de Jul de 2018

LEITHOLD, Louis. **O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA**. 3. Ed. harbra, 1994.

MELO, Priscila. **CÁLCULO DIFERENCIAL**. disponível em: <https://www.estudofacil.com.br/calculo-diferencial-etimologia-definicao-e-sua-origem/> Acesso em: 25 de maio de 2018

.SOUZA, Veriano C. **A ORIGEM DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**. disponível em: <www.avm.edu.br/monopdf> . Acesso em: 22 de junho de 2018.

PIRES, C. Cálculo para economistas. McGraw Hill, 2001.

SOARES, D.S. O interesse de alunos de biologia pela análise de um fenômeno biológico e seu modelo matemático. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/v_sipem/PDFs/GT10/CC01046092065_A.pdf. Acesso em: 17 de julho de 2018.

STEWART, J. Cálculo – Vol. 1. 7.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

STEWART, james. Cálculo, volume 1/ james Stewart; [tradução ez2 translate]. –São Paulo: Cengage Learning, 2013.