

## PROPRIEDADES DE REFLEXÃO DO BILHAR ELÍPTICO

Natham Cândido de Oliveira(1) Judcely Nytyeska de Macedo Oliveira Silva (2) Laedson Luan dos Santos Silva (2)

*Universidade Federal de Campina Grande - [nathan.oliveia@hotmail.com](mailto:nathan.oliveia@hotmail.com)*

*Universidade Federal de Campina Grande - [ufcg.juudy@gmail.com](mailto:ufcg.juudy@gmail.com)*

*Universidade Federal de Campina Grande - [laedsonluan00@gmail.com](mailto:laedsonluan00@gmail.com)*

**RESUMO:** Esta pesquisa trata-se de uma proposta de atividade a partir de materiais concretos, em especial o bilhar elíptico. Apresentamos uma importante propriedade das cônicas, a propriedade refletora, cujas aplicações é encontrada em diversas áreas das ciências e até em situações mais simples, daremos ênfase as demonstrações, voltada para essas propriedades devido às suas importantes aplicações nas áreas de arquitetura, ótica, astronomia e física, em termos físicos a reflexão consiste na mudança da direção de propagação da energia ou seja, consiste no contragolpe de parte da energia incidente em direção à região de onde ela é oriunda, após entrar em contato com uma superfície refletora. A reflexão é um fenômeno que pode se dar por um caráter eletromagnético ou mecânico, nesta pesquisa ela tem caráter mecânico, pois o carambola será refletido para o outro foco, caso o ponto inicial do carambola, seja a mesma posição de um dos focos da elipse ou se o mesmo passar por um dos focos, será refletido para o outro foco no qual está localizado a caçapa. A demonstração aqui apresentada possibilitam uma excelente oportunidade para os discentes presenciar tais aplicações possibilitando os mesmos adquirir o interesse pelas curvas cônicas e à geometria. Para as propriedades de reflexão, apresentamos uma demonstração por meio da inclinação dos raios focas e a inclinação da reta tangente, utilizamos derivadas e uma propriedade trigonométrica. A construção de uma mesa de bilhar em forma de elipse é uma maneira de mostrar aos discentes, de forma concreta e simples, suas principais propriedades das elipse.

**Palavras chaves:** Bilhar Elíptico, Propriedade Refletora, Curva Elíptica.

### INTRODUÇÃO

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96), partimos do princípio de que toda situação de ensino e aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o pensar matemático. A aprendizagem por meio de uma forma lúdica permite ao estudante obter conhecimentos matemáticos através de um processo alternativo ao invés do ensino tradicional e mecânico, esta forma de ensino permite que os alunos potencializem a discussão de ideias nas aulas e construa um pensamento crítico sobre o assunto abordado. A escolha de conteúdos deve ser cuidadosa e criteriosa, propiciando ao aluno uma aprendizagem, por meio de um processo investigativo que o auxilie na apropriação de conhecimento.

O bilhar é qualquer jogo realizado em uma mesa utilizando tacos e bolas. No caso do bilhar matemático o diferencial está no formato da mesa de jogo, pois, a mesma é construída a parti do esboço de uma curva no qual o jogo é jogado com apenas uma bola.

Matematicamente em outras palavras, a bola é representada por um ponto e descreve uma trajetória sobre a mesa por um segmento de reta que ao atingir a tábua da mesa é refletida com o ângulo de reflexão igual ao ângulo de incidência.

Os materiais manuseáveis são instrumentos que contribuem para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos, auxiliando a compreensão das situações mais abstratas. Porém nenhum material sozinho é garantia de êxito no ensino-aprendizagem, pois os mesmos devem ser utilizados pelos docentes após um bom planejamento pedagógico. Nessa perspectiva, o bilhar elíptico é uma ferramenta com potencial, pois sua utilização contribui, para o debate e a discussão de forma mais interessante.

## **METODOLOGIA**

Trata-se de uma proposta de ensino para a curva elíptica, utilizando materiais concretos, através da construção de uma tábua de bilhar em forma de elipse com uma proposta de demonstrar de forma visível e simples suas principais propriedades da referida curva. O estudo ocorreu no período de agosto de 2018, já no início de sua construção da mesma.

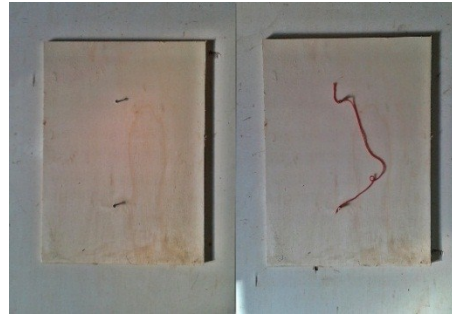
Fixamos um plano e dois de seus pontos,  $F_1$  e  $F_2$ ,  $F_1 \neq F_2$ , chamados focos. Assim, pela definição de elipse em um plano, dados os pontos  $F_1$  e  $F_2$ ,  $F_1 \neq F_2$ , e  $a > 0$  tal que  $2a > |F_1F_2|$ , elipse é o lugar geométrico dos pontos  $P$  tais que a soma de suas distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  é  $2a$ :

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a.$$

$F_1$  e  $F_2$  são os focos. O termo foco é utilizado devido às propriedades de reflexão das cônicas e suas aplicações.

Iniciamos a construção da tábua de bilhar, pelo molde da curva que irá acomodar as tabelas da sinuca. Utilizamos uma forma bem simples para desenhar com perfeição a curva. Para o esboço da elipse, fixamos dois parafusos que tomamos como sendo os focos  $F_1$  e  $F_2$  em um pedaço de MDF com as seguintes dimensões 47cm por 38cm e amarramos em cada um dos focos um barbante.

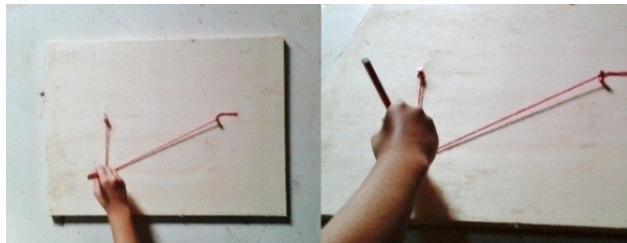
**Figura 01:** Esboço da curva



Fonte: Autoria própria.

Com a ponta do lápis estendemos o barbante mantendo-o sempre estendido ao máximo conforme a figura abaixo, movemos o lápis em um sentido até uma volta completa.

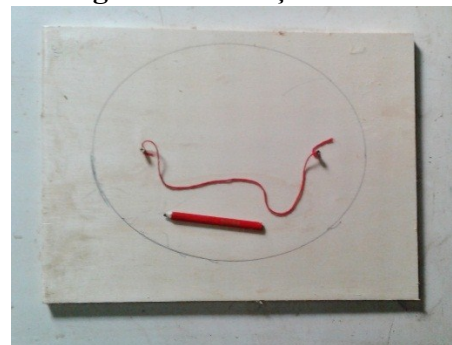
**Figura 02:** Esboço da curva



Fonte: Autoria própria.

Como a medida do barbante não alterou, tem-se que a soma entre as distâncias entre qualquer ponto da curva da elipse e os focos é constante e igual ao comprimento do barbante, que é  $2a$ .

**Figura 03:** Esboço da curva



Fonte: Autoria própria.

Com a ajuda de uma serra tico-tico realizamos o corte que foi desenhado, essa peça irá receber uma borracha que realizara a função da tabela, denominaremos essa peça de tabela.

**Figura 04:** Confeccionando a tabela



Fonte: Autoria própria.

Após colar em todo seu contorno a borracha iremos para o próximo passo, que consiste em confeccionar a mesa. Para a mesa da sinuca utilizamos um pedaço de MDF com as seguintes dimensões 52cm por 42cm, com a ajuda de uma furadeira realizamos um furo em um de seus focos.

**Figura 04:** Confeccionando a tabela



Fonte: Autoria própria.

O próximo passo consiste em grampear um tecido cobrindo toda a área das duas peças, que é a tabela e a mesa. Após grampear o tecido em ambas as peças, fixamos a peça da tabela na mesa com parafusos de modo que a tabela fique por cima criando uma barreira por onde a bola irá ser lançada, obtendo uma única peça.

**Figura 05:** Sinuca elíptica

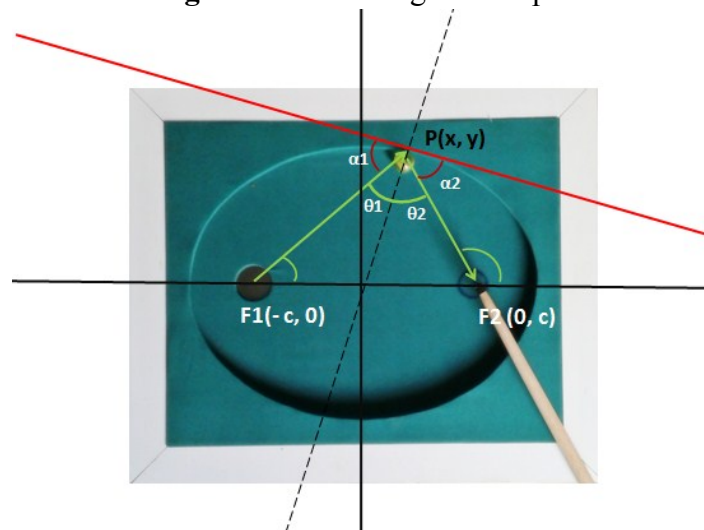


Fonte: Autoria própria.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

No bilhar elíptico ao lança o carambola em direção a um dos focos da elipse ou a posição inicial do carambola for a mesma posição do foco, que poderá ser tacado em qualquer direção, o carambola passará pelo outro foco, que é a caçapa da sinuca, fato é resultado de uma importantes propriedades das elipses. A propriedade refletora da elipse diz que qualquer raio que passa por um dos focos é refletido em direção ao outro foco, como demonstrado na Figura 06. Tal comportamento torna-se útil para explicar o porquê das elipses serem usadas nos espelhos odontológicos, aparelhos de radioterapia e outros.

**Figura 06:** Reta Tangente a Elipse



Fonte: Autoria própria.

Consideremos  $P(x, y)$  qualquer ponto da elipse e  $L$  uma reta tangente (Em vermelho ) à elipse no ponto  $P$ . consideremos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  ângulos formados pela reta tangente  $L$  e raios focais  $r_1$  e  $r_2$  respectivamente,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  ângulos formados pelos raios focais  $r_1$  e  $r_2$ . Iremos mostrar que  $\alpha_1 = \alpha_2$ :

Sabendo que a equação da elipse é da forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ Com } a > b$$

Colocando a equação da elipse em função de  $y$  temos:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$$

$$y^2 = b^2 * \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$$

$$y = \sqrt{b^2 * \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)}$$

$$y = b * \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}$$

$$y = \frac{b}{a} * \sqrt{a^2 - x^2} \quad (I)$$

Derivando  $y$  temos:

$$y' = \left(\frac{b}{a} * \sqrt{a^2 - x^2}\right)'$$

$$y' = \frac{b}{a} * \frac{1}{2} * \frac{-2x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$y' = \frac{b}{a} * \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (\text{II})$$

Encontramos a inclinação da reta tangente L que é dado por  $y'$ , logo a inclinação da reta normal N é da forma:

$$N = \frac{a}{b} * \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \quad (\text{III})$$

Como as retas tangente e a normal são perpendiculares, temos que:

$$N * y' = -1$$

Vamos colocar (I), (II) e (III) em função de  $y_0$  e  $x_0$ , portanto temos:

$$y_0 = \frac{b}{a} * \sqrt{a^2 - (x_0)^2}$$

$$y_0' = \frac{b}{a} * \frac{-x_0}{\sqrt{a^2 - (x_0)^2}}$$

$$N = \frac{a}{b} * \frac{\sqrt{a^2 - (x_0)^2}}{x_0}$$

Logo temos que a reta normal ao gráfico da elipse em P possui equação:

$$y - y_0 = \frac{a}{b} * \frac{\sqrt{a^2 - (x_0)^2}}{x_0} * (x - x_0)$$

Substituindo o valor de  $y_0$ , temos:

$$y - \left(\frac{b}{a} * \sqrt{a^2 - (x_0)^2}\right) = \frac{a}{b} * \frac{\sqrt{a^2 - (x_0)^2}}{x_0} * (x - x_0)$$

Para  $y = 0$ , temos:

$$-\left(\frac{b}{a} * \sqrt{a^2 - (x_0)^2}\right) = \left(\frac{a}{b} * \frac{\sqrt{a^2 - (x_0)^2}}{x_0}\right) * x - \left(\frac{a}{b} * \sqrt{a^2 - (x_0)^2}\right)$$

$$-\left(\frac{b}{a} * \sqrt{a^2 - (x_0)^2}\right) + \left(\frac{a}{b} * \sqrt{a^2 - (x_0)^2}\right) = \left(\frac{a}{b} * \frac{\sqrt{a^2 - (x_0)^2}}{x_0}\right) * x$$

$$\frac{(a^2 - b^2) * (\sqrt{a^2 - (x_0)^2})}{a * b} = \left(\frac{a}{b} * \frac{\sqrt{a^2 - (x_0)^2}}{x_0}\right) * x$$



Sabendo que  $a^2 - b^2 = c^2$

$$\frac{c^2 * (\sqrt{a^2 - (x_0)^2})}{a * b} = \left( \frac{a}{b} * \frac{\sqrt{a^2 - (x_0)^2}}{x_0} \right) * x$$

$$\frac{c^2 * (\sqrt{a^2 - (x_0)^2})}{a * b} * \left( \frac{b}{a} * \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - (x_0)^2}} \right) = x$$

$$\frac{c^2}{a^2} * x_0 = x$$

$$x = \frac{c^2}{a^2} * x_0$$

Ou seja, reta normal N intercepta o eixo no ponto  $x = \frac{c^2}{a^2} * x_0$ .

Temos que:

$$x_0 < a, \text{ logo } x = \frac{c^2}{a^2} * x_0 < \frac{c^2}{a^2} * a = \frac{c^2}{a^2}.$$

Temos então: Como  $c < a$ , ou seja  $\frac{1}{a} < \frac{1}{c}$ ,

$$\frac{c^2}{a} < \frac{c^2}{c} = c$$

O que podemos concluir que:

$$-c < x < c$$

Logo a reta normal a elipse passa entre os segmentos PF1 e PF2 o que implica que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são agudos. A inclinação do segmento PF1 é  $m_1 = \frac{y_0}{x_0 - c}$  e a inclinação do segmentos PF2 é  $m_2 = \frac{y_0}{x_0 + c}$  a inclinação da reta tangente é  $-\frac{b}{a} * \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - (x_0)^2}}$ .

Temos que  $\tan \alpha_1$  e  $\tan \alpha_2$  representa a tangente do ângulo entre duas retas e seus coeficientes angulares é dado pela formula trigonométrica:

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + (\tan(a) * \tan(b))}$$

Por (III) temos a que a inclinação da reta normal é da forma:

$$N = \frac{a}{b} * \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

E a inclinação da reta tangente é:

$$L = -\frac{b}{a} * \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - (x_0)^2}}$$



Logo temos que:

$$\begin{aligned} \tan \alpha 1 &= \left| \frac{\left( \frac{b}{a} \cdot \frac{x0}{\sqrt{a^2 - (x0)^2}} \right) - \left( \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{(x0 - c)} \right)}{1 + \left( \left( \frac{b}{a} \cdot \frac{x0}{\sqrt{a^2 - (x0)^2}} \right) \cdot \left( \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{(x0 - c)} \right) \right)} \right| \\ \tan \alpha 1 &= \left| \frac{\frac{b}{a} \cdot \left( \frac{x0 \cdot (x0 - c) + (\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2})}{(\sqrt{a^2 - (x0)^2}) \cdot (x0 - c)} \right)}{1 + \left( \frac{b^2 \cdot x0}{a^2 \cdot (x0 - c)} \right)} \right| \\ \tan \alpha 1 &= \left| \frac{\frac{b}{a} \cdot \left( \frac{x0 \cdot (x0 - c) + (a^2 - x^2)}{(\sqrt{a^2 - (x0)^2}) \cdot (x0 - c)} \right)}{\left( \frac{a^2 \cdot (x0 - c) - (b^2 \cdot x0)}{a^2 \cdot (x0 - c)} \right)} \right| \\ \tan \alpha 1 &= \left| -\frac{b}{a} \cdot \left( \frac{((x0)^2 - x0c + a^2 - (x0)^2) \cdot (a^2) \cdot (x0 - c)}{(\sqrt{a^2 - (x0)^2}) \cdot (x0 - c) \cdot (a^2x0 - a^2c - b^2x0)} \right) \right| \\ \tan \alpha 1 &= \left| -\frac{b}{a} \cdot \left( \frac{((x0)^2 - x0c + a^2 - (x0)^2) \cdot (a^2)}{(a^2x0 - a^2c - b^2x0) \cdot (\sqrt{a^2 - (x0)^2})} \right) \right| \\ \tan \alpha 1 &= \left| -(a \cdot b) \cdot \left( \frac{((x0)^2 - x0c + a^2 - (x0)^2) \cdot (a^2)}{(a^2x0 - a^2c - b^2x0) \cdot (\sqrt{a^2 - (x0)^2})} \right) \right| \\ \tan \alpha 1 &= \left| -\frac{(a \cdot b)}{(\sqrt{a^2 - (x0)^2})} \cdot \left( \frac{a^2 - (x0 \cdot c)}{((a^2 \cdot x0 - a^2) \cdot (c - b^2) \cdot x0)} \right) \right| \\ \tan \alpha 1 &= \left| -\frac{(a \cdot b)}{(\sqrt{a^2 - (x0)^2})} \cdot \left( \frac{a^2 - (x0 \cdot c)}{((x0 \cdot (a^2 - b^2)) - a^2 \cdot c)} \right) \right| \quad (IV) \end{aligned}$$

Sabendo que:

$$a^2 - b^2 = c^2$$

Substituindo em (IV) temos:

$$\begin{aligned} \tan \alpha 1 &= \left| -\frac{(a \cdot b)}{(\sqrt{a^2 - (x0)^2})} \cdot \left( \frac{a^2 - (x0 \cdot c)}{(x0 \cdot (c^2 - a^2) \cdot c)} \right) \right| \\ \tan \alpha 1 &= \left| -\frac{(a \cdot b)}{(\sqrt{a^2 - (x0)^2})} \cdot \left( \frac{a^2 - (x0 \cdot c)}{-c \cdot ((a^2 - x0) \cdot c)} \right) \right| \\ \tan \alpha 1 &= \left| -\frac{(a \cdot b)}{(\sqrt{a^2 - (x0)^2})} \cdot \left( \frac{a^2 - (x0 \cdot c)}{-c \cdot (a^2 - (x0 \cdot c))} \right) \right| \\ \tan \alpha 1 &= \frac{(a \cdot b)}{c \cdot (\sqrt{a^2 - (x0)^2})} \end{aligned}$$

Para  $\tan \alpha 2$ :

$$\tan \alpha 2 = \left| \frac{\left( \frac{b}{a} \cdot \frac{x0}{\sqrt{a^2 - (x0)^2}} \right) - \left( \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{(x0 + c)} \right)}{1 + \left( \left( \frac{b}{a} \cdot \frac{x0}{\sqrt{a^2 - (x0)^2}} \right) \cdot \left( \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{(x0 + c)} \right) \right)} \right|$$





$$\begin{aligned} \tan \alpha_2 &= \left| \frac{\frac{b}{a} * \left( \frac{x_0 * (x_0 + c) + (\sqrt{a^2 - x_0^2} * \sqrt{a^2 - x_0^2})}{(\sqrt{a^2 - (x_0)^2}) * (x_0 + c)} \right)}{1 + \left( \frac{b^2 * x_0}{a^2 * (x_0 + c)} \right)} \right| \\ \tan \alpha_2 &= \left| \frac{\frac{b}{a} * \left( \frac{x_0 * (x_0 + c) + (a^2 - x_0^2)}{(\sqrt{a^2 - (x_0)^2}) * (x_0 + c)} \right)}{\left( \frac{a^2 * (x_0 + c) - b^2 * x_0}{a^2 * (x_0 + c)} \right)} \right| \\ \tan \alpha_2 &= \left| -\frac{b}{a} * \left( \frac{((x_0)^2 - x_0c + a^2 - (x_0)^2) * (a^2) * (x_0 + c)}{(\sqrt{a^2 - (x_0)^2}) * (x_0 + c) * (a^2x_0 - a^2c - b^2x_0)} \right) \right| \\ \tan \alpha_2 &= \left| -\frac{b}{a} * \left( \frac{((x_0)^2 - x_0c + a^2 - (x_0)^2) * (a^2)}{(a^2x_0 - a^2c - b^2x_0) * (\sqrt{a^2 - (x_0)^2})} \right) \right| \\ \tan \alpha_2 &= \left| -(a * b) * \left( \frac{((x_0)^2 - x_0c + a^2 - (x_0)^2) * (a^2)}{(a^2x_0 - a^2c - b^2x_0) * (\sqrt{a^2 - (x_0)^2})} \right) \right| \\ \tan \alpha_2 &= \left| -\frac{(a * b)}{(\sqrt{a^2 - (x_0)^2})} * \left( \frac{a^2 - (x_0 * c)}{(a^2 * (x_0 - a^2) * (c - b^2 * x_0))} \right) \right| \\ \tan \alpha_2 &= \left| -\frac{(a * b)}{(\sqrt{a^2 - (x_0)^2})} * \left( \frac{a^2 - (x_0 * c)}{(x_0 * (a^2 - b^2) - (a^2 * c))} \right) \right| \quad (V) \end{aligned}$$

Sabendo que:

$$a^2 - b^2 = c^2$$

Substituindo em (V) temos:

$$\begin{aligned} \tan \alpha_2 &= \left| -\frac{(a * b)}{(\sqrt{a^2 - (x_0)^2})} * \left( \frac{a^2 - (x_0 * c)}{((x_0 * c^2) - (a^2 * c))} \right) \right| \\ \tan \alpha_2 &= \left| -\frac{(a * b)}{(\sqrt{a^2 - (x_0)^2})} * \left( \frac{a^2 - (x_0 * c)}{-c * (a^2 - (x_0 * c))} \right) \right| \\ \tan \alpha_2 &= \left| -\frac{(a * b)}{(\sqrt{a^2 - (x_0)^2})} * \left( \frac{a^2 - (x_0 * c)}{-c * (a^2 - (x_0 * c))} \right) \right| \\ \tan \alpha_2 &= \frac{(a * b)}{c * (\sqrt{a^2 - (x_0)^2})} \end{aligned}$$

Como  $\tan \alpha_1 = \tan \alpha_2$ , temos que  $\alpha_1 = \alpha_2$ .

Portanto se após realizar a tacada a bola passar sobre um dos focos, pelas propriedades da elipse demonstradas neste trabalho, ela será refletida em direção ao outro foco.

Para exemplificar o funcionamento da mesma, consideremos, o ponto inicial do carambola, seja a mesma posição do foco da elipse (F1), se a caçapa estiver localizada no outro foco (F2), independentemente da direção em que se jogue, com uma força suficiente para bater em pelo menos uma tabela, o carambola irá ser refletido para o outro foco, que é

F2, como em F2 está a caçapa, o carambola será encaçapado, outra possibilidade é que independentemente da posição inicial do carambola, mas se for tacado em direção ao foco (F1), de modo que passe pelo foco (F1), com uma força suficiente para bater em pelo menos uma tabela, o carambola irá ser refletido para o outro foco e o carambola será encaçapado.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização dos materiais concretos, em sala de aula, deve estar relacionada aos objetivos que se deve alcançar, visto que são recursos que possibilitam ao discente reconhecer conceitos matemáticos de forma mais prazerosa e palpável, incumbindo o professor mediar e apresentar o material como uma possibilidade a mais para o ensino e aprendizagem, contudo os materiais concretos ou didáticos não são os únicos recursos, tampouco o mais importante para o entendimento da matemática, muitas vezes o docente tem a sua disposição um bom material, mas não sabe aproveitar o máximo é necessário realizar um bom planejamento antes de levar até a sala de aula. Seu uso deve estar ligado à proposta de ensino, pois são excelentes ferramentas de aprendizagem, mas por si só não garantem o conhecimento, assim como a aprendizagem.

A utilização de materiais concretos no ensino de conceitos matemáticos, tem vários desígnios, entre eles é tornar o aprendizado mais prazeroso, tendo em vista que esses recursos podem facilitar a ação docente e que possibilitam aos alunos manipulá-lo.

O objetivo principal era apresentar um material concreto, mais precisamente a sinuca cônica como recurso didático para o ensino das cônicas e nortear a confecção da mesma assim como também demonstrar o funcionamento da propriedade refletora de uma forma prazerosa em forma de bilhar.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.

REIS e SILVA, **Geometria Analítica**. 2.ed. Rio de Janeiro - RJ: Editora LTC – Livros Técnicos e Científicos Editoras S.A., 1996.

STEVEN WEINBERG, **Para Explicar o Mundo: A descoberta da Ciência Moderna**. 1.ed – Editora Companhia das Letras – Livros Ciência e História.